RÉPUBLIQUE ARABE D'ÉGYPTE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE

Mathématiques II

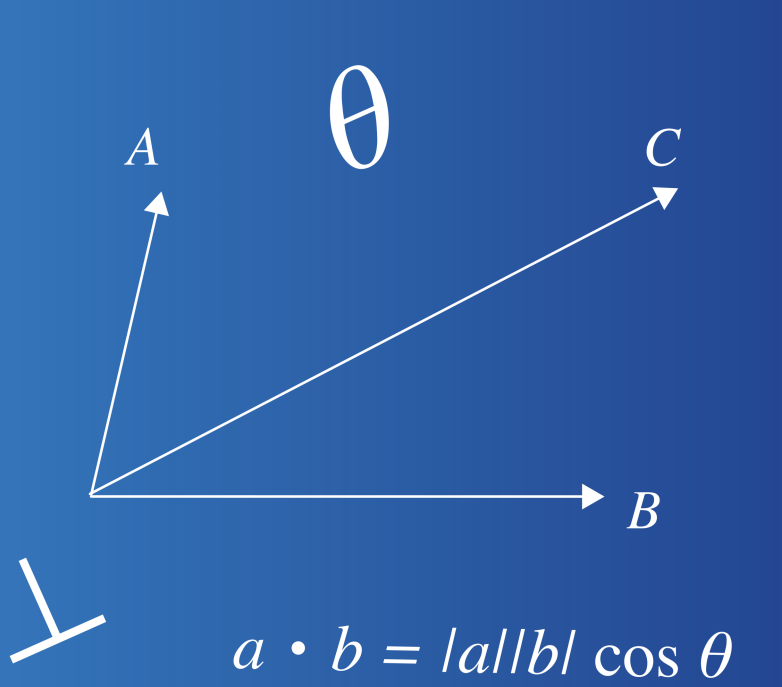
Baccalauréat égyptien

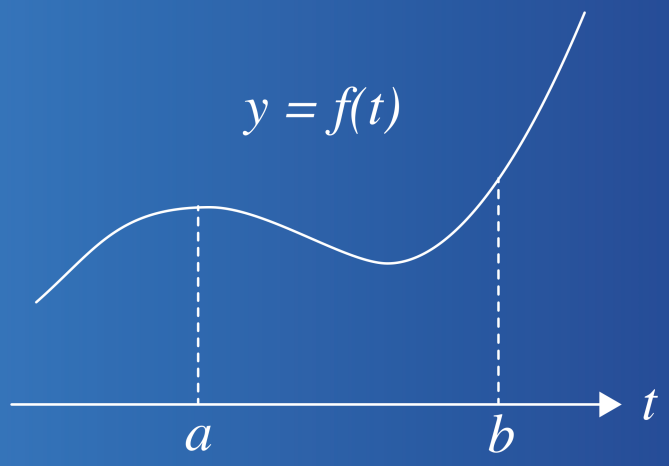
2e année

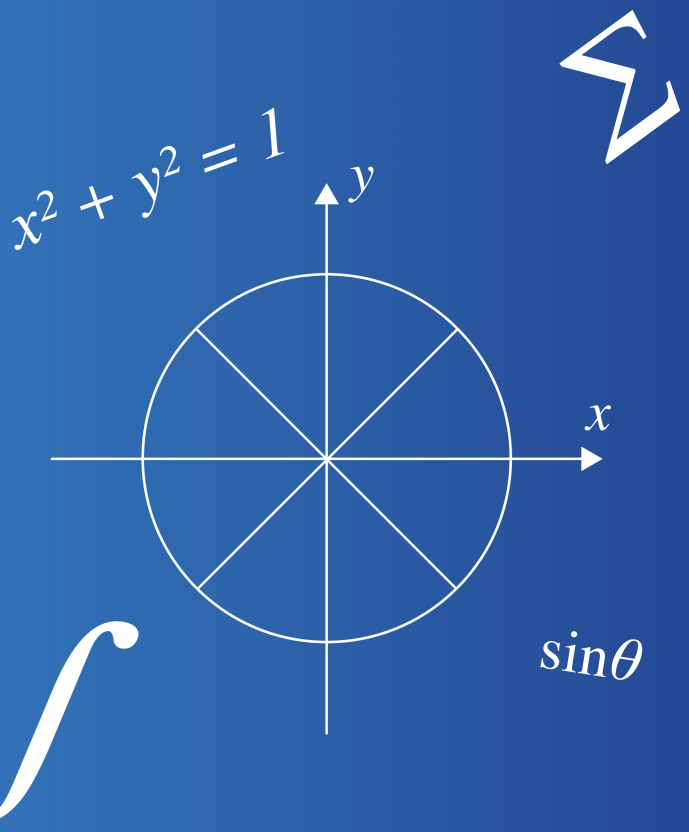
Première partie

11

SPRIX







MATHÉMATIQUES

Baccalauréat égyptien — 2e année

EXAMEN PÉDAGOGIQUE

Advised by INTERNATIONAL BACCALAUREATE®

Le Baccalauréat International® a examiné les approches pédagogiques et les modalités d'évaluation qui sous-tendent ce manuel.

© 2026 Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement technique

Tous droits réservés.

Les droits d'auteur et la responsabilité du contenu de ce manuel demeurent la propriété du Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement technique.

Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite, conservée dans un système de recherche documentaire ni transmise, sous quelque forme ou par quelque moyen que ce soit — électronique, mécanique, photocopie, enregistrement ou autre — sans l'autorisation écrite préalable des titulaires des droits.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement technique

Nouvelle Capitale administrative

Le Caire, Égypte

Introduction

Conformément à la vision du système du Baccalauréat égyptien et à son engagement à préparer les apprenants aux exigences du XXI^{e} siècle, ce manuel de mathématiques destiné à la 11^{e} année a été élaboré afin d'offrir aux élèves une expérience d'apprentissage rigoureuse, stimulante et intellectuellement enrichissante. Le programme vise à développer une compréhension conceptuelle approfondie, la culture mathématique et la capacité d'appliquer les connaissances et les compétences mathématiques à des situations réelles.

La philosophie qui sous-tend ce manuel repose sur l'apprentissage fondé sur l'investigation, dans lequel les élèves construisent activement leur compréhension par l'observation, le questionnement, l'exploration et le raisonnement appuyé sur des preuves. L'apprentissage débute par des problèmes porteurs de sens, des situations authentiques et des expériences exploratoires qui éveillent la curiosité et incitent les apprenants à rechercher des explications aux régularités, aux relations et aux structures mathématiques présentes dans le monde qui les entoure. Cette démarche les conduit à découvrir des régularités, à formuler des conjectures et des explications, puis à construire leur compréhension avant d'aborder les concepts, principes, procédures et modèles formels.

Chaque leçon suit une progression cohérente allant de l'exploration à la conceptualisation puis à l'application, selon la démarche Point essentiel – Mise en route – Explication – À vous d'essayer – Exercices. Les élèves découvrent d'abord des situations, des problèmes et des exemples soigneusement choisis qui relient les nouveaux apprentissages aux connaissances antérieures et aux expériences quotidiennes. Ces introductions favorisent l'investigation : elles amènent les apprenants à analyser l'information, interpréter des représentations, repérer des régularités et construire de premières explications. Viennent ensuite les concepts, principes, procédures et modèles mathématiques fondamentaux, organisés pour favoriser une compréhension profonde plutôt que la mémorisation mécanique. Les étapes À vous d'essayer et Exercices permettent enfin de pratiquer, d'appliquer et d'évaluer les acquis.

Le manuel offre de nombreuses occasions de résoudre des problèmes, de construire des modèles mathématiques et de mener des recherches autonomes. Les élèves sont encouragés à tester des idées, recueillir et analyser des données, évaluer des raisonnements et tirer des conclusions justifiées. Ils développent ainsi leur confiance dans la pensée mathématique et deviennent des acteurs de la construction des connaissances.

L'évaluation est intégrée au processus d'apprentissage comme instrument de progression. Des évaluations formatives et sommatives variées aident les élèves à suivre leurs progrès, à repérer les points à améliorer et à démontrer leur compréhension. Les tâches reflètent la nature des questions d'examen tout en développant la pensée de haut niveau, le raisonnement analytique et l'application des connaissances dans des contextes nouveaux.

Introduction

Une attention particulière est accordée à la nature des mathématiques, composante fondamentale de la culture mathématique. Les élèves découvrent comment les connaissances mathématiques sont élaborées, justifiées, affinées et communiquées au sein des communautés mathématiques. Le programme valorise aussi les contributions des mathématiciens et des innovateurs dont les idées et les découvertes ont façonné notre compréhension du monde mathématique et contribué au progrès humain.

Le manuel développe systématiquement les compétences propres à l'activité mathématique : résolution de problèmes, raisonnement, représentation, communication, modélisation, estimation, reconnaissance de régularités, interprétation de données et démonstration. Elles sont intégrées aux situations d'apprentissage afin que les élèves acquièrent à la fois des connaissances et la capacité de penser et de travailler mathématiquement.

Conformément aux ambitions de l'éducation contemporaine, le programme favorise l'ouverture au monde en reliant les concepts mathématiques aux pratiques scientifiques, aux innovations technologiques, aux défis environnementaux et aux objectifs de développement durable. Il invite les élèves à reconnaître l'interdépendance des savoirs et le rôle des mathématiques dans le traitement des questions locales, nationales et mondiales.

Le programme développe également la pensée critique et créative par l'analyse de l'information, l'évaluation de stratégies alternatives, la production de solutions novatrices et l'application des mathématiques à des défis authentiques. Les apprenants abordent les problèmes comme des mathématiciens, des scientifiques et des ingénieurs, en mobilisant un raisonnement systématique et une démarche de conception.

Une caractéristique essentielle du manuel est l'intégration délibérée des mathématiques à la vie et aux expériences des élèves. Les idées sont présentées dans des contextes significatifs et accompagnées d'applications contemporaines issues des sciences, de l'ingénierie, de la technologie, de l'économie, des données, du développement durable et de la vie quotidienne. Ces liens montrent la pertinence des mathématiques pour comprendre et améliorer le monde.

Le programme encourage enfin l'apprentissage réflexif. Par l'autoévaluation et la réflexion métacognitive, les élèves suivent leur compréhension, évaluent leurs stratégies et assument progressivement la responsabilité de leur développement scolaire. En réfléchissant à ce qu'ils apprennent et à la manière dont ils apprennent, ils acquièrent les habitudes d'apprenants tout au long de la vie.

Ce manuel vise ainsi à former des apprenants dotés d'une culture mathématique, responsables et innovants, disposant des connaissances, compétences, valeurs et attitudes nécessaires pour réussir dans un monde en mutation rapide. Nous espérons que ce parcours les incitera à explorer les mathématiques avec curiosité, à penser avec rigueur, à agir de façon responsable et à contribuer au progrès de la société et à l'avenir durable de l'humanité.

MATHÉMATIQUES
Manuel de la 11e année — Première partie

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

Concept 1 Théorèmes binomial et multinomial 4

Concept 2 Division polynomiale 10

Concept 3 Expressions rationnelles 14

Concept 4 Identités et démonstrations 21

Concept 5 Inégalités 31

Chapitre 2 — Suites

Concept 1 Suites arithmétiques 40

Concept 2 Suites géométriques 57

Concept 3 Sommation 68

Concept 4 Suites avancées 85

Concept 5 Relations de récurrence et raisonnement par récurrence 91

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

Concept 1 Forme algébrique d'un nombre complexe 106

Concept 2 Équations du second degré 115

Concept 3 Théorèmes sur les polynômes 132

Concept 4 Équations de degré supérieur 142

Chapitre 4 — Géométrie et équations

Concept 1 Bases de la géométrie analytique 150

Concept 2 Triangles et droites 162

Concept 3 Cercles 180

1-1

MATHÉMATIQUES

Théorème du binôme

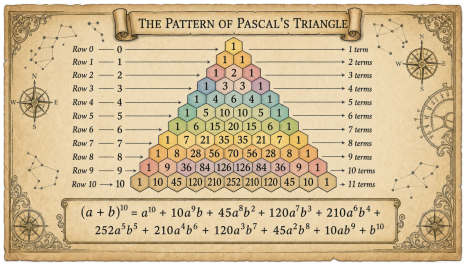
Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le théorème du binôme pour développer des expressions algébriques et déterminer les coefficients de termes donnés.

Concept 1 · Théorèmes binomial et multinomial

Observez les premières lignes du triangle de Pascal et remarquez comment le nombre de termes varie d'une ligne horizontale à l'autre. En poursuivant cette régularité, combien de termes la dixième ligne comportera-t-elle ?



Question directrice : Comment les formules algébriques et les coefficients combinatoires permettent-ils de prévoir le coefficient exact de n'importe quel terme du développement de $(x_1 + x_2)^n$ sans effectuer les multiplications successives ?

POINT ESSENTIEL !

Calcul de ${}_nC_r$

${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

Exemple : ${}_5C_3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$

${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$. Exemples : ${}_5C_0 = 1$, ${}_5C_5 = 1$.

Dans le développement de $(a+b)^n$, le terme contenant $a^{n-r}b^r$ est ${}_nC_r a^{n-r}b^r$.

Exemple : dans $(a+b)^5$, le terme a^3b^2 vaut ${}_5C_2 a^3b^2 = 10a^3b^2$.

Exemple : dans $(x-2y)^6$, le terme x^4y^2 vaut ${}_6C_2 x^4(-2y)^2 = 60x^4y^2$.

Développement de $(a+b)^n$ — Théorème du binôme

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nC_nb^n$$

Exemple :
$(x+2)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4\cdot 2 + {}_5C_2x^3\cdot 2^2 + {}_5C_3x^2\cdot 2^3 + {}_5C_4x\cdot 2^4 + {}_5C_5\cdot 2^5$.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le coefficient de x^4 dans le développement de $(2x^2-3)^7$.

2. Développez $(3x-2)^4$.

Explication

1. Dans le développement de $(2x^2-3)^7$, le terme en x^4 correspond à l'exposant 2 de $2x^2$ et à l'exposant $7-2=5$ de -3 :

$${}_7C_5(2x^2)^2(-3)^5 = \left[\frac{7\times6\times5\times4\times3}{5\times4\times3\times2\times1}\right]\times4x^4\times(-243) = -20412x^4.$$

Le coefficient de x^4 est donc -20412.

2. Développons en appliquant le théorème du binôme :

$$(3x-2)^4 = {}_4C_0(3x)^4 + {}_4C_1(3x)^3(-2) + {}_4C_2(3x)^2(-2)^2 + {}_4C_3(3x)(-2)^3 + {}_4C_4(-2)^4$$
$$= 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16.$$

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le coefficient du terme indiqué entre crochets :

(a) $(2x-3y)^7[x^6y]$ (b) $(3x-2)^5[x^2]$

(c) $(3a^2-2)^8[a^6]$

2. Développez : (a) $(x+2)^6$ (b) $(3a-2b)^5$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le coefficient du terme indiqué entre crochets :

(a) $(2x-y)^8[x^4y^4]$

(b) $(3a+b)^4[ab^3]$

(c) $(x-4y)^5[x^3y^2]$

(d) $(3x+1)^5[x^4]$

(e) $(2a-3)^4[a]$

(f) $(3x+2)^5[x^3]$

(g) $(2x^2-1)^6[x^6]$

(h) $(3x^2-1)^5[x^4]$

(i) $(3x^2+2)^6[x^6]$

2. Développez les expressions suivantes :

(a) $(x+1)^4$

(b) $(a+b)^4$

(c) $(a-2b)^4$

(d) $(x-2)^5$

(e) $(3x+2y)^5$

(f) $(2a^2-1)^5$

(g) $(x-3)^6$

(h) $(2x-3y)^6$

(i) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^6$

★ DÉFI — SOMME DES COEFFICIENTS

Si $(1+x)^5 = a+bx+cx^2+$ dx³ + ex⁴ + fx⁵, déterminez la valeur numérique de $a+b+c+d+e+f$.

1-2

MATHÉMATIQUES

Théorème multinomial

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

Vous souhaitez développer une expression composée de trois termes : $(x+y+z)^4$. Sans effectuer les multiplications, comment déterminer le coefficient du terme contenant x^2yz ? Comment écrire directement le développement sans avoir à supprimer les parenthèses ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le théorème multinomial pour développer des expressions algébriques et déterminer les coefficients de termes donnés.

POINT ESSENTIEL !

TERME GÉNÉRAL

Dans le développement de $(a+b+c)^n$, le terme contenant $a^pb^qc^r$ est :

$\left[\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\right]a^pb^qc^r$, avec $p+q+r=n$.

MISE EN ROUTE

Déterminez le coefficient du terme a^4b^3c dans les développements suivants :

(a) $(a+b+c)^8$ (b) $(a-2b+3c)^8$

Explication

(a) Dans le développement de $(a+b+c)^8$, le terme a^4b^3c est :

$\left[\frac{8!}{4!\,3!\,1!}\right]a^4b^3c = 280a^4b^3c$. Le coefficient recherché est donc 280.

(b) Dans le développement de $(a-2b+3c)^8$, le terme a^4b^3c est :

$\left[\frac{8!}{4!\,3!\,1!}\right]a^4(-2b)^3(3c)^1 = -6720a^4b^3c$. Le coefficient recherché est donc -6720.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le coefficient des termes suivants dans $(a+b+c)^6$:

(a) a^3bc^2 (b) $a^2b^2c^2$

2. Déterminez le coefficient des termes suivants dans $(a+3b-2c)^6$:

(a) $a^2b^2c^2$ (b) ab^2c^3

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour répondre à la question 2, puis discutez la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le coefficient des termes suivants dans le développement de $(x+y+z)^7$:

(a) xy^5z (b) x^4y^2z

(c) $x^2y^3z^2$

2. Déterminez le coefficient des termes suivants dans le développement de $(x+y+z)^9$:

(a) x^6yz^2 (b) $x^3y^3z^3$

(c) $x^2y^4z^3$

3. Déterminez le coefficient des termes suivants dans le développement de $(a+2b-3c)^7$:

(a) $a^2b^3c^2$ (b) abc^5

(c) a^2b^4c

4. Déterminez le coefficient des termes suivants dans le développement de $(2a-b+3c)^8$:

(a) $a^2b^2c^4$ (b) a^4bc^3

(c) $a^3b^3c^2$

★ DÉFI — PLUS GRAND COEFFICIENT

Déterminez le plus grand coefficient dans le développement de $(1+x+x^2)^4$.

1-3

MATHÉMATIQUES

Applications du théorème du binôme

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser le théorème du binôme dans des applications mathématiques et des calculs.

POINT ESSENTIEL !

Pour les problèmes de démonstration utilisant le théorème du binôme, on part du développement de $(1+x)^n$:

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \ldots + {}_nC_nx^n$.

On substitue ensuite à x une valeur appropriée pour obtenir l'égalité demandée.

MISE EN ROUTE

Démontrez l'égalité suivante :

${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_n = 2^n$.

Explication — Démonstration

Développons $(1+x)^n$ en appliquant le théorème du binôme :

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \ldots + {}_nC_nx^n$.

En remplaçant x par 1 dans cette expression :

$2^n = {}_nC_0 + 1 \cdot {}_nC_1 + 1^2 \cdot {}_nC_2 + \ldots + 1^n \cdot {}_nC_n$

$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_n$.

L'égalité proposée est donc vérifiée.

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez l'égalité suivante :

${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \ldots + (-1)^n {}_nC_n = 0$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour répondre à la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez votre réponse.

EXERCICES

Démontrez les égalités suivantes.

1. ${}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + \ldots + 2^n \cdot {}_nC_n = 3^n$.
2. ${}_nC_0 - 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 - \ldots + (-2)^n \cdot {}_nC_n = (-1)^n$.
3. ${}_nC_0 - \left(\frac{{}_nC_1}{2}\right) + \left(\frac{{}_nC_2}{2^2}\right) - \ldots + (-1)^n\left(\frac{{}_nC_n}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$.

★ DÉFI — DIVISIBILITÉ

En utilisant le théorème du binôme, démontrez que $8^n - 1$ est divisible par 7, où n est un entier positif.

RÉFLÉCHIR

Comparez le développement binomial et le développement multinomial. En quoi se ressemblent-ils ? Comment le fait de considérer le binôme comme un cas particulier du multinôme permet-il d'unifier votre compréhension des puissances algébriques et des méthodes de dénombrement combinatoire ?

1-4

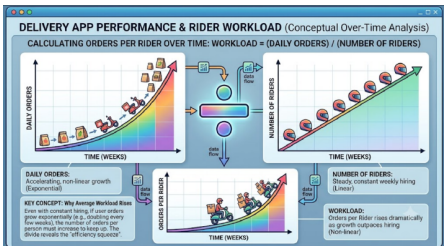
MATHÉMATIQUES

Division des polynômes

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

Concept 2 · Division polynomiale

Lorsque vous gérez une application intelligente de livraison de repas, vous pouvez constater que le nombre quotidien de commandes augmente à un rythme accéléré et non linéaire à mesure que l'application devient populaire. Parallèlement, l'entreprise recrute de nouveaux livreurs à un rythme hebdomadaire constant, donc linéaire. Pour connaître la charge moyenne — c'est-à-dire le nombre de commandes qu'un livreur doit prendre en charge au fil du temps — il faut diviser la fonction représentant le total des commandes par celle représentant le nombre de livreurs.



C'est précisément ici qu'intervient la division des polynômes. Cet outil permet de décomposer un système volumineux, complexe et en croissance rapide, puis de répartir sa charge en unités plus petites afin de déterminer la part exacte ou l'efficacité d'un élément.

Question directrice : Comment la division d'expressions algébriques complexes nous aide-t-elle à simplifier de grandes quantités de données et à comprendre la part d'une unité dans un système en croissance continue ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Effectuer la division de polynômes à l'aide de l'algorithme usuel.

POINT ESSENTIEL !

RÈGLE

La division des polynômes peut s'effectuer par division posée, de manière analogue à celle des entiers.

Dans les problèmes où l'on demande de « considérer l'expression comme un polynôme en x », les autres variables sont traitées comme des constantes.

ERREURS FRÉQUENTES

Erreurs de soustraction : après la multiplication, il faut changer correctement les signes et regrouper les termes semblables.

Multiplication partielle : il faut multiplier par tout le diviseur, et non uniquement par son terme dominant.

Si un terme d'un certain degré manque dans le dividende, laissez sa place vide.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le quotient et le reste lorsque $2x^3 - 5x^2 - 2$ est divisé par $2x^2 - x - 1$.
2. Soient $A = 4x^2 - 9ax - 9a^2$ et $B = x - 3a$. En les considérant comme des polynômes en x, déterminez le quotient et le reste de la division de A par B.

Explication — 1

DIVISION POSÉE

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline 2x^3 - 5x^2 - 2 & 2x^2 - x - 1 \\ \underline{2x^3 - x^2 - x} & \\ -4x^2 + x - 2 & \\ \underline{-4x^2 + 2x + 2} & \\ -x - 4 & \end{array}$$

Quotient : $x - 2$, reste : $-x - 4$.

On soustrait $(2x^2 - x - 1) \cdot x$ pour éliminer $2x^3$, puis $(2x^2 - x - 1) \cdot (-2)$ pour éliminer $-4x^2$. Le degré de $-x - 4$ est inférieur à celui du diviseur : c'est le reste.

Explication — 2

Puisque l'expression est considérée comme un polynôme en x, toutes les variables autres que x sont traitées comme des nombres.

DIVISION POSÉE

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x+3a \\
\hline
x-3a & 4x^2-9ax\quad -9a^2 \\
 & \underline{4x^2-12ax} \\
 & \quad 3ax-9a^2 \\
 & \underline{\quad 3ax-9a^2} \\
 & \quad 0
\end{array}
$$

Le quotient est $4x+3a$ et le reste est 0.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez le quotient et le reste lorsque le polynôme A est divisé par le polynôme B. Pour la question 2, considérez les expressions comme des polynômes en x.

1. $A=2x^3-13x+1, B=x^2+2x-3.$
2. $A=x^3-3ax^2+5a^2x-5a^3, B=x-2a.$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

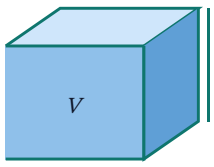
Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES

Déterminez le quotient et le reste lorsque A est divisé par B. Pour les questions 7 à 10, considérez les expressions comme des polynômes en x.

1. $A=x^2-5x+1, B=x-2.$
2. $A=x^3-4x+1, B=x-3.$
3. $A=2x^3-3x^2+3x+4, B=x^2-2x+3.$
4. $A=6x^3-8x^2+5, B=2x^2-2x-5.$
5. $A=x^3-7x+6, B=x^2+2x-3.$
6. $A=3x^4-5x^3+x-1, B=-x^2+3x+2.$
7. $A=4x^2-5ax-6a^2, B=x-2a.$
8. $A=x^3+ax^2+a^2x-a^3, B=x+2a.$
9. $A=x^3-2ax^2+3a^3, B=x+a.$
10. $A=x^3+3x^2y-2y^3, B=x+y.$

★ DÉFI — DÉTERMINER LA HAUTEUR



Une boîte ayant la forme d'un pavé droit possède un volume $V=4x^3+4x^2-9x-9$. L'aire de sa base est $2x^2-x-3$. Exprimez sa hauteur h en fonction de x.

1-5

MATHÉMATIQUES

Quotient et reste des polynômes

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

POINT ESSENTIEL !

Si un polynôme A est divisé par un polynôme B, en donnant un quotient Q et un reste R, alors :

$A = B \times Q + R$.

Exemple : lorsque 7 est divisé par 3, le quotient est 2 et le reste est 1 :

$7 = 3 \times 2 + 1$.

Dans les problèmes où le quotient et le reste sont donnés, remplacez les expressions connues dans $A =$ BQ $+R$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Distinguer quotient et reste dans une division polynomiale, déduire que le degré du reste est inférieur à celui du diviseur, utiliser cette propriété pour vérifier la division.

MISE EN ROUTE

Déterminez les polynômes A et B qui satisfont les conditions suivantes.

1. Lorsque A est divisé par $x^2 - 2x - 1$, le quotient est $x + 3$ et le reste est $-2x + 5$.

2. Lorsque $4x^3 + 8x - 9$ est divisé par B, le quotient est $2x - 3$ et le reste est $x + 15$.

ERREURS FRÉQUENTES

S'arrêter trop tôt : la division ne se termine que lorsque le degré du reste est inférieur à celui du diviseur.

Confondre quotient et reste : le reste n'est pas nécessairement nul, il peut comporter un ou plusieurs termes de degré inférieur à celui du diviseur.

Explication

Puisque le quotient et le reste sont connus, remplaçons les expressions dans $A =$ BQ $+R$.

1. DÉTERMINATION DE A

$A = (x^2 - 2x - 1)(x + 3) + (-2x + 5)$

$= x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x - x - 3 - 2x + 5$

$= x^3 + x^2 - 9x + 2$.

2. DÉTERMINATION DE B

$4x^3 + 8x - 9 = B(2x - 3) + (x + 15)$

$B(2x - 3) = 4x^3 + 7x - 24$

$B = (4x^3 + 7x - 24) \div (2x - 3) = 2x^2 + 3x + 8$.

Vérification par division posée :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x + 8 \\
\hline
2x - 3 & 4x^3 + 7x - 24 \\
 & \underline{4x^3 - 6x^2} \\
 & \quad 6x^2 + 7x \\
 & \quad \underline{6x^2 - 9x} \\
 & \quad\quad 16x - 24 \\
 & \quad\quad \underline{16x - 24} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Le reste doit être nul.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez les polynômes A et B qui satisfont les conditions suivantes.

1. Lorsque A est divisé par $2x^2 + x + 1$, le quotient est $3x + 2$ et le reste est $-2x + 6$.
2. Lorsque $x^3 - x^2 + 3x + 1$ est divisé par B, le quotient est $x^2 - 2x + 5$ et le reste est -4.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez la réponse.

EXERCICES

Déterminez les polynômes A et B qui satisfont les conditions suivantes.

1. Lorsque A est divisé par $x^2 - 2x - 1$, le quotient est $2x - 3$ et le reste est $-2x$.
2. Lorsque A est divisé par $x^2 - 3x + 2$, le quotient est $2x + 6$ et le reste est $2x - 3$.
3. Lorsque A est divisé par $2x^2 - x + 2$, le quotient est $2x - 1$ et le reste est 2.
4. Lorsque $2x^3 + x^2 - 3x + 5$ est divisé par B, le quotient est $x + 1$ et le reste est $-5x + 2$.
5. Lorsque $6x^3 + 11x^2 - 2$ est divisé par B, le quotient est $2x^2 + 3x - 1$ et le reste est -1.
6. Lorsque $2x^3 + 4x^2 + 7$ est divisé par B, le quotient est $x + 2$ et le reste est $3x + 13$.

★ DÉFI — RETROUVER LE DIVISEUR

Lorsque $x^4 + x^2 + 3x - 1$ est divisé par B, le quotient est $x^2 + x + 1$ et le reste est $3x - 2$. Déterminez le polynôme B.

RÉFLÉCHIR

Lorsque nous divisons un polynôme par un autre, pourquoi le reste doit-il toujours avoir un degré inférieur à celui du diviseur ? Comment cette condition nous aide-t-elle à vérifier les étapes de la division et à comprendre la relation entre le quotient et le reste ?

1-6

MATHÉMATIQUES

Multiplication et division des expressions rationnelles

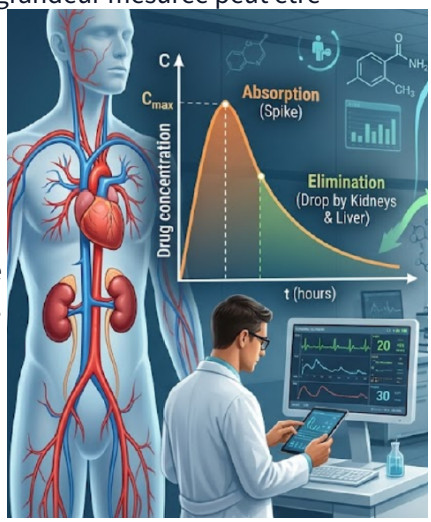
Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Simplifier des expressions fractionnaires rationnelles en effectuant des multiplications et des divisions.

Concept 3 · Expressions rationnelles

Dans un modèle scientifique simplifié, une grandeur mesurée peut être représentée par le quotient de deux expressions algébriques. Une telle expression rationnelle ne s'utilise que pour les valeurs qui rendent son dénominateur non nul.



Pour comparer ou combiner ces modèles, on additionne, soustrait, multiplie ou divise les expressions rationnelles. Ces opérations facilitent les calculs, mais la pertinence du modèle et son domaine de validité doivent être vérifiés séparément.

Question directrice : Comment les expressions rationnelles permettent-elles de modéliser et de simplifier certaines relations quantitatives en sciences ?

POINT ESSENTIEL !

RÉDUCTION

Diviser le numérateur et le dénominateur d'une expression rationnelle par leur facteur commun s'appelle réduire ou simplifier la fraction.

Une expression rationnelle qui ne peut plus être réduite est dite irréductible.

EXEMPLE

$\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x-1}{x}$.

L'expression $\frac{x-1}{x}$ est irréductible. L'égalité précédente exige $x \neq 0$ et $x \neq 3$: le domaine de l'expression originale est conservé.

Avant toute opération, déterminez les valeurs interdites de l'expression originale, puis factorisez. Conservez ces exclusions après simplification, dans une division, le diviseur doit aussi être non nul.

MISE EN ROUTE

Déterminez les valeurs interdites avant de calculer et conservez-les après simplification.

1. Simplifiez :

(a) $\frac{12ab^5}{9a^3b^2}$ (b) $\frac{x^2-4}{3x^2+7x+2}$.

2. Calculez : $\left[\frac{x^2-4x-5}{2x^2+5x+2}\right] \div \left[\frac{x^2-x-20}{2x^2-5x-3}\right]$.

ERREUR FRÉQUENTE

On ne peut pas supprimer des variables ou des nombres identiques dans le numérateur et le dénominateur lorsqu'ils sont séparés par un signe d'addition ou de soustraction. On ne simplifie que des facteurs.

Explication

1(a) — SIMPLIFICATION

$\frac{12ab^5}{9a^3b^2} = \frac{4b^3}{3a^2}$.

1(b) — FACTORISATION ET RÉDUCTION

$$\frac{x^2-4}{3x^2+7x+2}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(3x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x-2}{3x+1}.$$

On simplifie le facteur $(x+2)$, avec $x \neq -2$ et $x \neq -\frac{1}{3}$.

2 — DIVISION DE FRACTIONS RATIONNELLES

$$\left[\frac{x^2-4x-5}{2x^2+5x+2}\right] \div \left[\frac{x^2-x-20}{2x^2-5x-3}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x-5}{2x^2+5x+2}\right] \times \left[\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-20}\right]$$

$$= \frac{(x+1)(x-5)}{(2x+1)(x+2)} \times \frac{(2x+1)(x-3)}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x+4)}.$$

On multiplie par l'inverse puis on factorise, sans développer. Les exclusions initiales sont $x \neq -2$, $-\frac{1}{2}$, 3, 5 et -4.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Simplifiez : (a) $\frac{6x^2y^3}{20x^3y}$ (b) $\frac{2x^2-3x-5}{x^2+3x+2}$.

2. Calculez :

(a) $\left[\frac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16}\right] \times \left[\frac{x^2+2x}{x^2-6x+9}\right]$. (b) $\left[\frac{x^2-9}{x^2-x-2}\right] \div \left[\frac{2x^2+5x-3}{x+1}\right]$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez la réponse.

EXERCICES — 1. SIMPLIFIEZ

Dans tous les exercices, déterminez les valeurs interdites de l'expression originale et conservez-les après simplification.

(a) $\frac{6a^2bc^2}{8ab^4c^2}$

(b) $\frac{2a^2b}{8a^3b^3}$

(c) $\frac{x^2+3x}{x^2-9}$

(d) $\frac{x^2+x-2}{x^2-5x+4}$

(e) $\frac{2x^2-4xy+2y^2}{x^3+3x^2y-4xy^2}$

(f) $\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

EXERCICES — 2. CALCULEZ

(a) $\left[\frac{a^3b^2}{3c}\right] \times \left[\frac{9c^3}{a^4b^2}\right]$

(b) $\left[\frac{6bc^3}{5a^2}\right] \times \left[\frac{10a^4}{3b^3}\right]$

(c) $\left[\frac{2xy}{3ab}\right] \div \left[\frac{8x^3y^2}{9a^2b^3}\right]$

(d) $\left[\frac{x+1}{x^2-4}\right] \times \left[\frac{x^2-2x-8}{x^2+x}\right]$

(e) $\left[\frac{x^2-9}{x^2-2x}\right] \times \left[\frac{x^2-7x+10}{x^2+x-12}\right]$

(f) $\left[\frac{x^2+x-6}{2x^2+x-6}\right] \times \left[\frac{x^2+6x+8}{3x^2-5x-2}\right]$

(g) $\left[\frac{2x^2-x-10}{x^2-2x-3}\right] \div \left[\frac{x^2+x-2}{x^2-6x+9}\right]$

(h) $\left[\frac{x^2-3x-10}{2x^2+3x-2}\right] \div \left[\frac{x^2-2x-15}{6x-3}\right]$

(i) $\left[\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\right] \div \left[\frac{x^2+xy}{x-y}\right]$

★ DÉFI — SIMPLIFIER PUIS ÉVALUER

Pour $x = 123$, calculez :

$\left[\frac{x^3+8}{x^2-x-6}\right] \times \left[\frac{x^2-6x+9}{x^2-2x+4}\right] \div \left[\frac{2x-6}{x^5-1}\right]$.

1-7

MATHÉMATIQUES

Addition et soustraction des expressions rationnelles

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

POINT ESSENTIEL !

Addition et soustraction d'expressions rationnelles ayant des dénominateurs différents

Déterminez d'abord les valeurs interdites. Multipliez le numérateur et le dénominateur par une même expression non nulle pour obtenir un dénominateur commun, conservez les exclusions initiales.

Exemple :

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$
$$=\frac{x-2}{(x+1)(x-2)}+\frac{x+1}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{(x-2)+(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}.$$

Lors de la recherche d'un dénominateur commun, commencez par factoriser les dénominateurs.

EXEMPLE AVEC FACTORISATION

$$\frac{2}{x^2-x-2}+\frac{3}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{2}{(x+1)(x-2)}+\frac{3}{(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{2(x-3)}{(x+1)(x-2)(x-3)}+\frac{3(x+1)}{(x-2)(x-3)(x+1)}$$
$$=\frac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{5x-3}{(x+1)(x-2)(x-3)}.$$

Après la mise au même dénominateur, calculez uniquement le numérateur, puis vérifiez s'il peut être factorisé et simplifié.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Simplifier des expressions fractionnaires rationnelles en effectuant des additions et des soustractions.

ERREUR FRÉQUENTE

Ne jamais additionner ou soustraire directement les numérateurs et les dénominateurs. Les expressions rationnelles doivent d'abord être mises au même dénominateur.

MISE EN ROUTE

Simplifiez :

$$\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}.$$

Explication

DÉMARCHE

$$\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{x+4}{x(x-2)}-\frac{3}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{(x+4)(x-1)-3x}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{x^2-4}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{x+2}{x(x-1)}.$$

Étapes : déterminer les valeurs interdites, factoriser les dénominateurs, réduire au même dénominateur, calculer puis simplifier. Conserver les exclusions initiales, ici, $x \neq 0$, 1 et 2.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez les valeurs interdites, puis simplifiez en conservant ces exclusions :

1. $\frac{x-1}{x^2+4x+3}+\frac{2}{x^2+5x+6}$.
2. $\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-1}$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES — SIMPLIFIEZ

1. $\frac{x^2-4}{x+1}+\frac{3}{x+1}$
2. $\frac{3}{x^2+x}-\frac{3-x}{x^2+x}$
3. $\frac{x+2}{x}-\frac{x-2}{x-1}$
4. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$
5. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x^2+5x-6}$
6. $\frac{x-3}{x^2+x}+\frac{x}{x^2-1}$
7. $\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x-1}{x^2+x}$
8. $\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}$
9. $\frac{x-1}{x^2+3x+2}-\frac{x-3}{x^2+4x+3}$
10. $\frac{x+4}{x^2+2x}-\frac{x+5}{x^2+x-2}$
11. $\frac{x+8}{x^2+x-2}-\frac{x+5}{x^2-1}$

★ DÉFI — FILTRATION DE L'EAU EN DEUX ÉTAPES



Une équipe d'ingénierie environnementale surveille un système de filtration de l'eau en deux étapes dans un réservoir communautaire. Le système extrait les polluants organiques pendant x heures.

Étape 1 — Biofiltre primaire : le taux initial d'extraction est $\frac{x^3+8x}{x^2-x-2}$.

Étape 2 — Filtre secondaire au charbon : un léger reflux réintroduit une partie des polluants et réduit le taux d'épuration, il est modélisé par $\frac{8}{x-2}$.

Pour déterminer l'efficacité nette de purification, soustrayez le taux de reflux de l'étape 2 du taux d'extraction de l'étape 1, puis simplifiez le résultat.

1-8

MATHÉMATIQUES

Fractions complexes

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

POINT ESSENTIEL !

$$\frac{\frac{1}{y}}{\frac{2}{x}}, \quad \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

Les expressions qui contiennent des expressions rationnelles dans leur numérateur ou leur dénominateur sont appelées fractions complexes.

Excluez les valeurs annulant un dénominateur interne ou celui de la grande fraction. Multipliez ensuite les deux membres de la fraction par une même expression non nulle et conservez les exclusions.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Simplifier des fractions complexes et les réduire à leur forme la plus simple.

MISE EN ROUTE

Simplifiez les expressions suivantes.

1. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x-1}}$

2. $\dfrac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$

Explication

1 — MULTIPLIER PAR $x-1$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x-1}}$$

$$= \frac{1\cdot(x-1)}{\left[1-\frac{1}{x-1}\right]\cdot(x-1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)-1}$$

$$= \frac{x-1}{x-2}.$$

Les valeurs interdites sont x = 1 et x = 2. La réduction conserve ces deux exclusions.

2 — MULTIPLIER PAR $(1-x)(1+x)$

$$\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]\cdot(1-x)(1+x)}{\left[\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right]\cdot(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}$$

$$= \frac{2}{2x}$$

$$= \frac{1}{x}.$$

REMARQUE

Le facteur choisi contient tous les dénominateurs internes. Pour l'exemple 2, les exclusions sont x ≠ −1, 0 et 1, elles restent valables après réduction.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez les valeurs interdites de chaque expression originale, puis simplifiez :

1. $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{x+1}}$
2. $\dfrac{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}}$
3. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 3, puis discutez la réponse.

EXERCICES — SIMPLIFIEZ

1. $\dfrac{x-\frac{2}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-2}$
2. $\dfrac{1+\frac{x-y}{x+y}}{1-\frac{x-y}{x+y}}$
3. $\dfrac{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}}$
4. $\dfrac{\left[\frac{x+1}{x-1}\right]-\left[\frac{x-1}{x+1}\right]}{\left[\frac{x+1}{x-1}\right]+\left[\frac{x-1}{x+1}\right]}$
5. $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

★ DÉFI — AMPLIFICATEUR DE SIGNAL

Dans les télécommunications, lorsqu'un signal traverse une série de nœuds amplificateurs répétés, son intensité diminue de manière récursive. Un ingénieur modélise l'efficacité E(x) d'un amplificateur à trois étages par :

$E(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}$, avec $x>0$.

Transformez cette fraction complexe en une seule expression rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$.

RÉFLÉCHIR

Considérez l'énoncé : $\frac{x^2-16}{x-4}=x+4$. S'agit-il d'une identité absolue valable pour tout réel x ? Expliquez.

L'égalité est valable pour x ≠ 4. Le graphe est la droite y = x + 4 privée du point (4, 8) : il présente un trou, souvent masqué par la résolution de l'écran.

1-9

MATHÉMATIQUES

Identités

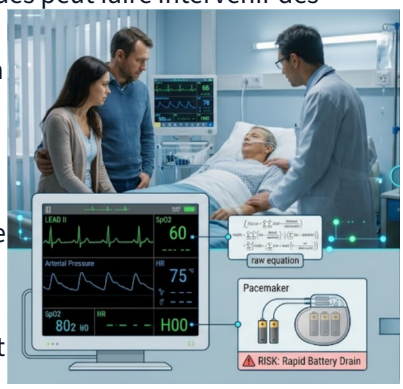
Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Reconnaître une identité algébrique et la distinguer d'une équation.

Concept 4 · Identités et démonstrations

Le traitement numérique de signaux périodiques peut faire intervenir des expressions algébriques comportant de nombreux termes. Pour faciliter les calculs, on cherche des expressions équivalentes plus simples.



Les identités algébriques justifient ces transformations : deux expressions donnent le même résultat pour toute valeur admissible de leur domaine commun. Démontrer une identité consiste à établir cette équivalence, et non à déterminer une inconnue. Simplifier un calcul ne prouve pas à lui seul la validité d'un modèle physique.

Question directrice : Comment vérifier que deux expressions distinctes sont identiquement égales pour toutes les valeurs de leur domaine, et comment transformer un membre sans modifier sa valeur ?

POINT ESSENTIEL !

DÉFINITION

Une égalité vraie pour toute valeur admissible de x dans son domaine de définition est appelée identité en x.

$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ est une identité en x si et seulement si :

$a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Les coefficients des termes de même degré sont égaux dans les deux membres.

MÉTHODE

Pour résoudre un problème d'identité en x :

1. Rangez chaque expression suivant les puissances décroissantes de x.
2. Comparez les coefficients des termes de même degré.
3. Avec des expressions rationnelles, excluez d'abord les valeurs annulant les dénominateurs, puis supprimez ceux-ci.

MISE EN ROUTE

Déterminez les constantes a, b et c pour que les égalités suivantes soient des identités en x.

1. $x^2+6=a(x+1)^2+b(x+1)+c$.
2. $\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$.

Explication

1 — COMPARAISON DES COEFFICIENTS

$x^2+6=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$.

Donc : $1=a, 0=2a+b, 6=a+b+c$.

La résolution du système donne : $a=1, b=-2$ et $c=7$.

Remarque : lorsqu'un terme en x est absent, son coefficient est 0.

2 — SUPPRESSION DES DÉNOMINATEURS

$\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}$.

Pour $x\neq -2$ et $x\neq 3$, multiplions les deux membres par $(x+2)(x-3)$:

$3x+1=a(x-3)+b(x+2)$

$=(a+b)x+(-3a+2b)$.

Donc : $3=a+b$ et $1=-3a+2b$.

La résolution du système donne : $a=1$ et $b=2$.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez les constantes pour que les égalités suivantes soient des identités en x.

1. $x^2-x-3=a(x-1)^2+b(x-1)+c$.
2. $\frac{1}{(2x-1)(x+1)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+1}$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES

Déterminez les constantes a, b et c pour que les égalités suivantes soient des identités en x.

1. $a(x+1)-b(x+5)=8x$.
2. $(x+a)(b+3)=4x+12$.
3. $2x^2+5x+4=(x+1)(ax+b)+c$.
4. $(ax+b)(x+1)=4x^2+cx+1$.
5. $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$.
6. $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-5}=\frac{5x-1}{(x-1)(x-5)}$.
7. $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+3}$.
8. $\frac{3x-8}{3x^2+5x-2}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{3x-1}$.

★ DÉFI — FRACTIONS PARTIELLES

Un toxicologue environnemental étudie l'élimination d'un composé organique dans un écosystème de filtration. L'efficacité f(t), où t est le temps en heures et $t>0$, est modélisée par :

$f(t)=\frac{22t+15}{8t^2+10t+3}$.



Décomposez cette expression sous la forme :

$\frac{a}{2t+1}+\frac{b}{4t+3}$, puis déterminez a et b.

1-10

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'égalités (1)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer la validité d'égalités et d'identités algébriques dans les cas usuels, sans condition préalable.

POINT ESSENTIEL !

Pour démontrer une égalité membre de gauche = membre de droite, simplifiez séparément les deux membres jusqu'à obtenir la même expression.

MISE EN ROUTE

Démontrez les égalités suivantes.

1. $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

2. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

Explication

1 — DÉMONSTRATION

Calculons et simplifions le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.

Membre gauche $=(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2$

$=4xy$.

Nous obtenons la même expression que dans le membre de droite.

Donc $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

2 — DÉMONSTRATION

Calculons et simplifions séparément les deux membres.

Membre gauche $=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\ldots$ (i)

Membre droit = $(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\ldots$ (ii)

D'après (i) et (ii) :

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez les égalités suivantes.

1. $(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2$.
2. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac-bd)^2-(ad-bc)^2$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES — DÉMONTREZ

1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$.
2. $(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$.
3. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$.
4. $(a+2b)^2-4ab=(a-2b)^2+4ab$.
5. $(x^2+1)(y^2+1)=(xy+1)^2+(x-y)^2$.
6. $(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$.

★ DÉFI

Démontrez que :

$(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$.

1-11

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'égalités (2)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer la validité d'égalités et d'identités algébriques dans les cas conditionnels.

POINT ESSENTIEL !

Pour démontrer une égalité soumise à une condition, exprimez l'une des variables de l'équation conditionnelle en fonction des autres, puis substituez cette expression afin d'éliminer la variable.

Exemple : si $x+y=1$, posez $y=1-x$ afin d'éliminer y.

MISE EN ROUTE

Si $a+b+c=0$, démontrez :

$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

Explication — Démonstration

ÉTAPE 1 — ÉLIMINER c DANS LE MEMBRE GAUCHE

De $a+b+c=0$, on déduit : $c=-a-b$... (i).

En remplaçant c dans le membre gauche :

$MG = a^2+b^2+(-a-b)^2$

$= a^2+b^2+a^2+2ab+b^2$

$= 2a^2 + 2ab + 2b^2$ ... (ii).

ÉTAPE 2 — ÉLIMINER c DANS LE MEMBRE DROIT

En remplaçant c dans le membre droit :

$MD = -2\{ab+b(-a-b)+(-a-b)a\}$

$= -2(ab-ab-b^2-a^2-ab)$

$= -2(-a^2-ab-b^2)$

$= 2a^2 + 2ab + 2b^2$ ... (iii).

D'après (ii) et (iii) :

$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$.

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez les égalités suivantes.

1. Si $x+y=1$, alors $x^2+y^2+1=2(x+y-xy)$.
2. Si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez vos réponses.

EXERCICES — DÉMONTREZ

1. Si $x+y=1$, alors $x^2+y^2=1-2xy$.
2. Si $x-y=1$, alors $x^2+y^2=2xy+1$.
3. Si $x+y=1$, alors $x^2-x=y^2-y$.
4. Si $a+b+c=0$, alors a^2+ ca $=b^2+bc$.
5. Si $a+b+c=0$, alors $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$.

★ DÉFI — UNE SOMME CONSTANTE

Trois nombres non nuls a, b et c vérifient $a+b+c=0$. Démontrez que, quels que soient ces nombres, la somme suivante vaut toujours exactement -3 :

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=-3.$

RÉFLÉCHIR

Transformer un seul membre est une méthode sûre pour démontrer une identité. Des transformations réversibles des deux membres sont également valables : pourquoi faut-il vérifier les dénominateurs avant un produit en croix et éviter de supposer vraie l'égalité à démontrer ?

1-12

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'égalités (3)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer la validité d'égalités et d'identités algébriques dans les situations de proportionnalité.

POINT ESSENTIEL !

Une égalité exprimant que deux rapports, ou deux valeurs de rapports, sont égaux — par exemple $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ou x : y : $z=a$: b : c — est appelée proportion.

Pour une condition de la forme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, posez d'abord :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, puis écrivez $a=$ bk et $c=$ dk.

Pour une condition de la forme x : y : $z=a$: b : c, introduisez une constante k et écrivez :

$x=$ ak, $y=$ bk et $z=$ ck.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, démontrez que :

$\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{cd}{c^2+d^2}$.

2. Si x : y : $z=2:3:5$, calculez :

$\frac{2xy+yz+3zx}{x^2+y^2+z^2}$.

MÉTHODE À RETENIR

Toutes les expressions s'entendent pour les valeurs qui rendent leurs dénominateurs non nuls. Utilisez le même coefficient de proportionnalité k pour les grandeurs correspondantes et conservez les exclusions après simplification.

Explication

1 — DÉMONSTRATION D'UNE PROPORTION

Posons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Alors $a =$ bk et $c =$ dk … (i).

En remplaçant a dans le membre gauche :

$$\text{MG} = \frac{bk \cdot b}{(bk)^2 + b^2}$$

$$= \frac{b^2 k}{b^2 k^2 + b^2}$$

$$= \frac{b^2 k}{b^2 (k^2 + 1)}$$

$$= \frac{k}{k^2 + 1} \ \ldots \text{(ii)}.$$

En remplaçant c dans le membre droit :

$$\text{MD} = \frac{dk \cdot d}{(dk)^2 + d^2}$$

$$= \frac{d^2 k}{d^2 k^2 + d^2}$$

$$= \frac{d^2 k}{d^2 (k^2 + 1)}$$

$$= \frac{k}{k^2 + 1} \ \ldots \text{(iii)}.$$

D'après (ii) et (iii) :

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{cd}{c^2 + d^2}.$$

2 — CALCUL À PARTIR D'UN RAPPORT

De x : y : $z = 2 : 3 : 5$, posons :

$x = 2k$, $y = 3k$ et $z = 5k$… (i).

$$\frac{2xy + yz + 3zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 2k \cdot 3k + 3k \cdot 5k + 3 \cdot 5k \cdot 2k}{(2k)^2 + (3k)^2 + (5k)^2}$$

$$= \frac{57k^2}{38k^2}$$

$$= \frac{57}{38}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

REMARQUE

Avant toute transformation, vérifiez que tous les dénominateurs sont non nuls, les restrictions restent valables après substitution et simplification.

À VOUS D'ESSAYER

1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, démontrez : $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$.
2. Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, démontrez : $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$.
3. Si a : b : $c=2:3:4$, calculez : $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 3, puis discutez la réponse.

EXERCICES

1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, démontrez : $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.
2. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, démontrez : $\frac{3a+c}{3b+d}=\frac{2a-c}{2b-d}$.
3. Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, démontrez : $\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2+y^2}{b^2-y^2}$.
4. Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, démontrez : $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}$.
5. Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, démontrez : $\frac{x+2y+3z}{a+2b+3c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$.
6. Si $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, démontrez : $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.
7. Si a : b : $c=3:5:2$, calculez $\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$.
8. Si x : y : $z=2:-3:4$, calculez $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$.
9. Si $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}\neq 0$, calculez $\frac{x^2+5y^2}{x^2+xy+y^2}$.

★ DÉFI — AJUSTEMENT D'UNE SOLUTION CHIMIQUE

Deux solutions contiennent respectivement a grammes de sel dans b grammes d'eau, et c grammes de sel dans d grammes d'eau. Les masses sont positives et $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.



Pour a ≠ b et c ≠ d, démontrez que le rapport de la masse totale à la différence « masse de sel moins masse d'eau » est identique : $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

1-13

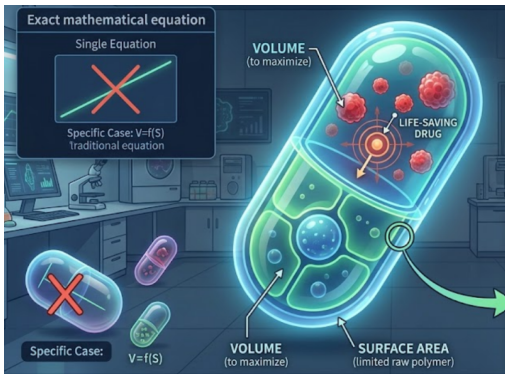
MATHÉMATIQUES

Démonstration d'inégalités (1)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques | Concept 5 — Inégalités

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer la validité d'inégalités algébriques dans différentes situations mathématiques soumises à des conditions.



Imaginez que vous êtes bio-ingénieur et que vous concevez une capsule biodégradable destinée à acheminer un médicament vital directement vers une tumeur. Vous devez maximiser le volume intérieur de la capsule tout en respectant une limite stricte de surface, imposée par la quantité de polymère brut disponible.

Les inégalités permettent d'établir les meilleures limites possibles, de déterminer des valeurs maximales ou minimales et de garantir que la conception respecte toutes les contraintes. L'inégalité arithmético-géométrique (IAG), notamment, constitue un outil essentiel d'optimisation.

QUESTION DIRECTRICE

Comment les techniques algébriques et les propriétés des nombres réels positifs permettent-elles d'établir une borne supérieure ou inférieure, et pourquoi le cas d'égalité représente-t-il la frontière optimale ?

POINT ESSENTIEL !

Pour démontrer que $MG > MD$, calculez $MG - MD$, puis montrez que cette différence est strictement positive.

Si la condition donnée est $a > b$, réécrivez-la sous la forme $a - b > 0$ afin de faire apparaître un facteur positif.

MISE EN ROUTE

Démontrez les inégalités suivantes.

1. Si $a > b$ et $x > y$, démontrez que :

$2(ax + by) > (a + b)(x + y)$.

2. Si $x > 3$ et $y > -5$, démontrez que :

$xy + 5x > 3y + 15$.

Explication

1 — PREMIÈRE DÉMONSTRATION

$MG - MD = 2(ax + by) - (a + b)(x + y)$

$= 2ax + 2by - ax - ay - bx - by$

$= ax - ay - bx + by$

$= a(x - y) - b(x - y)$

$= (a - b)(x - y).$

Comme $a > b$ et $x > y$, alors $a - b > 0$ et $x - y > 0$. Donc $(a - b)(x - y) > 0$, par conséquent :

$2(ax + by) > (a + b)(x + y).$

2 — DEUXIÈME DÉMONSTRATION

$MG - MD = xy + 5x - (3y + 15)$

$= xy + 5x - 3y - 15$

$= x(y + 5) - 3(y + 5)$

$= (x - 3)(y + 5).$

Comme $x > 3$ et $y > -5$, alors $x - 3 > 0$ et $y + 5 > 0$. Donc $(x - 3)(y + 5) > 0$, par conséquent :

$xy + 5x > 3y + 15.$

À VOUS D'ESSAYER

1. Si $a > b$ et $c > d$, démontrez que : $ac + bd > ad + bc$.
2. Si $x > 2$ et $y > 1$, démontrez que : $xy + 2 > x + 2y$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la deuxième question, puis discutez la réponse.

EXERCICES

1. Si $x > y$, démontrez que : $3x - 4y > 2x - 3y$.
2. Si $a > c$ et $b > d$, démontrez que : $ab +$ cd $> ad + bc$.
3. Si $a > 1$ et $b > 1$, démontrez que : $ab + 1 > a + b$.
4. Si $a > b > x > y$, démontrez que : $ax + by > ay + bx$.

★ DÉFI — INÉGALITÉ DE RÉARRANGEMENT

Si $a > b > c > 0$ et $x > y > z > 0$, démontrez que :

$ax + by + cz > ay + bz + cx.$

1-14

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'inégalités (2)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer des inégalités algébriques dans diverses situations mathématiques, sans condition préalable.

POINT ESSENTIEL !

Pour démontrer que $MG \geq MD$, calculez leur différence et montrez que :

$MG - MD \geq 0$.

Pour établir une inégalité valable pour tous les nombres réels, complétez le carré afin d'obtenir une expression de la forme X^2 ou $X^2 + Y^2$.

Dans une inégalité comportant ≥ ou ≤, il faut toujours préciser la condition d'égalité.

Pour tous réels X et Y : $X^2 \geq 0$, avec égalité si $X = 0$, et $X^2 + Y^2 \geq 0$, avec égalité si $X = 0$ et $Y = 0$.

MISE EN ROUTE

Démontrez les inégalités suivantes et déterminez, dans chaque cas, quand l'égalité est réalisée.

1. $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$.

2. $x^2 + y^2 \geq 2(x - y - 1)$.

EXPLICATION 1 — PREUVE

Commençons par $MG - MD$:

$MG - MD = a^2 + 4b^2 - 4ab$

$= a^2 - 4ab + 4b^2$

$= (a - 2b)^2 - 4b^2 + 4b^2$

$= (a - 2b)^2 \geq 0$.

Par conséquent, $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$.

L'égalité est réalisée lorsque a − 2b = 0, c'est-à-dire lorsque $a = 2b$.

EXPLICATION 2 — PREUVE

Commençons par $MG - MD$:

$$MG - MD = x^2 + y^2 - 2(x - y - 1)$$

$$= x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2$$

$$= (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + 2$$

$$= (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 0.$$

Par conséquent, $x^2 + y^2 \geq 2(x - y - 1)$.

L'égalité est réalisée lorsque $x - 1 = 0$ et y + 1 = 0, c'est-à-dire lorsque $x = 1$ et $y = -1$.

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez les inégalités suivantes et déterminez quand l'égalité est réalisée.

1. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.
2. $a^2 + 5b^2 \geq 4ab$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Démontrez les inégalités suivantes. Déterminez également quand l'égalité est réalisée, sauf dans la question 5.

1. $9x^2 \geq y(6x - y)$.
2. $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$.
3. $(2x - y)^2 \geq 3(x^2 - y^2)$.
4. $(2a + 3b)^2 \geq 12ab$.
5. $x^2 + 2 > 2x$.
6. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 \geq 0$.

★ DÉFI — JAMAIS NÉGATIF



Vous êtes analyste de données dans une usine qui fabrique des composants de drones de précision à l'aide de deux machines X et Y. En raison de l'usure mécanique, des dérives d'étalonnage et des pics de consommation d'énergie, le coût journalier des frais généraux, en dollars, dépend des réglages x et y selon le modèle :

Coût des frais généraux $= x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43$.

Démontrez que, quels que soient les réglages x et y choisis, les frais généraux de l'usine ne peuvent jamais être négatifs.

1-15

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'inégalités (3)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Démontrer des inégalités algébriques dans différentes situations mathématiques, notamment celles qui comportent des racines.

POINT ESSENTIEL !

Pour démontrer une inégalité comportant des racines carrées, calculez la différence des carrés :

$(MG)^2 - (MD)^2$.

Utilisez ensuite les propriétés suivantes :

• Si MG ≥ 0 et MD ≥ 0, alors MG ≥ MD ⇔ MG² ≥ MD². La même équivalence vaut avec >.

• Si $a > 0$, alors $\sqrt{a} > 0$.

MISE EN ROUTE

Démontrez les inégalités suivantes. Pour la première, déterminez également quand l'égalité est réalisée.

1. Si $a > 0$ et $b > 0$: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

2. Si $a > 0$ et $b > 0$: $\sqrt{a} + 4\sqrt{b} > \sqrt{a+16b}$.

EXPLICATION 1 — PREUVE

Calculons $(MG)^2 - (MD)^2$:

$$\left[\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right]^2 - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$= \left[\frac{a-b}{2}\right]^2 \geq 0.$$

Ainsi, $(MG)^2 \geq (MD)^2$. Or $a > 0$ et $b > 0$, donc $MG > 0$ et $MD > 0$. Par conséquent :

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

L'égalité est réalisée lorsque $\frac{a-b}{2} = 0$, c'est-à-dire lorsque $a = b$.

EXPLICATION 2 — PREUVE

Calculons $(MG)^2 - (MD)^2$:

$$\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2 - \left[\sqrt{a+16b}\right]^2$$
$$= a + 8\sqrt{ab} + 16b - (a+16b)$$
$$= 8\sqrt{ab} > 0.$$

Ainsi, $\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2 > \left[\sqrt{a+16b}\right]^2$. Comme $a>0$ et $b>0$, les deux membres sont positifs. Par conséquent :

$$\sqrt{a}+4\sqrt{b} > \sqrt{a+16b}\,.$$

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez les inégalités suivantes. Pour la première, déterminez également si l'égalité peut être réalisée.

1. Si $a>0$ et $b>0$: $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$
2. Si $a>0$ et $b>0$: $2\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{4a+b}\,.$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Démontrez les inégalités suivantes. Pour les questions 1 à 3, déterminez également si l'égalité peut être réalisée.

1. Si $a>0$: $2+a \geq \sqrt{3+6a}\,.$
2. Si $a>0$ et $b>0$: $\sqrt{2(a^2+b^2)} \geq a+b.$
3. Si $a>0$ et $b>0$: $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$
4. Si $a>0$ et $b>0$: $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}\,.$
5. Si $a>0$ et $b>0$: $2\sqrt{a}+3\sqrt{b} > \sqrt{4a+9b}\,.$
6. Si $a>b>0$: $\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}\,.$

★ DÉFI — UNE INÉGALITÉ AVEC DES RACINES

Si $a>b$, où a et b sont deux nombres positifs, démontrez que :

$$\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

1-16

MATHÉMATIQUES

Démonstration d'inégalité (4) (inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques)

Chapitre 1 — Démonstrations algébriques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique afin de démontrer des inégalités et de déterminer des valeurs maximales.

POINT ESSENTIEL !

Inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique (IAG) :

si $a > 0$ et $b > 0$, alors

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, soit encore $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

L'égalité est réalisée lorsque $a = b$.

L'inégalité IAG est particulièrement utile lorsque le produit des termes se simplifie en une constante. Exemple : $a + \frac{1}{a}$, car $a \times \frac{1}{a} = 1$.

MISE EN ROUTE

Démontrez les inégalités suivantes et déterminez quand l'égalité est réalisée.

1. Si $a > 0$ et $b > 0$: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.
2. Si $a > 0$ et $b > 0$: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

EXPLICATION 1 — PREUVE PAR L'IAG

Comme $\frac{b}{a} > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$, appliquons l'inégalité IAG :

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= 2\sqrt{1}$$

$$= 2.$$

Par conséquent, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.

L'égalité est réalisée lorsque $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$. En multipliant par ab, on obtient $b^2 = a^2$. Comme $a > 0$ et $b > 0$, alors $a = b$. Ainsi, l'égalité est réalisée lorsque $a = b$.

EXPLICATION 2 — PREUVE

$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)+a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)+b\cdot\left(\frac{1}{a}\right)+b\cdot\left(\frac{1}{b}\right)$

$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ldots$ (i).

Comme $\frac{a}{b}>0$ et $\frac{b}{a}>0$, l'inégalité IAG donne :

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)}=2.$

En ajoutant 2 aux deux membres : $2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4.$

D'après (i), $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4.$

L'égalité est réalisée lorsque $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$. En multipliant par ab, $a^2=b^2$, puisque a et b sont positifs, $a=b$.

À VOUS D'ESSAYER

Démontrez les inégalités suivantes et déterminez quand l'égalité est réalisée.

1. Si $a>0$ et $b>0$: $\frac{b}{3a}+\frac{12a}{b}\geq 4.$
2. Si $a>0$ et $b>0$: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)\geq 16.$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la rubrique « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

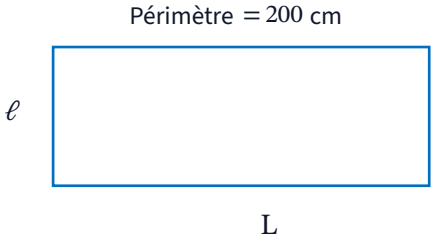
EXERCICES

Démontrez les inégalités suivantes et déterminez quand l'égalité est réalisée.

1. Si $a>0$: $a+\frac{4}{a}\geq 4.$
2. Si $a>0$ et $b>0$: $3ab+\frac{4}{ab}\geq 4\sqrt{3}.$
3. Si $a>0$ et $b>0$: $a+b+\frac{9}{a+b}\geq 6.$
4. Si $x>0$: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)\geq 9.$
5. Si $a>0$ et $b>0$: $(a+8b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 18.$
6. Si $a>0$ et $b>0$: $\left(a+\frac{3}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)\geq 12.$

★ DÉFI — AIRE MAXIMALE

Un rectangle a un périmètre de 200 cm. En utilisant la relation entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, démontrez que l'aire du rectangle est inférieure ou égale à 2 500 cm².



RÉFLÉCHIR

Nous avons démontré dans cette leçon que l'inégalité IAG, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, est toujours valable à condition que les nombres soient non négatifs : a, $b \geq 0$.

Question de réflexion — Que se passe-t-il si l'on enfreint cette condition et que l'on applique l'inégalité à des nombres négatifs ? Prenons $a = -2$ et $b = -8$.

1. Calculez leur moyenne arithmétique (MA).

2. Calculez $\sqrt{ab}$. Son existence suffit-elle à appliquer l'IAG à ces deux nombres négatifs ?

3. Le signe ≥ conserve-t-il un sens et l'inégalité reste-t-elle valable ?

Pour a = −2 et b = −8, $\sqrt{ab}$ existe, mais l'IAG ne s'applique pas : elle exige a ≥ 0 et b ≥ 0. Expliquez pourquoi la définition des domaines est essentielle.

2-1

MATHÉMATIQUES

Suites et termes généraux

Chapitre 2 — Suites | Concept 1 — Suites arithmétiques

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer le terme général d'une suite et en déduire certains termes.

Imaginez que vous êtes entraîneur personnel et que vous concevez un programme de récupération pour un athlète blessé. La première semaine, il court 10 minutes par jour, puis la durée augmente exactement de 3 minutes chaque semaine : 13 minutes, puis 16, puis 19, etc. Cette augmentation linéaire constante constitue une suite arithmétique.



Dans un modèle à accroissement constant, chaque étape ajoute la même quantité. Les formules des suites arithmétiques permettent alors de calculer un terme éloigné ou une somme cumulée sans additionner les termes un à un.

QUESTION DIRECTRICE

Comment modéliser mathématiquement des variations additives à différence constante afin de déterminer à la fois des termes particuliers et des sommes cumulées dans une suite ?

POINT ESSENTIEL !

• Une liste de nombres disposés dans un ordre déterminé est appelée suite, chacun de ses nombres est un terme. Les termes sont nommés premier terme, deuxième terme, troisième terme, etc. Le terme situé à la position n est appelé n-ième terme.

• Pour écrire une suite de façon générale, on associe le numéro du terme à une même lettre :

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, cette suite se note également $\{a_n\}$.

Exemple — $\{a_n\}$: $2, 4, 8, 16, \ldots, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, \ldots$

• Lorsque a_n est exprimé en fonction de n, les substitutions $n = 1, 2, 3, \ldots$ donnent $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Cette expression en fonction de n est appelée terme général de la suite $\{a_n\}$.

Exemple — $a_n = -2n + 7$:

$a_1 = -2 \times 1 + 7 = 5, a_2 = -2 \times 2 + 7 = 3, a_3 = -2 \times 3 + 7 = 1.$

Remarque : a_1 est le premier terme, a_n est le n-ième terme, $-2n + 7$ est un terme général.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Le terme général de la suite $\{a_n\}$ est $a_n = \frac{n}{n+1}$. Déterminez les trois premiers termes.

2. Déduisez le terme général des suites suivantes :

(a) $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$ (b) $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

(c) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \ldots$

EXPLICATION 1

Remplaçons n par 1, 2 et 3 dans $a_n = \frac{n}{n+1}$:

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$,

$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$,

$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$.

EXPLICATION 2 — RECHERCHER LA RÉGULARITÉ

(a) Chaque terme est le carré de (numéro du terme − 1). Ainsi : $a_n = (n-1)^2$.

(b) Pour une suite à signes alternés, étudions séparément les signes et les valeurs. Le premier terme est positif et les signes alternent : le facteur de signe est $(-1)^{n-1}$. Les valeurs sont 2 fois le numéro du terme : 2n. Ainsi : $a_n = (-1)^{n-1} \times 2n$.

Remarque — Si le premier terme était négatif et les signes alternaient, le facteur serait $(-1)^n$.

(c) Pour une suite de fractions, étudions séparément numérateur et dénominateur. Le dénominateur est $2\times$ numéro du terme -1, soit $2n-1$, le numérateur est n. Ainsi : $a_n = \frac{n}{2n-1}$.

Remarque — Les nombres pairs s'écrivent 2n et les nombres impairs $2n-1$.

À VOUS D'ESSAYER

1. Pour chaque terme général, déterminez les trois premiers termes :

(a) $a_n = 2n-3$, (b) $a_n = 2\times 3^n$, (c) $a_n = n^2 - 7n$, (d) $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

2. Déduisez le terme général de chaque suite :

(a) $0, 1, 8, 27, 64, \ldots$, (b) $-3, 6, -9, 12, -15, \ldots$

(c) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$, (d) $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe pour résoudre cette rubrique, puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Pour chaque terme général, déterminez les trois premiers termes de la suite :

(a) $a_n = 5n - 8$, (b) $a_n = -3n + 1$, (c) $a_n = -2n - 4$, (d) $a_n = 3^n - 1$,

(e) $a_n = (-3)^n$, (f) $a_n = 3 \times (-2)^n$, (g) $a_n = n^2 - 1$, (h) $a_n = n^2 + n + 1$,

(i) $a_n = n^2 + 2n + 4$, (j) $a_n = \frac{1}{3n-2}$, (k) $a_n = \frac{2n}{n+3}$, (l) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$.

2. Déduisez le terme général de chacune des suites suivantes :

(a) 0, 2, 4, 6, 8, …

(b) 1, 4, 9, 16, 25, …

(c) 0, 3, 6, 9, 12, …

(d) $-5, 10, -15, 20, -25, \ldots$

(e) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

(f) $-1, 4, -7, 10, -13, \ldots$

(g) $7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2, \ldots$

(h) 4, 9, 14, 19, 24, …

(i) 6, 13, 20, 27, 34, …

(j) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

(k) $1 \times 3, 2 \times 9, 3 \times 27, 4 \times 81, 5 \times 243, \ldots$

★ DÉFI

Considérez la suite :

$1 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{3}, 3 \times \frac{1}{4}, 4 \times \frac{1}{5}, 5 \times \frac{1}{6}, \ldots$

Déduisez son terme général, puis déterminez son 20e terme.

2-2

MATHÉMATIQUES

Suite arithmétique (1)

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

• Une suite obtenue en ajoutant successivement un nombre constant d à chaque terme précédent est appelée suite arithmétique, le nombre d est appelé raison.

Exemple — Suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3 :

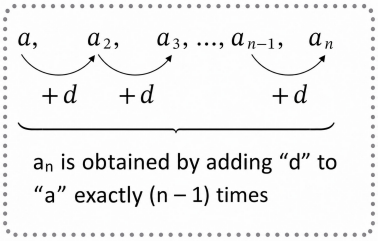
1, 4, 7, 10, 13, … (on ajoute chaque fois 3).

• Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme a et de raison d est :

$a_n = a + (n-1)d$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général d'une suite arithmétique et déterminer certains de ses termes.



MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le premier terme et la raison de chaque suite :

(a) 2, 5, 8, 11, ..., (b) 3, −2, −7, −12, −17, ...

2. Les suites suivantes sont arithmétiques. Déterminez leur raison et les nombres A et B :

(a) A, 2, $-1, B$, ..., (b) 13, A, B, −2, ...

3. Pour la suite $\{a_n\}$ de premier terme 8 et de raison -6, déterminez le terme général puis le 20e terme.

EXPLICATIONS 1 ET 2

1. (a) premier terme : 2, raison : 3.

(b) premier terme : 3, raison : -5.

2. (a) A, 2, $-1, B, \ldots$: chaque terme diminue de 3.

raison : -3, $A = 5$, $B = -4$.

(b) 13, A, B, −2, ... : entre le premier et le quatrième terme, la variation totale est -15, soit $3d = -15$. Donc $d = -5$.

raison : -5, $A = 8$, $B = 3$.

EXPLICATION 3

Remplaçons $a = 8$ et $d = -6$ dans $a_n = a + (n-1)d$:

$a_n = 8 + (n-1)(-6)$

$= 8 - 6n + 6$

$= -6n + 14.$

Pour le 20e terme, remplaçons n par 20 :

$a_{20} = -6 \times 20 + 14 = -106.$

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe pour résoudre cette rubrique, puis discutez les réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez le premier terme et la raison :

(a) 1, 5, 9, 13, 17, …, (b) 23, 19, 15, 11, 7, …

2. Ces suites sont arithmétiques. Déterminez la raison, A et B :

(a) 2, 9, A, B, …, (b) A, 17, B, 5, …

3. Déterminez le terme général et le 7^{e} terme :

(a) premier terme 4, raison 3, (b) premier terme 2, raison -3.

EXERCICES — PARTIE 1

1. Déterminez le premier terme et la raison des suites suivantes :

(a) $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

(b) $-13, -9, -5, -1, 3, \ldots$

(c) $-2, 1, 4, 7, 10, \ldots$

(d) $10, 7, 4, 1, -2, \ldots$

(e) $6, \frac{16}{3}, \frac{14}{3}, 4, \frac{10}{3}, \ldots$

(f) $-4, -\frac{9}{2}, -5, -\frac{11}{2}, -6, \ldots$

EXERCICES — PARTIE 2

2. Les suites suivantes sont arithmétiques. Déterminez la raison et les nombres A, B et, le cas échéant, C :

(a) 8, 15, A, B, …, (b) 7, 13, A, B, …

(c) A, 9, 4, B, …, (d) A, 15, B, 9, …

(e) 11, A, B, 20, …, (f) 17, A, B, 5, C, …

3. Déterminez le terme général et le 7^{e} terme :

(a) premier terme 5, raison 4,

(b) premier terme -2, raison 3,

(c) premier terme 10, raison -3,

(d) premier terme $-\frac{1}{2}$, raison $-\frac{1}{2}$.

4. Déterminez le terme général et le 10^{e} terme :

(a) premier terme -7, raison 3,

(b) premier terme -2, raison -3,

(c) premier terme 7, raison $\frac{1}{2}$,

(d) premier terme $\frac{2}{3}$, raison $-\frac{1}{3}$.

★ DÉFI

Dans une suite arithmétique, la somme des 3^{e} et 7^{e} termes vaut 38, et le rapport du 4^{e} terme au 12^{e} terme vaut $\frac{2}{5}$. Déterminez le premier terme de cette suite et sa raison.

2-3

MATHÉMATIQUES

Suite arithmétique (2)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général d'une suite arithmétique et déterminer certains de ses termes.

POINT ESSENTIEL !

• Le terme général d'une suite arithmétique $\{a_n\}$ est : $a_n = a + (n-1)d$.

• Pour déterminer ce terme général, on commence par trouver le premier terme a et la raison d.

• Lorsque a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$2b = a + c$.

En effet, $b = a + d$ et $b = c - d$, donc

$2b = (a + d) + (c - d) = a + c$.

MISE EN ROUTE

Déterminez le terme général de la suite arithmétique $\{a_n\}$ dont le 3e terme est 10 et le 8e terme est 50.

2. Une suite arithmétique a pour raison 4 et pour 8e terme 33.

(a) Déterminez le rang du terme égal à 113.

(b) Déterminez le premier terme supérieur à 500.

3. Les trois nombres x , $6, x^2$ forment, dans cet ordre, une suite arithmétique. Déterminez x.

EXPLICATION 1

Posons $a_n = a + (n-1)d$.

Comme $a_3 = 10$: $10 = a + 2d$... (i).

Comme $a_8 = 50$: 50 = a + 7d ... (ii).

La résolution du système formé par (i) et (ii) donne $a = -6$ et $d = 8$.

Ainsi : $a_n = -6 + (n-1) \times 8 = 8n - 14$.

EXPLICATION 2

Posons $a_n = a + (n-1)d$. Comme $d = 4$ et $a_8 = 33$:

$33 = \text{a} + (8-1) \times 4$, d'où $a = 5$.

Ainsi : $a_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$.

(a) Cherchons n tel que $a_n = 113$: $113 = 4n + 1$, donc $n = 28$. Il s'agit du 28e terme.

(b) Cherchons le plus petit entier naturel n tel que $a_n > 500$:

$4n + 1 > 500$, donc $n > \frac{499}{4} = 124,75$. Il s'agit donc du 125e terme.

EXPLICATION 3

Puisque x, 6 et x^2 forment une suite arithmétique dans cet ordre :

$2 \times 6 = x + x^2$.

La résolution donne $x = -4$ ou $x = 3$.

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez cette rubrique en groupe, puis discutez les réponses.

1. Déterminez le terme général des suites arithmétiques suivantes :

(a) premier terme -5, 17e terme 75,

(b) raison 3, 16e terme 81,

(c) 6e terme 2, 15e terme -25.

2. Une suite a pour premier terme 1 et raison 3.

(a) Déterminez le rang du terme 40.

(b) Déterminez le premier terme supérieur à 100.

3. Les nombres x^2, x et -8 forment, dans cet ordre, une suite arithmétique. Déterminez x.

EXERCICES

1. Déterminez le terme général de chaque suite arithmétique :

(a) premier terme 6, 4^{e} terme 18,

(b) premier terme 20, 8^{e} terme -1,

(c) premier terme -8, 8^{e} terme 55,

(d) premier terme -18, 10^{e} terme -63,

(e) raison 2, 8^{e} terme 4,

(f) raison -4, 5^{e} terme -7,

(g) raison -7, 6^{e} terme -24,

(h) raison $\frac{2}{5}$, 30^{e} terme $\frac{23}{5}$,

(i) 4^{e} terme 14, 10^{e} terme 62,

(j) 3^{e} terme 30, 10^{e} terme 2,

(k) 10^{e} terme 49, 23^{e} terme 10,

(l) 3^{e} terme 6, 10^{e} terme 62.

2. Une suite a pour raison -5 et pour 13^{e} terme -7.

(a) Déterminez le rang du terme -52.

(b) Déterminez le premier terme inférieur à −300.

3. Dans une suite arithmétique, $a_{10} = -20$ et $a_{20} = -50$.

(a) Déterminez le rang du terme -110.

(b) Déterminez le premier terme inférieur à −500.

4. Les nombres a , 6 et 2a forment une suite arithmétique. Déterminez a.

5. Les nombres $-3, x$ et x^2 forment une suite arithmétique. Déterminez x.

★ DÉFI

Les quatre nombres 2, x, y et z forment, dans cet ordre, une suite arithmétique.
De plus, 2x, $y + 1$ et $z - y$ forment aussi, dans cet ordre, une suite arithmétique.
Déterminez x, y et z.

2-4

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite arithmétique (1)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général et des termes particuliers d'une suite arithmétique, puis en déterminer la somme.

POINT ESSENTIEL !

• Dans une suite comportant n termes, n est appelé nombre de termes et le dernier terme est noté ℓ.

Soit S_n la somme du premier au n^{ième} terme d'une suite arithmétique.

Si le premier terme est a, le dernier terme ℓ et le nombre de termes n :

$S_n = \frac{n(a+\ell)}{2}$.

Si le premier terme est a, la raison d et le nombre de termes n :

$S_n = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$.

Cette formule s'obtient en remplaçant ℓ par

$a+(n-1)d$.

• Lorsque n est inconnu, on le détermine d'abord à l'aide de $\ell = a+(n-1)d$.

MISE EN ROUTE

1. Calculez les sommes suivantes :

(a) S_7 si $a=8, \ell=22$ et $n=7$.

(b) S_n si $a=2$, $d=3$ et $\ell=47$.

(c) S_{13} si $a=20, d=-5$ et $n=13$.

(d) S_n, du premier au n^{ième} terme, si $a=1$ et $d=4$.

2. Pour la suite 90, 84, 78, …, calculez la somme du 10^{e} au 20^{e} terme.

EXPLICATION 1

(a) Puisque $a = 8, \ell = 22$ et $n = 7$:

$S_7 = \frac{7(8+22)}{2} = 105.$

(b) Déterminons d'abord n. Comme $a = 2, d = 3$ et $\ell = 47$:

$47 = 2 + (n-1) \times 3$, donc $n = 16.$

$S_{16} = \frac{16(2+47)}{2} = 392.$

(c) Puisque $a = 20, d = -5$ et $n = 13$:

$S_{13} = \frac{13[2 \times 20 + (13-1)(-5)]}{2} = -130.$

(d) Puisque $a = 1$ et $d = 4$:

$S_n = \frac{n[2 \times 1 + (n-1) \times 4]}{2}$

$= \frac{n(4n-2)}{2} = 2n^2 - n.$

EXPLICATION 2

La somme demandée est $S_{20} - S_9$.

Puisque $a = 90$ et $d = -6$:

$S_{20} = \frac{20[2 \times 90 + 19(-6)]}{2} = 660,$

$S_9 = \frac{9[2 \times 90 + 8(-6)]}{2} = 594.$

Ainsi, la somme du 10^e au 20^e terme vaut $660 - 594 = 66.$

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez cette rubrique en groupe, puis discutez les réponses.

1. Calculez :

(a) S_{10} si $a = 7, \ell = 13$ et $n = 10.$

(b) S_n si $a = 5, d = 3$ et $\ell = 44.$

(c) S_{12} si $a = -6, d = 3$ et $n = 12.$

(d) S_n si $a = 2$ et $d = -3.$

À VOUS D'ESSAYER — SUITE

2. Une suite arithmétique a pour premier terme 48 et pour raison -2. Calculez la somme du 20^{e} au 30^{e} terme.

EXERCICES

Calculez les sommes suivantes :

(a) $S_{10} : a = 3, \ell = 21, n = 10,$

(b) $S_{8} : a = 5, \ell = 33, n = 8,$

(c) $S_{10} : a = 2, \ell = 29, n = 10,$

(d) $S : a = 3, d = 4, \ell = 75,$

(e) $S : a = 2, d = 5, \ell = 57,$

(f) $S : a = 4, d = 3, \ell = 100,$

(g) $S_{15} : a = 10, d = -3, n = 15,$

(h) $S_{11} : a = -4, d = 4, n = 11,$

(i) $S_{18} : a = 3, d = 2, n = 18,$

(j) $S_{n} : a = 0, d = 5,$

(k) $S_{n} : a = 3, d = -4,$

(l) $S_{n} : a = -4, d = -2.$

2. Pour la suite $-9, -3, 3, \ldots$, calculez la somme du 11^{e} au 20^{e} terme.

3. Une suite a pour premier terme -53 et raison 4. Calculez la somme du 10^{e} au 25^{e} terme.

4. Pour la suite 74, 69, 64, …, calculez la somme du 8e au 18e terme.

★ DÉFI

Pour la suite arithmétique 94, 89, 84, …, calculez la somme des termes de rang impair, du premier au 11^{e} terme.

2-5

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite arithmétique (2)

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

• Utilisez les suites arithmétiques dans les problèmes portant sur les sommes de nombres naturels ou de multiples.

• Pour une suite arithmétique allant du premier au n ème terme :

si a est le premier terme, ℓ le dernier et n le nombre de termes, $S_n = \frac{n(a+\ell)}{2}$,

si a est le premier terme, d la raison et n le nombre de termes, $S_n = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$.

• Si n est inconnu, déterminez-le d'abord à l'aide de $\ell = a + (n-1)d$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général et des termes particuliers d'une suite arithmétique, puis sa somme dans des problèmes de nombres naturels.

MISE EN ROUTE

Calculez les sommes suivantes :

1. Les nombres naturels de 1 à 100.
2. Les nombres naturels de 101 à 200.
3. Les multiples de 3 parmi les nombres naturels à deux chiffres.

EXPLICATIONS 1 ET 2

1. La somme demandée est $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. C'est une suite arithmétique de premier terme 1, de dernier terme 100 et de 100 termes :

$1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100(1+100)}{2} = 5050.$

2. La somme demandée est $101 + 102 + 103 + \ldots + 200$. C'est une suite arithmétique de premier terme 101, de dernier terme 200 et de 100 termes :

$101 + 102 + \ldots + 200 = \frac{100(101+200)}{2} = 15050.$

Remarque — Il y a 100 nombres naturels de 101 à 200.

EXPLICATION 3

La somme demandée est $12 + 15 + 18 + \ldots + 99$. Le premier terme vaut 12, la raison 3 et le dernier terme 99.

Déterminons d'abord n : $99 = 12 + (n-1) \times 3$, donc $n = 30$.

Ainsi : $12 + 15 + \ldots + 99 = \frac{30(12+99)}{2} = 1665$.

À VOUS D'ESSAYER

Calculez :

1. La somme des nombres naturels de 1 à 200.
2. La somme des nombres naturels de 201 à 300.
3. La somme des nombres naturels à deux chiffres multiples de 5.
4. La somme des nombres naturels à deux chiffres qui donnent un reste de 3 lorsqu'ils sont divisés par 5.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez cette rubrique en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES

Calculez :

1. La somme des nombres naturels de 1 à 150.
2. La somme des nombres naturels de 81 à 150.
3. La somme des nombres naturels de 301 à 400.
4. La somme des nombres naturels à deux chiffres.
5. La somme des nombres impairs à deux chiffres.
6. La somme des multiples de 4 de 1 à 100.
7. La somme des nombres naturels de 1 à 100 qui donnent un reste de 1 dans la division par 4.
8. La somme des multiples de 6 de 10 à 100.
9. La somme des nombres naturels de 10 à 100 qui ne sont pas divisibles par 6.

★ DÉFI

Calculez la somme des nombres de 1 à 100 qui ne sont pas divisibles par 4.

2-6

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite arithmétique (3)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer la somme d'une suite arithmétique et déterminer son nombre de termes.

POINT ESSENTIEL !

• Pour une suite arithmétique, $S_n = \frac{n(a+\ell)}{2} = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$.

• Pour une suite arithmétique de raison négative, la somme partielle augmente tant que le terme ajouté est positif, reste constante si ce terme est nul, puis diminue lorsque les termes deviennent négatifs.

Exemple — Si a = 11 et d = −3 : 11, 8, 5, 2, −1, −4, … Le maximum est atteint pour n = 4 : $S_4 = 11 + 8 + 5 + 2 = 26$.

MISE EN ROUTE

1. Une suite arithmétique a pour premier terme 4 et raison 3. Déterminez combien de termes, à partir du premier, ont une somme égale à 50.
2. Déterminez le terme général d'une suite arithmétique dont le premier terme vaut -60 et la somme des 15 premiers termes vaut -60.
3. Une suite a pour premier terme 65 et raison -4. Déterminez le nombre de termes donnant la somme maximale, puis cette somme.

EXPLICATION 1

Supposons que la somme des n premiers termes, avec $a = 4$ et $d = 3$, vaut 50 :

$50 = \frac{n[2\times 4 + (n-1)\times 3]}{2}$.

On obtient $3n^2 + 5n - 100 = 0$, d'où $n = 5$ ou $n = -\frac{20}{3}$. Comme n est naturel, la réponse est 5 termes.

EXPLICATION 2

Soit d la raison. Puisque $a = -60$ et $S_{15} = -60$:

$-60 = \frac{15[2(-60) + 14d]}{2}$.

On obtient $d = 8$. Ainsi : $a_n = -60 + (n-1)\times 8 = 8n - 68$.

EXPLICATION 3

Le terme général est $a_n = 65 + (n-1)(-4) = -4n + 69$.

Résolvons $-4n + 69 > 0$: $n < \frac{69}{4} = 17,25$. Les termes du premier au 17e sont donc positifs, et ceux à partir du 18e sont négatifs. La somme est maximale pour $n = 17$:

$S_{17} = \frac{17[2\times 65 + 16(-4)]}{2} = 561$.

ERREUR FRÉQUENTE

— Cherchez le dernier terme positif. Si le terme suivant est nul, les deux sommes partielles consécutives ont le même maximum.

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

1. Si $a = 17$ et $d = -2$, déterminez combien de termes ont une somme égale à −63.
2. Si $a = 8$ et $S_{13} = -130$, déterminez le terme général.
3. Si $a = 70$ et $d = -4$, déterminez le rang donnant la somme maximale et cette somme.
4. Déterminez le terme général si $S_{10} = 10$ et $S_{20} = 40$.

EXERCICES

1. Si $a = 3$ et $d = 2$, déterminez n tel que $S_n = 63$.
2. Si $a = 24$ et $d = -4$, déterminez n tel que $S_n = -28$.
3. Déterminez le terme général si $a = 4$ et $S_6 = 114$.
4. Si $a = 20$ et $d = -6$, déterminez n donnant la somme maximale, puis cette somme.
5. Si $a = 126$ et $d = -13$, déterminez n donnant la somme maximale, puis cette somme.
6. Déterminez le terme général si $a_3 = 10$ et $S_{10} = 175$.
7. Déterminez le terme général si $S_6 = 3$ et $S_{10} = 65$.
8. Déterminez le terme général si $S_{20} = 400$ et $S_{30} = 900$.

★ DÉFI

Le 15^{e} terme d'une suite arithmétique vaut 33 et le 50^{e} terme vaut 103. Calculez la somme de ses 79 premiers termes.

RÉFLÉCHIR

Si le niveau d'eau d'un lac baisse chaque jour d'une quantité fixe, comment la compréhension des suites arithmétiques permet-elle de prévoir le moment où le lac sera vide ?

2-7

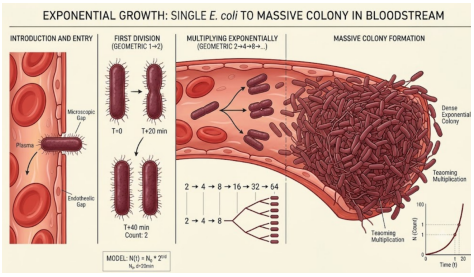
MATHÉMATIQUES

Suites géométriques (1)

Chapitre 2 — Suites

Concept 2. Suites géométriques

Dans un modèle idéal, une population de bactéries E. coli double toutes les 20 minutes : 1, 2, 4, 8, … Ce modèle géométrique suppose des conditions constantes et des ressources illimitées, il ne décrit pas indéfiniment une population réelle.



Question d'orientation : Comment les processus avec de petites valeurs de départ s'intensifient-ils rapidement, et comment pouvons-nous prédire mathématiquement leur impact cumulatif au fil du temps ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général d'une suite géométrique, et déterminer certains de ses termes.

POINT ESSENTIEL !

Une suite obtenue en multipliant successivement chaque terme précédent par un nombre constant r est appelée une suite géométrique, et le nombre constant r est appelé la raison.

Exemple : Une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2

1 → (fois 2) → 2 → (fois 2) → 4 → (fois 2) → 8 → (fois 2) → 16, ...

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r est $a_n = ar^{n-1}$

$$\underbrace{a, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, a_{n-1}, \quad a_n}_{\times r \quad \times r \quad \times r}$$

Multiplying a by r, $(n-1)$ times results in a_n

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n).

(a) Le premier terme est 2, la raison est 3.

(b) 5, 10, 20, 40, ...

(c) -4, 6, -9, $\frac{27}{2}$, ...

La suite suivante est une suite géométrique. Trouvez la raison et les nombres qui manquent dans la suite ci-dessous.

a, 24 , 12 , b, ...

Explication

1. (a) $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

(b) Soit r la raison. Puisque le premier terme est 5 et le 2e terme est 10 :

$5r = 10$

$r = 2$.

Par conséquent, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 2 : $a_n = 5 \times 2^{n-1}$.

(c) Soit r la raison. Puisque le premier terme est -4 et le 2e terme est 6 :

$-4r = 6$

$r = \frac{-3}{2}$

Par conséquent, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de premier terme -4 et de raison $\frac{-3}{2}$:

$a_n = -4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

2. Soit r la raison requise. A, 24, 12, B, ...

$24r = 12$

$r = \frac{1}{2}$.

Puisque A multiplié par $\frac{1}{2}$.devient 24 : $24 : \frac{1}{2}. = 48$.

Puisque 12 multiplié par $\frac{1}{2}$.devient B : $12 \times \frac{1}{2}. = 6$.

Par conséquent, Raison = $\frac{1}{2}, A = 48, B = 6$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n).

(a) Le premier terme est 3, la raison est 4.

(b) Le premier terme est 5, la raison est -2.

(c) Le premier terme est 8, la raison est $-\frac{1}{3}$.

(d) 2, 6, 18, 54, ...

(e) -8, 12, -18, 27, ...

(f) 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, ...

La suite suivante est géométrique. Déterminez la raison ainsi que les valeurs de A et B.

A, -18, 6, B, ...

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n).

(a) Le premier terme est 5, la raison est 2.

(b) Le premier terme est 2, la raison est 5.

(c) Le premier terme est 7, la raison est 4.

(d) Le premier terme est 2, la raison est -3.

(e) Le premier terme est 3, la raison est -5.

(f) Le premier terme est 4, la raison est -2.

(g) Le premier terme est 4, la raison est $\frac{1}{3}$.

(h) Le premier terme est 3, la raison est $-\frac{1}{2}$.

(i) Le premier terme est 6, la raison est $\frac{1}{2}$.

(j) 3, 6, 12, 24, ...

(k) 2, -6, 18, -54, ...

(l) 5, -10, 20, -40, ...

(m) 48, 24, 12, 6, ...

(n) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{16}$, ...

(o) $8, 16\sqrt{2}, 64, 128\sqrt{2}, \ldots$

(p) $3, -\frac{15}{2}, \frac{75}{4}, -\frac{375}{8}, \ldots$

(q) $9, -3\sqrt{3}, 3, -\sqrt{3}, \ldots$

(r) $5, -\frac{10}{3}, \frac{20}{9}, -\frac{40}{27}, \ldots$

Les suites suivantes sont géométriques. Déterminez la raison ainsi que les valeurs de A et B.

(a) A, -3, 9, B, ...

(b) $\frac{1}{9}$, A, 1, B, ...

(c) A, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, B, ...

★ Défi

Dans une suite géométrique croissante, si $a_3 + a_5 = 80$ et $a_4 = 24$, trouvez a_7.

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

2-8

MATHÉMATIQUES

Suites géométriques (2)

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r est $a_n = ar^{n-1}$

Si a, b, c sont trois termes géométriques consécutifs, alors $b^2 = ac$. Si b ≠ 0, la réciproque est vraie. Si b = 0, il faut c = 0 : (a, 0, 0) convient, mais (0, 0, c) avec c ≠ 0 ne convient pas.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général d'une suite géométrique, et déterminer certains de ses termes.

Considering $a, \underset{\times r}{b}, \underset{\times r}{c}$: $b = ar, c = ar^2$

$b^2 = (ar)^2 = a^2r^2$ .....(i)

$ac = a \times ar^2 = a^2r^2$ .....(ii)

From (i) and (ii), $b^2 = ac$

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n).

(a) Le 4e terme est 24, le 6e terme est 96.

(b) Le 3e terme est 12, le 6e terme est -96.

Lorsque les 3 nombres 2, x, 8 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez la valeur de x

Lorsque les 3 nombres 6, a , b forment une suite arithmétique dans cet ordre, et que

a, b, 16 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez les valeurs de a et b.

Explication

1. (a) Soit le terme général $a_n = ar^{n-1}$.

Puisque le 4e terme est 24, on $aar^3 = 24$ ..... (i)

Puisque le 6e terme est 96, on $aar^5 = 96$ ..... (ii)

À partir de (i) et (ii), $a \neq 0, r \neq 0$. En divisant (ii) par (i), on obtient :

$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{96}{24} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$.

À partir de (i), lorsque $r = 2$, on a $8a = 24$, donc $a = 3$.

Lorsque $r = -2$, on a $-8a = 24$, donc $a = -3$.

Par conséquent, $a_n = 3 \times 2^{n-1}$ ou $a_n = -3 \times (-2)^{n-1}$.

(b) Soit le terme général $a_n = ar^{n-1}$.

Puisque le 3e terme est 12, on a $ar^2 = 12$ ..... (i)

Puisque le 6e terme est -96, on a $ar^5 = -96$ ..... (ii)

À partir de (i) et (ii), en divisant (ii) par (i), on obtient :

$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{-96}{12} \Rightarrow r^3 = -8$. Puisque r est un nombre réel, $r = -2$.

En substituant ceci dans (i) : $4a = 12$, donc $a = 3$.

Par conséquent, $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$.

2. Puisque 2, x, 8 forment une suite géométrique dans cet ordre, on a $x^2 = 16$.

En résolvant ceci, $x = \pm 4$.

3. Puisque 6, a, b forment une suite arithmétique dans cet ordre, on a $2a = 6 + b$ ..... (i)

Puisque a, b, 16 forment une suite géométrique dans cet ordre, on a $b^2 = 16a$ ..... (ii)

À partir de (i), $b = 2a - 6$ ..... (i)'. En substituant ceci dans (ii) et en simplifiant : $4a^2 - 40a + 36 = 0$.

En résolvant ceci, $a = 9, 1$.

À partir de (i)', lorsque $a = 9$, $b = 12$, lorsque $a = 1$, $b = -4$.

Par conséquent, $a = 9, b = 12$ ou $a = 1, b = -4$.

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n).

(a) Le 3e terme est 18, et le 5e terme est 162.

(b) Le 2e terme est -6, et le 5e terme est 48.

(c) Le 3e terme est 12, et le 7e terme est 192.

Lorsque les 3 nombres 1, x, 12 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez la valeur de x.

Lorsque les 3 nombres -2, a, b forment une suite arithmétique dans cet ordre, et que a, b, 18 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez les valeurs de a et b.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez le terme général des suites géométriques suivantes (a_n)

(a) Le 2e terme est 6, et le 4e terme est 54.

(b) Le 3e terme est 27, et le 5e terme est 243.

(c) Le 3e terme est -28, et le 5e terme est -112.

(d) Le 2e terme est 14, et le 5e terme est 112.

(e) Le 4e terme est 16, et le 7e terme est -128.

(f) Le 3e terme est -20, et le 6e terme est 160.

(g) Le 2e terme est 3, et le 6e terme est 768.

(h) Le 3e terme est 9, et le 7e terme est $\frac{729}{16}$.

(i) Le 4e terme est $\frac{2}{9}$, et le 8e terme est 18.

Lorsque les 3 nombres 1, x, 25 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez la valeur de x.

Lorsque les 3 nombres $\frac{1}{2}$, x, 8 forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez la valeur de x.

Lorsque les 3 nombres a, b, 2 forment une suite arithmétique dans cet ordre, et que a, 2, b forment une suite géométrique dans cet ordre, trouvez les valeurs de a et b.

★ Défi - Budgétisation d'une initiative d'énergie verte

Un département de durabilité d'entreprise planifie un budget sur 3 ans pour éliminer progressivement les combustibles fossiles. Ils suivent leurs allocations de financement annuelles sur trois étapes consécutives, modélisées selon deux prévisions économiques différentes :

Modèle 1 (Expansion linéaire) : Sous des conditions stables, le financement pour l'Année 1 est plafonné à -5 centaines de milliers de LE (dette initiale d'infrastructure), suivi de l'Année 2 (a) et de l'Année 3 (b). Ces trois nombres forment une suite arithmétique.

Modèle 2 (Échelle composée) : Si une percée en énergie propre se produit, le budget change de vitesse. Les allocations pour l'Année 2 (a), l'Année 3 (b), et un budget nouvellement projeté pour l'Année 4 de 45 centaines de milliers de LE forment une suite géométrique.

Déterminez les valeurs budgétaires exactes pour a (Année 2) et b (Année 3) qui satisfont simultanément les deux modèles de planification pour que l'entreprise puisse effectuer une transition en douceur.

2-9

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite géométrique (1)

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

La somme S_n d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r du premier au n-ième terme est :

Pour toute raison réelle r ≠ 1 :

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Si r = 1, tous les termes valent a et $S_n = na$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer la somme d'une suite géométrique de n termes.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez la somme S des suites géométriques suivantes.

(a) Le premier terme est 4, la raison est 3, et le nombre de termes est 5.

(b) Le premier terme est 8, la raison est $\frac{1}{2}$, et le nombre de termes est 6.

Trouvez la somme S_n du premier au n-ième terme de la suite géométrique suivante.

2, -6, 18, -54, ...

Explication

1. (a) Puisque $a = 4, r = 3, n = 5$:

$S = \frac{4(3^5-1)}{3-1} = \frac{4(243-1)}{2} = 2 \times 242 = 484$.

(b) Puisque $a = 8, r = \frac{1}{2}, n = 6$:

$S = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}} = 16(\frac{63}{64}) = \frac{63}{4}$.

2. Puisque $a = 2, r = -3$:

$S_n = \frac{2(1-(-3)^n)}{1-(-3)} = \frac{2(1-(-3)^n)}{4} = \frac{1-(-3)^n}{2}$.

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez la somme S des suites géométriques suivantes.

(a) Le premier terme est 3, la raison est 2, et le nombre de termes est 5.

(b) Le premier terme est 6, la raison est -2, et le nombre de termes est 4.

(c) Le premier terme est 6, la raison est $\frac{1}{3}$, et le nombre de termes est 6.

Trouvez la somme Sn du premier au n-ième terme des suites géométriques suivantes.

(a) Le premier terme est 3, la raison est -2.

(b) 8, 4, 2, 1, ...

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez la somme S des suites géométriques suivantes.

(a) Le premier terme est 5, la raison est 3, et le nombre de termes est 4.

(b) Le premier terme est 1, la raison est -3, et le nombre de termes est 4.

(c) Le premier terme est 1, la raison est $\frac{1}{3}$, et le nombre de termes est 3.

(d) Le premier terme est 3, la raison est 2, et le nombre de termes est 10.

(e) Le premier terme est 2, la raison est -3, et le nombre de termes est 6.

(f) Le premier terme est 1, la raison est $\frac{1}{2}$, et le nombre de termes est 8.

Trouvez la somme S^n du premier au n-ième terme des suites géométriques suivantes.

(a) Le premier terme est 7, et la raison est 2.

(b) Le premier terme est 2, et la raison est $\frac{1}{3}$.

(c) 2, 6, 18, 54, ...

(d) 1, -3, 9, -27, ...

(e) Le premier terme est 4, et la raison est 2.

(f) Le premier terme est 16, et la raison est $-\frac{1}{2}$.

(g) 1, 2, 4, 8, ...

★ Défi

Dans un modèle de filtration, la diminution de concentration à chaque étape vaut le tiers de celle de l'étape précédente : 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, … mg/L retirés par étape. Calculez la diminution totale de concentration après quatre étapes. Ces valeurs représentent les quantités retirées par litre, et non les quantités restantes.

2-10

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite géométrique (2)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer le terme général d'une suite géométrique, trouver certains termes dans celle-ci, et aussi la somme de tous ou certains de ses termes.

MISE EN ROUTE

Trouvez le premier terme et la raison des suites géométriques suivantes.

La somme du premier terme au 3e terme est 35, la somme du 3e terme au 5e terme est 140.

La somme du premier terme au 3e terme est 21, la somme du premier terme au 6e terme est 189.

Le 3e terme est 4, la somme du premier terme au 3e terme est 7.

Explication

1. Soit a le premier terme et r la raison.

Puisque la somme du premier au 3e terme est 35, on a $a + ar + ar^2 = 35$ ..... (i)

Puisque la somme du 3e au 5e terme est 140, on a $ar^2 + ar^3 + ar^4 = 140$ ..... (ii)

À partir de (ii), on a $r^2(a + ar + ar^2) = 140$.

En substituant (i) dans ceci : $35r^2 = 140 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$.

Lorsque $r = 2$, à partir de (i) : $a + 2a + 4a = 35 \Rightarrow 7a = 35 \Rightarrow a = 5$.

Lorsque $r = -2$, à partir de (i) : $a - 2a + 4a = 35 \Rightarrow 3a = 35 \Rightarrow a = \frac{35}{3}$.

Par conséquent, premier terme : 5, raison : 2 ou premier terme : $\frac{35}{3}$, raison : -2.

2. Soit a le premier terme et r la raison.

Puisque la somme du premier au 3e terme est 21, on a $a + ar + ar^2 = 21$ ..... (i)

Puisque la somme du premier au 6e terme est 189, on a
$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = 189$ ..... (ii)

À partir de (ii), $(a + ar + ar^2) + r^3(a + ar + ar^2) = 189$.

En substituant (i) dans ceci : $21 + 21r^3 = 189 \Rightarrow 21r^3 = 168 \Rightarrow r^3 = 8$.

En résolvant ceci dans l'ensemble des nombres réels, $r = 2$.

À partir de (i), $a + 2a + 4a = 21 \Rightarrow 7a = 21 \Rightarrow a = 3$.

Par conséquent, premier terme : 3, raison : 2.

3. Soit a le premier terme et r la raison.

Puisque le 3e terme est 4, on a $ar^2 = 4$ ..... (i)

Puisque la somme du premier au 3e terme est 7, on a $a + ar + ar^2 = 7$ ..... (ii)

Puisque $r \neq 0$, à partir de (i), $a = \frac{4}{r^2}$.

En substituant ceci dans (ii) : $\frac{4}{r^2} + (\frac{4}{r^2}) \times r + (\frac{4}{r^2}) \times r^2 = 7$

En multipliant les deux côtés par r^2 : $4 + 4r + 4r^2 = 7r^2 \Rightarrow 3r^2 - 4r - 4 = 0$.

En résolvant ceci, $r = 2$ ou $r = -\frac{2}{3}$.

Lorsque $r = 2$, à partir de (i), $4a = 4 \Rightarrow a = 1$.

Lorsque $r = -\frac{2}{3}$, à partir de (i), $(\frac{4}{9})a = 4 \Rightarrow a = 9$.

Par conséquent, premier terme : 1, raison : 2 ou premier terme : 9, raison : $-\frac{2}{3}$.

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Trouvez le premier terme et la raison des suites géométriques suivantes.

La somme du premier au 3e terme est 21, et la somme du 3e au 5e terme est 84.

La somme du premier au 3e terme est 26, et la somme du premier au 6e terme est 728.

Le 2e terme est 3, et la somme du premier au 3e terme est 13.

EXERCICES

Trouvez le premier terme et la raison des suites géométriques suivantes.

La somme du premier au 3e terme est 9, et la somme du 4e au 6e terme est -72.

La somme du premier au 3e terme est 9, et la somme du 3e au 5e terme est 36.

La somme du premier au 3e terme est 78, et la somme du 3e au 5e terme est 702.

La somme du premier et du 2e terme est 3, et la somme du premier au 4e terme est 51.

La somme du premier au 3e terme est 65, et la somme du premier au 6e terme est 1820.

La somme du premier et du 2e terme est -8, et la somme du premier au 4e terme est -80.

Le 2e terme est 6, et la somme du premier au 3e terme est 21.

Le 3e terme est 12, et la somme du premier au 3e terme est 9.

Le 3e terme est 20, et la somme du premier au 3e terme est 35.

★ Défi

Si Sn est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique telle que $S_8 = 255, S_6 = 63$ et $a_8 - a_7 = 64$, trouvez a_{10}.

Réfléchir

Comment le fait de changer la raison r d'une valeur supérieure à 1 à une valeur comprise entre 0 et 1 modifie-t-il fondamentalement le comportement du monde réel modélisé par une suite géométrique ?

2-11

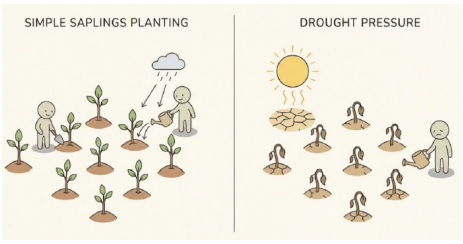
MATHÉMATIQUES

Notation de sommation Σ (1)

Chapitre 2 — Suites

Concept 3. Sommation

En biologie environnementale, le rétablissement d'une forêt suit un modèle mathématique à double force. Après un feu de forêt, les écologistes plantent 200 jeunes arbres. Pour accélérer la restauration, ils intensifient leurs efforts en ajoutant 100 jeunes arbres supplémentaires au quota chaque année consécutive (une progression arithmétique linéaire : 200, 300, 400...). Simultanément, les pressions naturelles comme la sécheresse font des ravages : seulement 60 % des arbres survivent d'une année à l'autre (une décroissance géométrique exponentielle avec une raison de 0,6). Calculer la population totale survivante après une décennie nécessite de suivre comment le cycle de plantation en expansion de chaque année se dégrade continuellement. Les mathématiques simplifient ce processus chevauchant grâce à la notation de sommation, offrant un cadre unifié pour analyser la croissance linéaire et la décroissance exponentielle simultanées.



Question directrice : Comment la notation de sommation Σ permet-elle d'écrire une longue somme de façon concise et d'en faciliter le calcul ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser la notation de sommation pour représenter des suites mathématiques et calculer leurs valeurs dans différentes suites.

POINT ESSENTIEL !

Pour une suite dont le n-ième terme (terme général) est a_n, la somme du 1er terme au n-ième terme s'exprime par :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exemple : $\sum_{k=1}^{4} 7k = 7 + 14 + 21 + 28$

Exemple : La somme du premier au 8e terme d'une suite dont le n-ième terme (terme général) est $3n$ s'écrit : $\sum_{k=1}^{8} 3k$.

Remarque : On remplace "n" par "k".

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

Écrivez les sommes des suites suivantes sous forme d'une somme de termes sans utiliser Σ.

(a) $\sum_{k=1}^{5} 2k$

(b) $\sum_{k=1}^{3} (k^2 - 3)$

(c) $\sum_{k=1}^{4} 3^k$

(d) $\sum_{k=1}^{3} 2$

Exprimez les expressions suivantes en utilisant la notation de sommation Σ.

(a) $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1)$

(b) $6^2 + 7^2 + 8^2 + \ldots + 15^2$

Explication

1.

(a) Substituez $k = 1, 2, 3, 4, 5$ dans 2k et écrivez-les comme les termes d'une somme.

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

(b) Substituez k = 1, 2, 3 dans $k^2 - 3$ et écrivez-les comme les termes d'une somme.

$$\sum_{k=1}^{3} (k^2 - 3) = -2 + 1 + 6$$

(c) Substituez $k = 1, 2, 3, 4$ dans 3^k et écrivez-les comme les termes d'une somme.

$$\sum_{k=1}^{4} 3^k = 3 + 9 + 27 + 81$$

(d) La suite où le n-ième terme est représenté par 2 est 2, 2, 2, ...

$$\sum_{k=1}^{3} 2 = 2 + 2 + 2$$

2.

(a) Pour les problèmes où le dernier terme est exprimé comme une expression en fonction de n, changez simplement n en k et écrivez-le à l'intérieur de Σ.

$$\sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$$

(b) Pour exprimer avec le symbole Σ, vous avez besoin du terme général a_n et de l'indice du dernier terme.

Trouvez d'abord le terme général : $a_n = (n + 5)^2$.

Trouvez l'indice du dernier terme : 15^2 est le 10e terme.

Par conséquent, $\sum_{k=1}^{10} (k + 5)^2$

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

Écrivez les sommes des suites suivantes sous forme d'une somme de termes sans utiliser Σ.

(a) $\sum_{k=1}^{5} (2k + 1)$

(b) $\sum_{k=1}^{3} (3k^2 + 2)$

(c) $\sum_{k=1}^{4} 2^k$

(d) $\sum_{k=1}^{6} 3$

Exprimez les expressions suivantes en utilisant la notation de sommation Σ.

(a) $5 + 8 + 11 + \ ... + (3n + 2)$

(b) La somme du 1er au n-ième terme de la suite $a_n = 2n + 1$

(c) $4^2 + 5^2 + 6^2 + \ ... + 13^2$

(d) $2 + 5 + 8 + \ ... + 29$

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Écrivez les sommes des suites suivantes sous forme d'une somme de termes sans utiliser Σ.

(a) $\sum_{k=1}^{5} 3k$

(b) $\sum_{k=1}^{4} (4k - 2)$

(c) $\sum_{k=1}^{5} (2k - 3)$

(d) $\sum_{k=1}^{4} k^2$

(e) $\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 2k)$

(f) $\sum_{k=1}^{3} (2k^2 + 3)$

(g) $\sum_{k=1}^{3} 3^k$

(h) $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 3)$

(i) $\sum_{k=1}^{3} (5^k + 3)$

(j) $\sum_{k=1}^{4} 5$

(k) $\sum_{k=1}^{5} 4$

(l) $\sum_{k=1}^{3} 3$

Exprimez les expressions suivantes en utilisant la notation de sommation Σ.

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$

(b) $1 + 7 + 25 + 79 + \ldots + (3^n - 2)$

(c) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1}$

(d) La somme du 1er au n-ième terme de la suite $a_n = 7n - 1$

(e) La somme du 1er au n-ième terme de la suite $a_n = 4n + 5$

(f) La somme du 1er au n-ième terme de la suite $a_n = 3n - 2$

(g) $7^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + 21^2$

(h) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \ldots + 18^2$

(i) $10^2 + 11^2 + 12^2 + \ldots + 20^2$

(j) $8 + 16 + 24 + \ldots + 56$

(k) $7 + 13 + 19 + \ldots + 73$

(l) $4 + 9 + 14 + \ldots + 119$

★ Défi

Une start-up de technologies vertes étend son réseau de stations de recharge à l'énergie solaire dans une zone métropolitaine. Une start-up installe 1 panneau solaire à la (Semaine 1), 4 à la (Semaine 2), 7 à la (Semaine 3), et (3n - 2) panneaux à la (Semaine n). Écrivez une seule expression mathématique en utilisant la notation de sommation Σ pour représenter le total cumulatif des panneaux installés de la Semaine 1 à la Semaine n.

2-12

MATHÉMATIQUES

Notation de sommation Σ (2)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser la notation de sommation pour représenter des suites mathématiques et calculer leurs valeurs dans différentes suites.

POINT ESSENTIEL !

Formules pour la notation de sommation Σ

$\sum_{k=1}^{n} c = nc$ (où c est une constante)

$\sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{1}{2}\right)n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Propriétés de la notation de sommation Σ (où p est une constante indépendante de k)

$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$

$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

MISE EN ROUTE

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n} (-3)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (5k + 4)$

(c) $1\times3+2\times8+3\times13+\ \ldots$
$+n(5n-2)$

(d) $\sum_{k=1}^{4} (2k - 1)$

Explication

(a) $\sum_{k=1}^{n} (-3) = -3n$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(5k+4)=5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4=5\times\frac{1}{2}n(n+1)+4n=\frac{1}{2}n(5n+5+8)=\frac{1}{2}n(5n+13)$

(c) $1\times3+2\times8+3\times13+\ \ldots+n(5n-2)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(5k-2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(5k^2-2k)=5\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k$

$=5\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{5(2n+1)-6\}=\frac{1}{6}n(n+1)(10n-1)$

(d) $\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{4}k-\sum_{k=1}^{4}1=2\times\frac{1}{2}\times4(4+1)-4=16$

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n}3$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-3)$

(c) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(3k-1)$

(d) $1\times3+2\times5+3\times7+\ldots+n(2n+1)$

(e) $\sum_{k=1}^{5}(3k-2)$

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n} 6$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-4)$

(c) $\sum_{k=1}^{n} 1$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$

(e) $\sum_{k=1}^{n} (3k + 2)$

(f) $\sum_{k=1}^{n} (6k - 3)$

(g) $\sum_{k=1}^{n} k(k - 2)$

(h) $\sum_{k=1}^{n} k(2k - 2)$

(i) $\sum_{k=1}^{n} (k - 1)^2$

(j) $1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \ldots + n(n + 3)$

(k) $1 \times 5 + 2 \times 8 + 3 \times 11 + \ldots + n(3n + 2)$

(l) $2 \times 5 + 3 \times 6 + 4 \times 7 + \ldots + (n + 1)(n + 4)$

(m) $\sum_{k=1}^{20} (2k - 7)$

(n) $\sum_{k=1}^{8} (4k + 5)$

(o) $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$

★ Défi

Trouvez la somme suivante : $\sum_{r=4}^{8} (r^2 + r + 5)$

2-13

MATHÉMATIQUES

Notation de sommation Σ (3)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser la notation de sommation pour représenter des suites mathématiques et calculer leurs valeurs dans différentes suites.

POINT ESSENTIEL !

Formules pour la notation de sommation Σ

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \{\left(\frac{1}{2}\right) n(n+1)\}^2$

Somme d'une suite géométrique

$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ est la somme du premier terme au n-ième terme d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r, donc :

Pour $r \neq 1$: $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Pour $r = 1$: $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = na$.

Une suite exprimée par $a_n = r^{n-1}$ peut être réécrite comme $a_n = 1 \times r^{n-1}$, c'est donc une suite géométrique de premier terme 1 et de raison r.

Une suite exprimée par $a_n = r^n$ peut être réécrite comme $a_n = r \times r^{n-1}$, c'est donc une suite géométrique de premier terme r et de raison r.

MISE EN ROUTE

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} 2 \times (-3)^{k-1}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} 4^k$

Explication

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + k^2)$

$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1) + 2(2n+1)\}$

$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} 2 \times (-3)^{k-1} = \frac{2\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1-(-3)^n}{2}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} 4^k = \sum_{k=1}^{n} 4 \times 4^{k-1} = \frac{4(4^n-1)}{4-1} = \frac{4(4^n-1)}{3}$

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k-2)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} 3 \times (-2)^{k-1}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (-5)^k$

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2-1)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+2)$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2+2)$

(d) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k-3)$

(e) $\sum_{k=1}^{n} 6 \times 3^{k-1}$

(f) $\sum_{k=1}^{n} 2 \times (-1)^{k-1}$

(g) $\sum_{k=1}^{n} 4 \times 2^{k-1}$

(h) $\sum_{k=1}^{n} 8 \times (-3)^{k-1}$

(i) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$

(j) $\sum_{k=1}^{4} (-2)^{k-1}$

(k) $\sum_{k=1}^{n} (-2)^{k-1}$

(l) $\sum_{k=1}^{3} 3^{k-1}$

(m) $\sum_{k=1}^{n} (-3)^k$

(n) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$

(o) $\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(p) $\sum_{k=1}^{4} (-3)^k$

★ Défi

Trouvez la somme suivante : $\sum_{r=5}^{9} (2r+7)$

2-14

MATHÉMATIQUES

Sommes de suites à termes fractionnaires

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Sommer des suites à termes fractionnaires par décomposition de fractions.

POINT ESSENTIEL !

Étapes pour sommer une suite à termes fractionnaires :

1. Transformez chaque terme en utilisant la formule suivante :

$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

Exemple : $\frac{1}{4\times 10} = \frac{1}{6}(\frac{1}{4} - \frac{1}{10})$

2. Annulez les termes dont la somme est zéro et calculez les parties restantes.

Pour les suites contenant $\sqrt{}$ au dénominateur, rationalisez d'abord le dénominateur.

Lorsque la somme d'une suite contenant des fractions ou des racines carrées est exprimée à l'aide de la notation de sommation Σ, réécrivez-la sous la forme d'une somme de termes.

MISE EN ROUTE

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{5\times 8} + \frac{1}{8\times 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

Explication

(a) $\frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{5\times 8} + \frac{1}{8\times 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}) + \ldots + \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})$

$= \frac{1}{3}\{(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{11}) + \ldots + (\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})\}$

$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2})$

$= \frac{n}{2(3n+2)}$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\ldots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$= \sqrt{n+2}-\sqrt{2}$

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

(b) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{6\times8}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+5)}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

(b) $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}$

(c) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

Trouvez les sommes suivantes.

(a) $\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

(b) $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(c) $\frac{1}{1\times7}+\frac{1}{4\times10}+\frac{1}{7\times13}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(d) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

★ Défi

Trouvez avec les étapes : $\sum_{r=1}^{30}\frac{1}{r(r+2)}$

2-15

MATHÉMATIQUES

Somme des produits de suites arithmétique et géométrique

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver la somme du produit d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

POINT ESSENTIEL !

Pour sommer les produits terme à terme d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique de raison r ≠ 1, multipliez la somme S par r, alignez les termes de même puissance, puis soustrayez S − rS. Pour r = 1, utilisez la somme arithmétique.

MISE EN ROUTE

Trouvez la somme suivante S :

$S = 3\times 1 + 5\times 3 + 7\times 3^2 + 9\times 3^3 + \ldots + (2n+1)\times 3^{n-1}$

Explication

La somme à trouver est la somme de (Suite arithmétique de premier terme 3, de raison 2) × (Suite géométrique de premier terme 1, de raison 3).

$S = 3\times 1 + 5\times 3 + 7\times 3^2 + 9\times 3^3 + \ldots + (2n+1)\times 3^{n-1}$

Multipliez les deux côtés par la raison 3 de la suite géométrique.

$3S = 3\times 3 + 5\times 3^2 + 7\times 3^3 + \ldots + (2n-1)\times 3^{n-1} + (2n+1)\times 3^n$

Soustrayez les deux équations (S - 3S) :

$-2S = 3\times 1 + 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + \ldots + 2\times 3^{n-1} - (2n+1)\times 3^n$

$-2S = 3 + \frac{2(3^n-3)}{3-1} - (2n+1)\times 3^n$

$-2S = 3 + 3^n - 3 - (2n+1)\times 3^n$

$-2S = 3^n - (2n+1)\times 3^n = -2n\times 3^n$

Par conséquent, $S = n\times 3^n$

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez la somme suivante S :

$S = 2\times 1 + 3\times 3 + 4\times 3^2 + 5\times 3^3 + \ldots + (n+1)\times 3^{n-1}$

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Trouvez les sommes suivantes S :

$S = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + n \times 2^{n-1}$

$S = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + 7 \times 3^4 + \ldots + (2n-1) \times 3^n$

★ Défi

Trouvez la somme suivante : $5, 5+9, 5+9+13, 5+9+13+17, \ldots, +(4k+1)$

2-16

MATHÉMATIQUES

Suite dont le terme général est une somme

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

Calculer le k-ième terme d'une suite où chaque terme est exprimé comme une somme à l'aide de la notation de sommation Σ.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déduire la somme d'une suite lorsque son terme général est exprimé comme la somme de certains de ses termes, et relier la somme de la suite avec son terme général.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants pour la suite $3, 3+5, 3+5+7, 3+5+7+9, \ldots$

(a) Trouvez le k-ième terme.

(b) Trouvez la somme du premier terme au n-ième terme.

Explication

(a) Le k-ième terme de cette suite est :

$$a_k = 3+5+7+\ldots+(2k+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(2i+1)$$

$$= 2\times\tfrac{1}{2}k(k+1)+k$$

En calculant ceci, on obtient $a_k = k(k+2)$.

(b) D'après (a), la somme S_n du premier terme au n-ième terme est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+2k) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

En calculant ceci, on obtient $S_n = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants pour la suite $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \ldots$

Trouvez le k-ième terme.

Trouvez la somme du premier terme au n-ième terme.

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Résolvez les problèmes suivants pour la suite $1, 1+5, 1+5+9, 1+5+9+13, \ldots$

(a) Trouvez le k-ième terme.

(b) Trouvez la somme du premier terme au n-ième terme.

Résolvez les problèmes suivants pour la suite $2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, \ldots$

(a) Trouvez le k-ième terme.

(b) Trouvez la somme du premier terme au n-ième terme.

★ Défi

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ où la somme des n premiers termes est donnée par la formule $S_n = 2n^2 + 5n$.

2-17

MATHÉMATIQUES

Somme d'une suite et terme général

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déduire la somme d'une suite lorsque son terme général est exprimé comme la somme de certains de ses termes, et relier la somme de la suite avec son terme général.

POINT ESSENTIEL !

Soit S_n la somme du premier terme a_1 au n-ième terme de la suite $\{a_n\}$.

Lorsque $n \geq 2$, $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Le premier terme est $a_1 = S_1$.

Vérifiez si a_n obtenu sous la condition $n \geq 2$ est également valable pour le premier terme en substituant $n = 1$ dans la formule de a_n.

Si c'est valable : gardez a_n tel quel.

Si ce n'est pas valable : écrivez à la fois a_1 et a_n.

Exemple : Si a_n trouvé par $S_n - S_{n-1}$ est $a_n = 2n^2 - 2n + 1$ .....(i) , et a_1 trouvé à partir de S_1 est $a_1 = 0$ .....(ii), substituer $n = 1$ dans (i) donne $a_1 = 1$, ce qui n'est pas valable.

Par conséquent, le terme général est $a_1 = 0$, et $a_n = 2n^2 - 2n + 1$ lorsque $n \geq 2$.

MISE EN ROUTE

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ où la somme S_n du premier terme au n-ième terme est donnée par les formules suivantes.

(a) $S_n = n^2 - 3n$ (b) $S_n = 5^n - 1$

Explication

(a) Lorsque $n \geq 2$:

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$

$= 2n - 4$ .....(i)

Le premier terme est $a_1 = S_1$

$= 1^2 - 3 \times 1 = -2$ .....(ii)

À partir de (i) et (ii), $a_n = 2n - 4$ est également valable lorsque $n = 1$.

Par conséquent, le terme général est $a_n = 2n - 4$.

(b) Lorsque $n \geq 2$:

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1)$

$= 5^n - 5^{n-1}$

$= 5 \times 5^{n-1} - 1 \times 5^{n-1}$

$= 4 \times 5^{n-1}$ .....(i)

Le premier terme est $a_1 = S_1$

$= 5^1 - 1 = 4$ .....(ii)

À partir de (i) et (ii), $a_n = 4 \times 5^{n-1}$ est également valable lorsque $n = 1$.

Par conséquent, le terme général est $a_n = 4 \times 5^{n-1}$.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ où la somme S_n du premier terme au n-ième terme est donnée par les formules suivantes.

$S_n = 2n^2 + 5n$

$S_n = 3^n - 1$

$S_n = n^3 + 2n + 6$

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ où la somme S_n du premier terme au n-ième terme est donnée par les formules suivantes.

$S_n = n^2$

$S_n = n^2 - 4n$

$S_n = n^2 + 2n - 1$

$S_n = 2^n - 1$

$S_n = 5^n - 2$

$S_n = 7^n - 1$

$S_n = n^3 - 1$

$S_n = 2^{n+2} - 3$

★ Défi

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ où la somme S_n du premier terme au n-ième terme est donnée par la formule suivante :

$S_n = 3^{n+1} - 2n + 1$

2-18

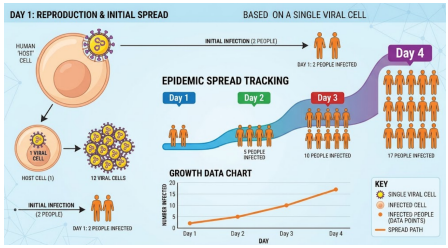
MATHÉMATIQUES

Suites des différences

Chapitre 2 — Suites

Concept 4. Suites avancées

Considérons le modèle numérique simplifié 2, 5, 10, 17, … Les différences successives sont 3, 5, 7, …, puis les différences secondes sont constantes. Cette structure aide à déterminer une formule du terme général. Un tel modèle abstrait ne suffit pas à prévoir l'évolution réelle d'une épidémie.



Question d'orientation : Comment pouvons-nous découvrir un modèle constant caché dans une suite de nombres lorsque les différences initiales entre eux ne cessent de changer ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver le terme général en utilisant les suites des différences.

POINT ESSENTIEL !

Une suite formée par les différences entre les termes adjacents est appelée une suite des différences.

Exemple : La suite des différences de 10, 8, 4, -2, -10, ... est -2, -4, -6, -8, ...

Pour les suites où le terme général est difficile à estimer, il peut parfois être trouvé à partir du premier terme et de la suite des différences.

Lorsque $n \geq 2$, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

Vérifiez s'il est valable pour $n = 1$ en substituant $n = 1$ dans la formule de a_n et en regardant s'il est égal au a_1 donné.

MISE EN ROUTE

Trouvez le terme général des suites suivantes $\{a_n\}$.

2, 5, 12, 23, 38, 57, ...

2, 3, 6, 15, 42, 123, ...

Explication

1. Soit (b_n) la suite des différences de la suite donnée.

(a_n): 2, 5, 12, 23, 38, 57, ...

(b_n): 3, 7, 11, 15, 19, ...

Puisque $\{b_n\}$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4 :

$b_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$

Par conséquent, lorsque $n \geq 2$,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1)$$

$$= 2 + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} - (n-1)$$

$$= 2 + 2n(n-1) - n + 1$$

$$= 2n^2 - 3n + 3$$

Cette formule est également valable lorsque $n = 1$. Par conséquent, $a_n = 2n^2 - 3n + 3$.

2. Soit $\{b_n\}$ la suite des différences de la suite donnée.

$\{a_n\}$: 2, 3, 6, 15, 42, 123, ...

$\{b_n\}$: 1, 3, 9, 27, 81, ...

Puisque $\{b_n\}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 :

$b_n = 1 \times 3^{n-1}$

Par conséquent, lorsque $n \geq 2$,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \times 3^{k-1} = 2 + \frac{1 \times (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{4 + 3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 3}{2}$$

Cette formule est également valable lorsque $n = 1$. Par conséquent, $a_n = \frac{3^{n-1} + 3}{2}$.

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Trouvez le terme général des suites suivantes $\{a_n\}$.

(a) 2, 10, 24, 44, 70, 102, ...

(b) 5, 7, 11, 19, 35, ...

EXERCICES

Trouvez le terme général des suites suivantes $\{a_n\}$.

(a) 1, 2, 5, 14, 41, 122, ...

(b) 5, 8, 9, 8, 5, 0, ...

(c) 2, 3, 1, 5, -3, 13, ...

(d) 1, 6, 15, 28, 45, 66, ...

(e) 5, 4, 7, -2, 25, -56, ...

★ Défi

Dans une expérience abstraite de croissance, les volumes observés pendant six étapes sont 1, 3, 7, 13, 21 et 31 mm^3. Déterminez le terme général a_n du modèle, puis calculez a_{12} et comparez-le au seuil expérimental de 130 mm^3.

2-19

MATHÉMATIQUES

Suites groupées

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

Pour les suites groupées, considérez la régularité de la suite avant le regroupement et la régularité du nombre de termes inclus dans chaque groupe.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre divers problèmes en divisant la suite en groupes pour trouver un terme spécifique ou la somme d'un groupe particulier de termes.

MISE EN ROUTE

Divisez la suite des nombres naturels en groupes comme indiqué ci-dessous. Résolvez les problèmes suivants.

2 | 4, 6, 8 | 10, 12, 14, 16, 18 | 20, 22, ...

Trouvez le premier terme du 10e groupe.

Trouvez la somme des termes inclus dans le n-ième groupe.

Trouvez dans quel groupe et à quelle position se trouve 88.

Explication

Soit $\{a_n\}$ la suite avant le regroupement. Puisqu'il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2, $a_n = 2n$.

Soit $\{b_n\}$ la suite du nombre de termes dans chaque groupe. Puisqu'il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2, $b_n = 2n - 1$.

1. Trouvez le premier terme du 10e groupe en trouvant à quelle position se trouve le dernier terme du 9e groupe dans $\{a_n\}$.

La somme du nombre de termes jusqu'au 9e groupe est :

$\frac{1}{2} \times 9 \times \{2 \times 1 + (9-1) \times 2\} = 81$.

Par conséquent, puisque le premier terme du 10e groupe est le 82e terme de $\{a_n\}$:

$2 \times 82 = 164$.

2. Trouvez le dernier terme du n-ième groupe.

Trouver à quelle position se trouve le dernier terme du n-ième groupe dans $\{a_n\}$:

$\frac{1}{2}n\{2\times 1+(n-1)\times 2\}=n^2$ ..... (i)

Par conséquent, le dernier terme du n-ième groupe est $2n^2$.

Le premier terme du n-ième groupe est le $\{(n-1)^2+1\}$-ième terme de $\{a_n\}$.

C'est-à-dire le (n^2-2n+2)-ième terme, donc : $2(n^2-2n+2)$.

Le nombre de termes dans le n-ième groupe est $2n-1$.

Par conséquent, la somme requise est la somme d'une suite arithmétique de dernier terme $2n^2$, de premier terme $2(n^2-2n+2)$, et de nombre de termes $2n-1$:

$\frac{1}{2}(2n-1)\{2(n^2-2n+2)+2n^2\}=2(2n-1)(n^2-n+1)$.

3. Tout d'abord, trouvez à quelle position se trouve 88 dans $\{a_n\}$.

Résoudre $2n=88$ donne $n=44$.

Ici, d'après 2, les derniers termes du (n-1)-ième et du n-ième groupe sont respectivement les $(n-1)^2$-ième et n^2-ième termes de $\{a_n\}$.

Puisque $6^2=36$ et $7^2=49$, le 44e terme est dans le 7e groupe.

Puisque $44-36=8$, 88 est le 8e terme du 7e groupe.

À VOUS D'ESSAYER

Divisez la suite des nombres naturels en groupes comme indiqué ci-dessous. Résolvez les problèmes suivants.

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | 21, 23, ...

Trouvez le premier terme du 10e groupe.

Trouvez la somme des termes inclus dans le 10e groupe.

Trouvez dans quel groupe et à quelle position se trouve 101.

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Divisez la suite des nombres naturels en groupes comme indiqué ci-dessous. Résolvez les problèmes suivants.

1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 | 11, 12, ...

(a) Trouvez le premier terme du 10e groupe.

(b) Trouvez la somme des termes inclus dans le 10e groupe.

(c) Trouvez dans quel groupe et à quelle position se trouve 124.

1, 4 | 7, 10, 13, 16 | 19, 22, 25, 28, 31, 34 | 37, 40, ...

(a) Trouvez le premier terme du 10e groupe.

(b) Trouvez la somme des termes inclus dans le 10e groupe.

(c) Trouvez dans quel groupe et à quelle position se trouve 100.

★ Défi

2, 6 | 10, 14, 18 | 22, 26, 30, 34 | ...

(a) Trouvez le premier terme du 12e groupe.

(b) Déduisez une formule pour la somme de tous les termes du n-ième groupe.

(c) Déterminez dans quel groupe et à quelle position le nombre 202 apparaît.

(d) Extension du défi : Trouvez la somme totale de tous les termes du groupe 1 jusqu'au groupe 12.

Réfléchir

Lors de l'analyse d'une séquence inhabituelle de données du monde réel, quels indicateurs ou indices visuels vous amèneraient à choisir une méthode de suite des différences plutôt qu'une méthode de suite groupée ?

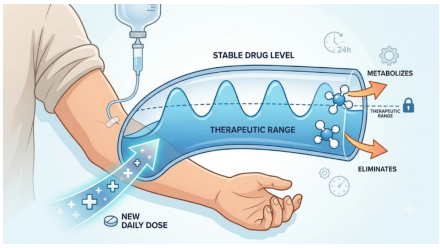
2-20

MATHÉMATIQUES

Relations de récurrence (1)

Chapitre 2 — Suites

Concept 5. Relations de récurrence et raisonnement par récurrence



Dans un modèle simplifié d'accumulation, une quantité fixe est ajoutée à chaque étape tandis qu'une proportion constante de la quantité précédente subsiste. Une relation de récurrence relie ainsi deux termes successifs. Le raisonnement par récurrence permet, quant à lui, de démontrer une propriété de cette suite pour tout entier de son domaine, il ne garantit pas à lui seul la validité d'un modèle réel.

Question directrice : Comment démontrer, par un raisonnement par récurrence, qu'une propriété est vraie pour tout entier n à partir d'un rang initial ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des relations de récurrence à leurs différents niveaux afin de déduire les termes de la suite.

POINT ESSENTIEL !

Une suite $\{a_n\}$ est déterminée, et $a_2, a_3, a_4, \ldots$ peuvent être trouvés dans l'ordre, si les deux conditions suivantes sont données :

(a) Le premier terme

(b) Une expression relationnelle pour trouver a_{n+1} à partir de $a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Le (b) ci-dessus est appelé une relation de récurrence. Ci-après, les relations de récurrence sont supposées être valables pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Relations de récurrence représentant des suites arithmétiques et géométriques.

$a_{n+1} = a_n + d \rightarrow$ Suite arithmétique de raison d

$a_{n+1} = ra_n \rightarrow$ Suite géométrique de raison r

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez du 2e au 4e terme de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 5$ (b) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

Explication

1. Le 2e terme est trouvé en substituant $n = 1$ dans la relation de récurrence donnée.

$a_{1+1} = 3a_1 + 2 \Rightarrow a_2 = 3(2) + 2 = 8.$

Le 3e terme est trouvé en utilisant le 2e terme. De même, le 4e terme est trouvé en utilisant le 3e terme.

$a_{2+1} = 3a_2 + 2 \Rightarrow a_3 = 3(8) + 2 = 26.$

$a_{3+1} = 3a_3 + 2 \Rightarrow a_4 = 3(26) + 2 = 80.$

Par conséquent, $a_2 = 8, a_3 = 26, a_4 = 80.$

2. (a) Puisque la suite $\{a_n\}$ est une suite arithmétique de premier terme -1 et de raison 5 :

$a_n = -1 + (n-1) \times 5$

$a_n = 5n - 6$

(b) Puisque la suite $\{a_n\}$ est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3 :

$a_n = 2 \times 3^{n-1}$

À VOUS D'ESSAYER

Travailler avec un partenaire

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez du 2e au 4e terme de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = -6,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$ (b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - n$

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3$ (b) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n - 2$

(c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 5a_n$ (d) $a_1 = -3,\ a_{n+1} = -2a_n$

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Trouvez du 2e au 4e terme de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -2a_n + 5$ (b) $a_1 = -6,\ a_{n+1} = a_n + n^2 - 2n$

(c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - n$ (d) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n - n$

(e) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2n$ (f) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 3^n$

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ déterminée par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 6$ (b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 5$

(c) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n$ (d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = -5a_n$

(e) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 3$ (f) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n - 4$

(g) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n$ (h) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = -4a_n$

★ Défi

Résolvez la relation de récurrence pour a_n : $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ pour $n \geq 3$.

Conditions initiales données : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, et $a_2 = 6$.

2-21

MATHÉMATIQUES

Relations de récurrence (2)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des relations de récurrence à différents niveaux pour déduire les termes de la suite.

POINT ESSENTIEL !

Relations de récurrence dont la suite des différences est connue :

$a_{n+1} = a_n + f(n)$

$f(n)$ est le terme général de la suite des différences de $\{a_n\}$.

Lorsque $n \geq 2$, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

Vérifiez si la formule est correcte pour $n = 1$ en substituant $n = 1$ dans la formule de a_n et en la comparant au a_1 donné.

MISE EN ROUTE

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes :

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 3$

Méthode de résolution (Explication)

Puisque $a_{n+1} - a_n = 2n - 3$, le terme général de la suite des différences de $\{a_n\}$ est $2n - 3$.

Donc, lorsque $n \geq 2$:

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 3)$

$= 1 + 2 \times \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1) + 1\} - 3(n-1)$

$= n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$

Cette formule est également valide lorsque $n = 1$.

Donc, $a_n = (n-2)^2$.

À VOUS D'ESSAYER

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + n^2$ (b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3^n$

EXERCICES

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n$

(b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3n^2$

(c) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n$

(d) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3n + 1$

(e) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n^2 + n$

(f) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3^n$

(g) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n - 4^n$

Le défi

Une start-up démarre avec une réserve de trésorerie de 400 000 LE ($a_1 = 4$ en centaines de milliers). Elle dépense un montant de $4n$ milliers de LE à la fin de chaque trimestre :

$a_1 = 4, a_{n+1} = a_n - 0.04n.$

Trouvez une formule explicite pour le terme général a_n afin de prédire la réserve de trésorerie de l'entreprise au début de n'importe quel trimestre.

2-22

MATHÉMATIQUES

Relations de récurrence (3)

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des relations de récurrence à différents niveaux pour déduire les termes de la suite.

POINT ESSENTIEL !

Étapes pour trouver le terme général d'une relation de récurrence de la forme

$a_{n+1} = p\, a_n + q$:

Remplacez a_{n+1} et a_n par c dans la relation de récurrence.

Résolvez l'équation résultant de l'étape 1.

Substituez la solution de l'étape 2 dans $a_{n+1} - c = p\,(a_n - c)$.

En posant $b_n = a_n - c$, (b_n) devient une suite géométrique de raison p.

Trouvez le terme général de (a_n) en utilisant le terme général de b_n.

MISE EN ROUTE

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes :

$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4$

Méthode de résolution (Explication)

En remplaçant à la fois a_{n+1} et a_n par c dans la relation de récurrence donnée $a_{n+1} = 3a_n + 4$:

$c = 3c + 4$

La résolution de cette équation donne $c = -2$.

Donc, $a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$ ..... (i).

Ici, en posant $a_n + 2 = b_n$ ..... (ii), on peut l'exprimer comme $b_{n+1} = 3b_n$.

En substituant cela dans (i), on obtient $b_{n+1} = 3b_n$. Donc $\{b_n\}$ est une suite géométrique de raison 3.

De plus, le premier terme b_1 de $\{b_n\}$ est, d'après (ii), $b_1 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Donc, $b_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$.

En substituant cela dans (ii), on trouve $a_n + 2 = 3^n$.

$a_n = 3^n - 2$.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 8$

(b) $a_1 = 4, a_{n+1} = -2a_n + 3$

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Trouvez le terme général de la suite $\{a_n\}$ définie par les conditions suivantes.

(a) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$

(b) $a_1 = -3, a_{n+1} = 4a_n + 3$

(c) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n - 2$

(d) $a_1 = -2, a_{n+1} = -3a_n + 4$

(e) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$

(f) $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{2}$

2-23

MATHÉMATIQUES

Démonstration par récurrence pour prouver des égalités

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

La démonstration par récurrence mathématique

Étapes pour prouver que "La condition (A) est vérifiée pour tous les entiers naturels n" :

[1] Prouver que (A) est vérifiée lorsque $n=1$.

[2] Supposer que (A) est vérifiée lorsque $n=k$, et écrire l'équation qui est alors vérifiée.

En transformant cette équation, prouver que (A) est également vérifiée lorsque $n=k+1$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le principe de récurrence (induction mathématique) pour prouver la validité des égalités et des identités mathématiques.

MISE EN ROUTE

Utilisez le principe de récurrence mathématique pour prouver que $1+2+3+\ \ldots +n=\ \frac{1}{2}n(n+1)$.

Méthode de résolution (Explication)

Soit l'identité donnée (A).

[1] Lorsque $n=1$:

Le membre de droite $=1$

Le membre de gauche $=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$

Donc, (A) est vérifiée lorsque $n=1$.

[2] Supposons que (A) est vérifiée lorsque $n=k$:

$1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ ..... (i)

Lorsque $n=k+1$, à partir de (i) :

Le membre de droite $=1+2+3+\ldots+k+(k+1)$

$=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$

$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$

Le membre de gauche $=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$

Donc, (A) est également vérifiée lorsque $n=k+1$.

D'après [1] et [2], (A) est vérifiée pour tous les entiers naturels.

À VOUS D'ESSAYER

Utilisez la récurrence mathématique pour prouver les identités suivantes.

(a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(b) $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Utilisez la récurrence mathématique pour prouver les identités suivantes.

(a) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

(b) $3+3\times4+3\times4^2+\ldots+3\times4^{n-1}=4^n-1$

(c) $1\times3+2\times4+3\times5+\ldots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

(d) $1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}$

2-24

MATHÉMATIQUES

Démonstration par récurrence pour prouver des inégalités

Chapitre 2 — Suites

POINT ESSENTIEL !

Lors de la preuve d'identités ou d'inégalités impliquant a^n, multipliez les deux membres de l'expression supposée par a.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le principe de récurrence mathématique pour prouver la validité des inégalités algébriques.

MISE EN ROUTE

Lorsque n est un entier naturel supérieur ou égal à 4, prouvez l'inégalité suivante :

$2^n > 3n$

Méthode de résolution (Explication)

Soit l'inégalité donnée (A).

[1] Lorsque $n = 4$, le membre de gauche $= 2^4 = 16$, le membre de droite $= 3 \times 4 = 12$.

Donc, (A) est vérifiée lorsque $n = 4$.

[2] En supposant que $k \geq 4$ et que (A) est vérifiée lorsque $n = k$,

$2^k > 3k$

En multipliant les deux membres par 2, nous obtenons :

$2^{k+1} > 6k$ ..... (i)

Ici, en comparant 6k et $3(k+1)$:

Lorsque $k \geq 4, 6k - 3(k+1) = 6k - 3k - 3 = 3k - 3 > 0$.

Donc, $6k > 3(k+1)$ ..... (ii)

D'après (i) et (ii), puisque $2^{k+1} > 6k > 3(k+1)$,

$2^{k+1} > 3(k+1)$.

Ceci montre que (A) est également vérifiée lorsque $n = k + 1$.

D'après [1] et [2], (A) est vérifiée pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à 4.

À VOUS D'ESSAYER

Lorsque n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, prouvez l'inégalité suivante :

$3^{n} > 5n + 1$

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Lorsque n est un entier naturel, prouvez l'inégalité suivante : $3^n > 2n$.

Lorsque n est un entier naturel supérieur ou égal à 4, prouvez l'inégalité suivante : $2^n > 3n + 1$.

Le défi

Lorsque $h > 0$ et n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, prouvez l'inégalité suivante :

$(1 + h)^{n} > 1 + n\,h$

2-25

MATHÉMATIQUES

Preuve de divisibilité par récurrence mathématique

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le principe de récurrence mathématique pour prouver la validité de la divisibilité.

POINT ESSENTIEL !

Lors de la preuve qu'un nombre est un multiple de a, utilisez l'expression supposée pour montrer qu'elle prend la forme a × (entier).

MISE EN ROUTE

Prouvez que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est un multiple de 9 pour tous les entiers naturels n, en utilisant la récurrence mathématique.

Méthode de résolution (Explication)

Soit (A) l'affirmation « $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est un multiple de 9 ».

[1] Lorsque $n = 1$:

$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

36 est un multiple de 9.

Donc, (A) est vérifiée lorsque $n = 1$.

[2] En supposant que (A) est vérifiée lorsque $n = k$, elle peut être exprimée en utilisant l'entier m comme suit :

$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m$

En considérant le cas où $n = k+1$:

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9m - k^3 + (k+3)^3$

$= 9m - k^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

$= 9(m + k^2 + 3k + 3)$

Puisque $m + k^2 + 3k + 3$ est un entier, $9(m + k^2 + 3k + 3)$ est un multiple de 9.

Donc, $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ est un multiple de 9, et (A) est également vérifiée lorsque $n = k+1$.

D'après [1] et [2], (A) est vérifiée pour tous les entiers naturels.

À VOUS D'ESSAYER

Prouvez que $n^3 + 2n$ est un multiple de 3 pour tous les entiers naturels n, en utilisant la récurrence mathématique.

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Prouvez que $2n^3 - 3n^2 + n$ est un multiple de 6 pour tous les entiers naturels n, en utilisant la récurrence mathématique.

Prouvez que $4n^3$ - n est divisible par 3 pour tous les entiers naturels n, en utilisant la récurrence mathématique.

Le défi

Prouvez que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$(n + 1)^n$ - 1 est un multiple de n^2.

2-26

MATHÉMATIQUES

Relations de récurrence et démonstration par récurrence

Chapitre 2 — Suites

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser la récurrence mathématique pour prouver les relations de récurrence des suites et vérifier leur validité.

MISE EN ROUTE

Pour la suite (a_n) définie par les conditions $a_1 = 3$ et $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1}$, résolvez les problèmes suivants.

Trouvez a_2, a_3, a_4 et estimez le terme général de cette suite.

Prouvez que l'estimation obtenue dans 1 est correcte en utilisant la récurrence mathématique.

Méthode de résolution (Explication)

À partir de la relation de récurrence donnée :

$a_2 = \frac{a_1^2 - 1}{1+1} = \frac{3^2 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

De même, $a_3 = 5, a_4 = 6$.

Par conséquent, nous pouvons estimer que le terme général de la suite $\{a_n\} : 3, 4, 5, 6, \ldots$ est $a_n = n + 2$.

Soit (A) l'affirmation $a_n = n + 2$.

[1] Lorsque $n = 1$, en substituant $n = 1$ dans (A), nous obtenons :

$a_1 = 1 + 2 = 3$.

Donc, (A) est vérifiée lorsque $n = 1$.

[2] En supposant que (A) est vérifiée lorsque $n = k$, $a_k = k + 2$.

À ce moment-là, en trouvant a_{k+1} à partir de la relation de récurrence donnée :

$a_{k+1} = \frac{a_k^2 - 1}{k+1}$

$= \frac{(k+2)^2 - 1}{k+1}$

$= \frac{k^2 + 4k + 3}{k+1}$

$= k + 3 = (k+1) + 2$

Ceci montre que (A) est également vérifiée lorsque $n = k + 1$.

D'après [1] et [2], (A) est vérifiée pour tous les entiers naturels.

Donc, l'estimation obtenue dans 1 est correcte.

À VOUS D'ESSAYER

Pour la suite définie par $a_1 = -1$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 2na_n - 2$, résolvez les problèmes suivants.

Trouvez a_2, a_3, a_4 et estimez le terme général.

Prouvez que l'estimation obtenue dans 1 est correcte en utilisant la récurrence mathématique.

Travaillez avec un camarade

En groupe, résolvez « À vous d'essayer », puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

Pour la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n^2 - n^2 a_n + (n+1)^2$, résolvez les problèmes suivants.

(a) Trouvez a_2, a_3, a_4 et estimez le terme général.

(b) Prouvez que l'estimation obtenue dans (a) est correcte en utilisant la récurrence mathématique.

Pour la suite définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n - 4}{a_n - 3}$, résolvez les problèmes suivants.

(a) Trouvez a_2, a_3, a_4 et estimez le terme général.

(b) Prouvez que l'estimation obtenue dans (a) est correcte en utilisant la récurrence mathématique.

Le défi

Trois nombres A, B, C dans cet ordre forment une suite géométrique de raison r. Sachant en plus que $A, 2B, C$ dans cet ordre forment une suite arithmétique, déterminez les valeurs possibles de r.

Réflexion

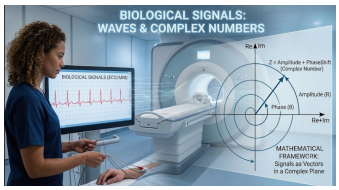
Comment la récurrence mathématique nous aide-t-elle à nous assurer de la justesse d'une formule générale pour une suite définie par une relation de récurrence ? Expliquez votre réponse.

3-1

MATHÉMATIQUES

Nombres complexes

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations | Concept 1 — Forme algébrique d'un nombre complexe



Lorsqu'un technicien médical surveille le cœur d'un patient à l'aide d'un électrocardiogramme (ECG), l'écran affiche un motif rythmique en forme d'onde. De même, un appareil d'imagerie par résonance magnétique (IRM) utilise de puissants champs magnétiques et des ondes radio pour construire des images détaillées des organes internes.

Pour certains signaux périodiques, les nombres complexes permettent de représenter conjointement et efficacement l'amplitude et la phase. Cette représentation dans un plan facilite les calculs utilisés dans le traitement du signal.

QUESTION DIRECTRICE

Comment les nombres complexes élargissent-ils notre compréhension des mathématiques afin de résoudre des problèmes qui paraissent impossibles avec les seuls nombres réels ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Identifier un nombre complexe $z = a +$ bi et ses composantes : partie réelle et partie imaginaire.

POINT ESSENTIEL !

• Le nombre dont le carré vaut -1 est noté i : $i^2 = -1$.

• Un nombre écrit sous la forme $a +$ bi, où a et b sont deux nombres réels, est appelé nombre complexe. a est la partie réelle et b la partie imaginaire — le symbole i n'appartient pas à la partie imaginaire.

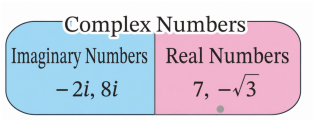
Si $b = 0, a +$ bi est un nombre réel. Si $b \neq 0, a +$ bi est un nombre complexe non réel. Les nombres réels font donc partie des nombres complexes. Si a = 0, on parle d'un imaginaire pur.

• Égalité de nombres complexes :

si a, b, c et d sont réels et $a +$ bi $= c +$ di, alors $a = c$ et $b = d$.

Si a et b sont réels et $a +$ bi $= 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$, car $0 = 0 + 0i$.

Les parties réelles des deux membres sont égales, de même que leurs parties imaginaires.



MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Indiquez les parties réelle et imaginaire de chacun des nombres complexes :

(a) $3-2i$, (b) $\frac{4-\sqrt{5}i}{3}$, (c) -8, (d) 2i.

2. Déterminez les nombres réels x et y vérifiant :

$(2+i)x+(1+i)y=2+3i.$

EXPLICATION 1

(a) $3-2i$: partie réelle $=3$, partie imaginaire $=-2$.

(b) $\frac{4-\sqrt{5}i}{3}=\frac{4}{3}-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)i$: partie réelle $=\frac{4}{3}$, partie imaginaire $=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Il faut d'abord écrire le nombre sous la forme $a+$ bi.

(c) $-8=-8+0i$: partie réelle $=-8$, partie imaginaire $=0$.

(d) $2i=0+2i$: partie réelle $=0$, partie imaginaire $=2$.

Remarque — Le symbole i n'est pas inclus dans la valeur de la partie imaginaire.

EXPLICATION 2

Développons le membre gauche et regroupons les parties réelle et imaginaire :

$(2+i)x+(1+i)y=2+3i$

$2x+\text{ ix }+y+\text{ iy }=2+3i$

$(2x+y)+(x+y)i=2+3i.$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$2x+y=2$ et $x+y=3.$

La résolution du système donne $x=-1$ et $y=4.$

À VOUS D'ESSAYER

1. Indiquez les parties réelle et imaginaire :

(a) $-3+5i$, (b) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, (c) 1, (d) 3i.

2. Déterminez les nombres réels x et y vérifiant :

(a) $(x-6)+(x+3y)i=0,$ (b) $(3+2i)x+(4-i)y=6-7i.$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez cette rubrique en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Indiquez les parties réelle et imaginaire de chacun des nombres complexes :

(a) $2+5i$, (b) $-25+13i$, (c) $\frac{2-\sqrt{5}i}{3}$, (d) $\frac{7-\sqrt{2}i}{2}$,

(e) -4, (f) $\frac{1}{4}$, (g) $\sqrt{3}\,i$, (h) $-i$.

2. Déterminez les nombres réels x et y vérifiant :

(a) $(2x+y)+(3x-y)i=8+7i$,

(b) $(x+1)-5i=4+(2y+1)i$,

(c) $(x-2)+(x+y)i=0$,

(d) $(3+2i)x+(1-i)y=7+3i$,

(e) $(1-\mathrm{i})(\mathrm{x}+\mathrm{yi})=2+\mathrm{i}$.

★ DÉFI — INGÉNIERIE DU SON



Dans un modèle simplifié de signal audio, les nombres complexes représentent conjointement une amplitude et une phase. Les paramètres réels x et y des deux trajets sont définis par la condition algébrique suivante :

$(1+2i)(x+i)=x(y+i)$.

Déterminez les valeurs exactes des nombres réels x et y.

3-2

MATHÉMATIQUES

Opérations sur les nombres complexes (1)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

• Les calculs sur les nombres complexes s'effectuent comme sur les expressions algébriques. Si i^2 apparaît, remplacez-le par -1.

• Pour calculer une puissance de i, exprimez-la à l'aide de i^2.

Exemples : $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$, $i^7 = i(i^2)^3 = i(-1)^3 = -i$.

Les puissances de i sont périodiques de période 4 :
$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$. Réduisez donc l'exposant modulo 4.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Identifier les composantes d'un nombre complexe et effectuer les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division sous forme simplifiée.

MISE EN ROUTE

Calculez :

(a) $(3-2i)-(2+5i)$,

(b) $(i-2)^2$,

(c) $i^6 + i^{27} + i^{17}$.

EXPLICATION

(a) $(3-2i)-(2+5i) = 3-2i-2-5i = 1-7i$.

(b) $(i-2)^2 = i^2 - 4i + 4 = -1 - 4i + 4 = 3 - 4i$.

(c) $i^6 + i^{27} + i^{17} = (i^2)^3 + i(i^2)^{13} + i(i^2)^8$

$= (-1)^3 + i(-1)^{13} + i(-1)^8 = -1 - i + i = -1$.

ERREURS FRÉQUENTES

— Ne mélangez pas les parties réelle et imaginaire. Lors du développement, n'oubliez pas que $i \times i = i^2 = -1$.

À VOUS D'ESSAYER

Calculez :

(a) $(4+6i)+(-3+2i)$,

(b) $(2+3i)(1-2i)$,

(c) $i + i^2 + i^3 + i^4$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES

Calculez :

(a) $(7+4i)-(3+5i)$,

(b) $(-4+3i)+(5-6i)$,

(c) $(3-3i)-(5-3i)$,

(d) $\left(\sqrt{2}+3i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$,

(e) $(2+3i)^2+(5+8i)$,

(f) $\left(\frac{2}{5}-\frac{i}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{3i}{7}\right)^2$,

(g) $(2i-1)^2$,

(h) $\left(\frac{2}{i}+i\right)^2\left(\frac{2}{i}-i\right)^2$,

(i) $(2+i)^3+(2-i)^3$,

(j) i^5+i^3+i,

(k) $i^9+i^{14}+i^{11}$,

(l) $i^{12}+i^{18}+i^{15}$.

★ DÉFI

Sachant que x est un nombre réel, résolvez l'équation :

$(7x-7i)(x^2+xi)=14x^2i^{40}$.

3-3

MATHÉMATIQUES

Opérations sur les nombres complexes (2)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

• Les nombres complexes $a+bi$ et $a-bi$ sont conjugués. Si $z=a+bi$, on note $\bar{z}=a-bi$ son conjugué.

• Le produit de deux conjugués est réel. Exemple :
$(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=13$.

• Pour une fraction dont le dénominateur est complexe non réel, multipliez numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur afin d'obtenir un dénominateur réel.

Exemple : $\frac{1-i}{2+3i}=\frac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{-1-5i}{13}$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Identifier les composantes d'un nombre complexe et effectuer les quatre opérations en donnant la forme la plus simple.

MISE EN ROUTE

1. Donnez le conjugué de :

(a) $2+3i$, (b) $7-\sqrt{11}\,i$, (c) 6, (d) $-5i$.

2. Calculez et écrivez sous la forme $a+$ bi :

(a) $\frac{2+i}{2-i}$, (b) $\frac{3-i}{2i}$.

EXPLICATION 1

On change le signe de la partie imaginaire :

(a) $2-3i$, (b) $7+\sqrt{11}\,i$, (c) 6, (d) 5i.

Le conjugué de $6+0i$ est $6-0i$, celui de $0-5i$ est $0+5i$.

EXPLICATION 2(a)

$\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{4+4i+i^2}{4-i^2}=\frac{3+4i}{5}$

$=\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)i$.

EXPLICATION 2(b)

$\frac{3-i}{2i} = \frac{(3-i)(-2i)}{2i(-2i)}$

$= \frac{-6i+2i^2}{-4i^2}$

$= \frac{-6i-2}{4} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)i.$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $-2i$.

À VOUS D'ESSAYER

1. Donnez le conjugué de :

(a) $1-4i$, (b) $\sqrt{2}+\sqrt{10}\,i$, (c) 2, (d) $-8i$.

2. Calculez sous la forme $a+$ bi :

(a) $\frac{3+i}{1+2i}$, (b) $\frac{1-i}{i}$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES

1. Donnez le conjugué de :

(a) $3+4i$, (b) $9+8i$, (c) $8+\sqrt{3}\,i$, (d) 5, (e) -15, (f) $\sqrt{7}$, (g) i, (h) $-50i$, (i) $\sqrt{6}\,i$.

2. Calculez sous la forme $a+$ bi :

(a) $\frac{1+i}{1-i}$, (b) $\frac{3+i}{2+i}$, (c) $\frac{5+i}{5-i}$, (d) $\frac{5i}{1+2i}$,

(e) $\frac{5i}{4+3i}$, (f) $\frac{1-3i}{3-2i}$, (g) $\frac{1}{i}$, (h) $\frac{2+i}{3i}$.

★ DÉFI

Effectuez l'opération et écrivez le résultat sous forme standard :

$\left[\frac{i(10-12i)}{(2+i)(-1+4i)}\right]^{2027}$.

3-4

MATHÉMATIQUES

Racines carrées des nombres négatifs

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

• Pour a > 0, la racine principale est $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$, les deux racines carrées de −a sont $\pm i\sqrt{a}$.

• Réécrivez d'abord les racines de nombres négatifs en fonction de i. La règle $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, valable pour a, b ≥ 0, ne s'étend pas automatiquement aux nombres complexes.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer les racines carrées de nombres négatifs et de nombres complexes.

MISE EN ROUTE

1. Exprimez les racines carrées de -6 en fonction de i.

2. Calculez :

(a) $\sqrt{-12} \times \sqrt{-6}$,

(b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-18}}$.

EXPLICATION

1. Les racines carrées de -6 sont $\pm\sqrt{-6} = \pm i\sqrt{6}$.

2. (a) $\sqrt{-12} \times \sqrt{-6} = i\sqrt{12} \times i\sqrt{6}$

$= 2i\sqrt{3} \times i\sqrt{6} = 6i^2\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$.

(b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-18}} = \frac{2\sqrt{2}}{3i\sqrt{2}} = \frac{2}{3i} = -\left(\frac{2}{3}\right)i$.

On peut multiplier numérateur et dénominateur par $-3i$, ou plus simplement par i.

IDÉES FAUSSES

— Pour n > 0, la racine principale de −n n'est pas $-\sqrt{n}$: elle vaut $i\sqrt{n}$.

À VOUS D'ESSAYER

1. Exprimez en fonction de i :

(a) $\sqrt{-7}$, (b) $\sqrt{-27}$, (c) $-\sqrt{-12}$, (d) les racines carrées de -12.

2. Calculez :

(a) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6}$, (b) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$, (c) $\left(3+\sqrt{-2}\right)^2$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES

1. Exprimez en fonction de i :

(a) $\sqrt{-2}$, (b) $\sqrt{-9}$, (c) $\sqrt{-45}$, (d) $-\sqrt{-24}$,

(e) $-\sqrt{-36}$, (f) les racines carrées de -2,

(g) les racines carrées de -18, (h) les racines carrées de -16.

2. Calculez :

(a) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-6}$, (b) $\sqrt{-28} \times \sqrt{-35}$,

(c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$, (d) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-12}}$,

(e) $\sqrt{-32}+\sqrt{-98}+\sqrt{-8}$,

(f) $\sqrt{-98}-\sqrt{-72}+\sqrt{-50}$,

(g) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{-5}\right)^2$,

(h) $\left(2+\sqrt{-3}\right)\left(2-\sqrt{-3}\right)$.

★ DÉFI

Résolvez : $(2x-8)^2=-10$.

RÉFLÉCHIR

Le passage de la droite réelle à un plan bidimensionnel permet notamment de calculer l'impédance des tissus et de traiter les signaux audio. Comment cela modifie-t-il votre conception de ce qui rend un objet mathématique « réel » ou « imaginaire » ?

3-5

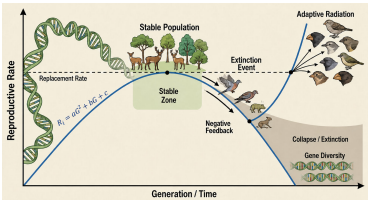
MATHÉMATIQUES

Résolution des équations du second degré

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

Concept 2 · Équations du second degré

Dans certains modèles simplifiés, une condition d'équilibre ou une contrainte géométrique conduit à une équation du second degré. Ses solutions donnent les valeurs possibles dans le cadre du modèle, leur interprétation exige ensuite de vérifier les hypothèses et le domaine admissible.



OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des équations du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.

QUESTION DIRECTRICE — Comment résoudre une équation du second degré et interpréter ses solutions en tenant compte des conditions du problème ?

POINT ESSENTIEL !

Lorsque le radicant est négatif, exprimez d'abord la racine carrée en fonction de i.

MÉTHODES DE RÉSOLUTION

(i) En utilisant la notion de racine carrée

Les solutions de $x^2 = a$ sont $x = \pm\sqrt{a}$.

Pour $(x+m)^2 = a$: $x + m = \pm\sqrt{a}$, donc $x = -m \pm \sqrt{a}$.

(ii) Par factorisation

$\mathrm{x}(\mathrm{x}-\mathrm{a}) = 0 \implies \mathrm{x} = 0$ ou $x = a$.

$(\mathrm{x}-\mathrm{a})(\mathrm{x}-\mathrm{b}) = 0 \implies \mathrm{x} = \mathrm{a}$ ou $x = b$.

$(\mathrm{x}-\mathrm{a})^2 = 0 \implies \mathrm{x} = \mathrm{a}$.

$(\mathrm{ax}-\mathrm{b})(\mathrm{cx}-\mathrm{d}) = 0 \implies \mathrm{x} = \frac{b}{a}$ ou $x = \frac{d}{c}$.

(iii) Avec la formule quadratique

Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

MISE EN ROUTE

Résolvez les équations du second degré suivantes :

(a) $x^2+8=0$ (b) $2x^2-7x-9=0$

(c) $2x^2+2\sqrt{6}x+11=0$

EXPLICATION

(a) $x^2+8=0$

$x^2=-8$

$x=\pm\sqrt{-8}=\pm i\sqrt{8}=\pm 2i\sqrt{2}$.

(b) $2x^2-7x-9=0$

$(x+1)(2x-9)=0$

$x=-1$ ou $x=\frac{9}{2}$.

(c) $2x^2+2\sqrt{6}x+11=0$

$$x=\frac{-2\sqrt{6}\pm\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2-4\times 2\times 11}}{2\times 2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{6}\pm\sqrt{-64}}{4}$$

$$=\frac{-2\sqrt{6}\pm 8i}{4}=\frac{-\sqrt{6}\pm 4i}{2}.$$

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les équations du second degré suivantes :

(a) $x^2+4=0$ (b) $(x-3)^2=-8$

(c) $2x^2+5x-3=0$ (d) $2x^2+2\sqrt{3}x+5=0$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe pour résoudre cette partie, puis discutez vos réponses.

EXERCICES — RÉSOUDRE LES PROBLÈMES SUIVANTS

1. Résolvez les équations du second degré suivantes.

(a) $x^2 + 49 = 0$

(b) $9x^2 - 4 = 0$

(c) $(x-2)^2 = 5$

(d) $(x+6)^2 = -6$

(e) $2x^2 + 7x = 0$

(f) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

(g) $x^2 + x + 1 = 0$

(h) $3x^2 - 5x + 3 = 0$

(i) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5 = 0$

(j) $3x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

2. Résolvez les équations du second degré suivantes.

(a) $x^2 - x + 2 = 0$

(b) $(x+4)^2 = -18$

(c) $x^2 - 12 = 0$

(d) $3x^2 - 4x - 1 = 0$

(e) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(f) $4x^2 + 3 = 0$

(g) $3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

(h) $6x^2 - 12x + 15 = 0$

(i) $(2x-3)^2 = 7$

★ DÉFI

Une équipe de recherche étudie les vibrations d'une membrane mince dans un dispositif médical utilisant des ultrasons. La relation entre l'amplitude vibratoire x et le taux de transfert d'énergie R est :

$R = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 2.$

Déterminez les valeurs de x qui mettent le système à l'équilibre (lorsque le taux de transfert d'énergie est nul), puis expliquez la signification du résultat.

3-6

MATHÉMATIQUES

Discriminant des équations du second degré

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

• L'expression qui permet de déterminer la nature et le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'appelle le discriminant, noté D.

$D = b^2 - 4ac$.

• Si $D > 0$: deux solutions réelles distinctes.

• Si $D = 0$: une solution réelle double.

• Si $D < 0$: deux solutions complexes non réelles distinctes.

Ainsi, l'équation admet des solutions réelles lorsque $D \geq 0$.

Le discriminant est l'expression placée sous la racine carrée dans la formule quadratique.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer la nature des racines à l'aide du discriminant et l'utiliser pour résoudre des problèmes mathématiques.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la nature des solutions de $3x^2 + 4x + 7 = 0$.
2. Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $x^2 -$ mx $+m^2 - 3m - 9 = 0$ admet des solutions réelles.
3. k étant une constante réelle, déterminez la nature des solutions de $x^2 +$ kx $+3 - k = 0$.

EXPLICATION — 1

Soit D le discriminant de $3x^2 + 4x + 7 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \times 3 \times 7 = 16 - 84 = -68 < 0$.

L'équation admet donc deux solutions complexes non réelles distinctes.

IDÉES FAUSSES

— $D < 0$ ne signifie pas « aucune solution », mais deux solutions complexes. $D = 0$ donne une solution réelle double, $D > 0$ donne deux solutions réelles distinctes.

EXPLICATION — 2

Soit D le discriminant de $x^2 -$ mx $+m^2 - 3m - 9 = 0$. Comme $D \geq 0$:

$(-m)^2 - 4(m^2 - 3m - 9) \geq 0$

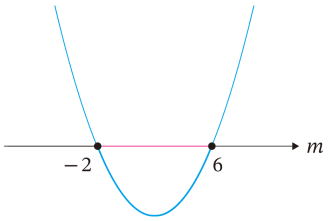
$-3m^2 + 12m + 36 \geq 0$

$3m^2 - 12m - 36 \leq 0$

$m^2 - 4m - 12 \leq 0$

$(m + 2)(m - 6) \leq 0$

Donc $-2 \leq m \leq 6$.



EXPLICATION — 3

Soit D le discriminant de $x^2 +$ kx $+3 - k = 0$.

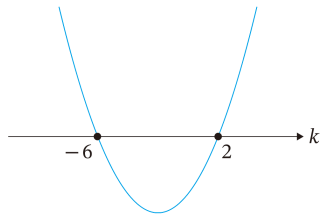
$D = k^2 - 4(3 - k) = k^2 + 4k - 12 = (k - 2)(k + 6)$.

[1] $D > 0$: $(k - 2)(k + 6) > 0$, donc $k < -6$ ou $k > 2$, deux solutions réelles distinctes.

[2] $D = 0$: $(k - 2)(k + 6) = 0$, donc $k = -6$ ou $k = 2$, une solution réelle double.

[3] $D < 0$: $(k - 2)(k + 6) < 0$, donc $-6 < k < 2$, deux solutions complexes non réelles distinctes.

Bilan : $k < -6$ ou k > 2 $\Longrightarrow$ deux solutions réelles distinctes, $k = -6$ ou 2 $\Longrightarrow$ une solution double, −6 < k < 2 $\Longrightarrow$ deux solutions complexes non réelles distinctes.



À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la nature des solutions :

(a) $3x^2 - 5x + 4 = 0$ (b) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

(c) $25x^2 - 10x + 1 = 0$.

2. Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $x^2 - 2$mx $+m + 2 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles distinctes.

3. a étant une constante réelle, déterminez la nature des solutions de $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la nature des solutions :

(a) $x^2 - 5x + 3 = 0$ (b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

(c) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

(d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ (e) $x^2 - 3x + 5 = 0$

(f) $x^2 - x - 2 = 0$.

2. Résolvez les problèmes suivants.

(a) Déterminez la ou les valeurs de a pour lesquelles $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$ admet une solution double.

(b) Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $x^2 + (m+6)x - 2m = 0$ admet deux solutions complexes non réelles distinctes.

(c) Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles $x^2 - 2$mx $+2m^2 - 3m = 0$ admet des solutions réelles.

★ DÉFI

Résolvez les problèmes suivants.

(a) a étant une constante réelle, déterminez la nature des solutions de $x^2 + ax - a = 0$.

(b) k étant une constante réelle, déterminez la nature des solutions de $x^2 - (k+2)x + k^2 = 0$.

(c) a étant une constante réelle, déterminez la nature des solutions de $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 3a + 4 = 0$.

3-7

MATHÉMATIQUES

Relations entre les racines et les coefficients (1)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

• Relation entre les racines et les coefficients

Si α et β sont les deux solutions de $ax^2+bx+c=0$:

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

• Pour calculer une expression contenant les solutions d'une équation du second degré, déterminez d'abord $\alpha+\beta$ et αβ, puis réécrivez l'expression en fonction de ces deux quantités.

Transformations usuelles :

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Établir des relations mathématiques entre les racines d'une équation du second degré et ses coefficients, puis les utiliser pour résoudre des problèmes.

IDÉES FAUSSES

Ne pas inverser la somme et le produit : la somme vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit $\frac{c}{a}$. Ne pas oublier de diviser par a.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la somme et le produit des deux solutions de $3x^2-6x-5=0$.

2. α et β étant les solutions de $2x^2-6x-3=0$, calculez :

(a) $\alpha^2+\beta^2$ (b) $\alpha^3+\beta^3$

(c) $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}$ (d) $(\alpha+1)(\beta+1)$.

EXPLICATION — 1

Pour $3x^2-6x-5=0$, la relation entre les racines et les coefficients donne :

Somme des deux solutions : $-\frac{-6}{3}=2$.

Produit des deux solutions : $\frac{-5}{3}=-\frac{5}{3}$.

EXPLICATION — 2

Pour $2x^2 - 6x - 3 = 0$: $\alpha + \beta = 3$ et $\alpha\beta = -\frac{3}{2}$.

(a) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= 3^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 9 + 3 = 12.$

(b) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 3^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right)(3) = 27 + \frac{27}{2} = \frac{81}{2}.$

(c) $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2\beta + 2\alpha}{\alpha\beta}$

$= \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{2 \times 3}{-\frac{3}{2}} = -4.$

(d) $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1$

$= -\frac{3}{2} + 3 + 1 = \frac{5}{2}.$

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la somme et le produit des solutions de $4x^2 + 2x - 7 = 0$.

2. α et β étant les solutions de $2x^2 - 4x + 3 = 0$, calculez :

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\alpha^3 + \beta^3$

(c) $\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$ (d) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Déterminez la somme et le produit des solutions :

(a) $x^2 + x + 2 = 0$ (b) $3x^2 - 7x - 6 = 0$

(c) $5x^2 - 3 = 0$.

2. α et β étant les solutions de $x^2 - 2x + 3 = 0$, calculez :

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\alpha^3 + \beta^3$

(c) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (d) $(\alpha + 2)(\beta + 2)$.

3. α et β étant les solutions de $3x^2 + 6x - 1 = 0$, calculez :

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\alpha^3 + \beta^3$

(c) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ (d) $(\alpha - 2)(\beta - 2)$.

★ DÉFI

α et β étant les deux solutions de $2x^2 - 6x + 3 = 0$, calculez :

(a) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ (b) $(\alpha - \beta)^2$

(c) $\alpha^3 + \beta^3$ (d) $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$.

3-8

MATHÉMATIQUES

Relations entre les racines et les coefficients (2)

Relation entre deux racines · Chapitre 3

POINT ESSENTIEL !

Pour les problèmes où la relation entre les deux solutions est connue, notez α l'une des solutions et exprimez l'autre en fonction de α.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Établir des relations entre les racines d'une équation du second degré et ses coefficients, puis les utiliser pour résoudre des problèmes.

MISE EN ROUTE

La différence entre les deux solutions de $x^2-(m-1)x-6=0$ étant égale à 5, déterminez la valeur de m et les deux solutions.

EXPLICATION

Notons α une solution de $x^2-(m-1)x-6=0$. L'autre solution s'écrit $\alpha+5$.

D'après les relations entre les racines et les coefficients :

$\alpha+(\alpha+5)=m-1\ldots$ (i)

$\alpha(\alpha+5)=-6\ \ldots$ (ii)

La résolution de (ii) donne $\alpha=-2$ ou $\alpha=-3$.

Si α = −2, l'équation (i) donne $m=2$ et l'autre solution vaut $\alpha+5=3$.

Si α = −3, l'équation (i) donne $m=0$ et l'autre solution vaut $\alpha+5=2$.

Donc :

• pour $m=2$, les solutions sont -2 et 3,

• pour $m=0$, les solutions sont -3 et 2.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Une solution de $x^2 - 8x + k = 0$ étant le triple de l'autre, déterminez k et les deux solutions.
2. La différence entre les solutions de $x^2 - (m+1)x + 2 = 0$ étant égale à 1, déterminez m et les deux solutions.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Une solution de $x^2 + 6x + m = 0$ étant le double de l'autre, déterminez m et les solutions.
2. Une solution de $8x^2 -$ mx $+1 = 0$ étant le double de l'autre, déterminez m et les solutions.
3. La différence entre les solutions de $x^2 + 6x + m = 0$ étant égale à 4, déterminez m et les solutions.
4. La différence entre les solutions de $4x^2 +$ mx $+3 = 0$ étant égale à 1, déterminez m et les solutions.
5. Le rapport des deux solutions de $x^2 - 2x + m = 0$ étant 2 : 3, déterminez m et les solutions.
6. Une solution de $x^2 - 6x + k = 0$ étant le carré de l'autre, déterminez k et les solutions.

★ DÉFI

Les équations $x^2 + ax + bc = 0$ et $x^2 + bx +$ ca $= 0$ ont une racine commune non nulle, avec $a \neq b$. Montrez que leurs deux autres racines sont les racines de $x^2 + cx + ab = 0$, où $c \neq 0$.

3-9

MATHÉMATIQUES

Factorisation des expressions du second degré

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

Si α et β sont les solutions de $ax^2+bx+c=0$, alors :

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Attention : ne pas oublier le coefficient a de x^2.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Factoriser des expressions du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.

MISE EN ROUTE

Factorisez dans l'ensemble des nombres complexes : (a) $2x^2-3x+2$ (b) x^4+2x^2-3.

IDÉES FAUSSES

— Ne pas oublier le coefficient dominant et ne pas supposer que toute expression se factorise uniquement avec des entiers.

EXPLICATION

(a) La résolution de $2x^2-3x+2=0$ donne $x=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{4}$. Donc :

$2x^2-3x+2=2\left[x-\frac{3+i\sqrt{7}}{4}\right]\left[x-\frac{3-i\sqrt{7}}{4}\right]$.

(b) $x^4+2x^2-3=(x^2-1)(x^2+3)=(x+1)(x-1)(x^2+3)$.

Or $x^2+3=0$ donne $x=\pm i\sqrt{3}$. Ainsi :

$x^4+2x^2-3=(x+1)(x-1)\left(x+i\sqrt{3}\right)\left(x-i\sqrt{3}\right)$.

À VOUS D'ESSAYER

Factorisez dans $\mathbb{C}$: (a) x^2+2x+5 (b) $2x^2-6x+1$ (c) x^4-x^2-6.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez vos réponses.

EXERCICES

Factorisez dans $\mathbb{C}$:

(a) x^2+4x+5 (b) x^2+4x+2 (c) x^2-4x+7 (d) $2x^2-x+1$

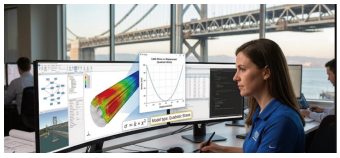
(e) $3x^2-5x+3$ (f) $2x^2-2x-1$

(g) x^4-9 (h) x^4-3x^2+2.

★ DÉFI

Dans un modèle simplifié de câble, on étudie le polynôme suivant :

$S(x)=6x^4-7x^2-3$.



Résolvez S(x) = 0. Les racines décrivent les valeurs du modèle, mais leur interprétation physique et la stabilité réelle du câble exigent des hypothèses supplémentaires.

3-10

MATHÉMATIQUES

Équations à partir de deux racines données

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Former une équation du second degré lorsque ses racines sont connues.

POINT ESSENTIEL !

Une équation du second degré ayant les deux nombres α et β pour solutions est :

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1. Formez une équation du second degré à coefficients entiers ayant $\frac{1+i}{2}$ et $\frac{1-i}{2}$ pour solutions.
2. Déterminez deux nombres dont la somme vaut -1 et le produit 2.
3. α et β étant les solutions de $x^2 + 2x - 4 = 0$, formez une équation du second degré ayant $\alpha + 2$ et $\beta + 2$ pour solutions.

EXPLICATION — 1

Pour les solutions $\frac{1+i}{2}$ et $\frac{1-i}{2}$:

Somme $= \frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2} = 1$.

Produit $= \frac{(1+i)(1-i)}{4} = \frac{1}{2}$.

Donc $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$. En multipliant par 2 :

$2x^2 - 2x + 1 = 0$.

EXPLICATION — 2

Notons α et β les deux nombres cherchés. On $a\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = 2$. Ils sont donc les solutions de $x^2 + x + 2 = 0$.

Ainsi, les deux nombres sont $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

EXPLICATION — 3

Puisque α et β sont les solutions de $x^2 + 2x - 4 = 0$:

$\alpha + \beta = -2 \ldots$ (i) et $\alpha\beta = -4 \ldots$ (ii).

Soit $x^2 + bx + c = 0$ l'équation cherchée, dont les solutions sont $\alpha + 2$ et $\beta + 2$.

$$b = -[(\alpha + 2) + (\beta + 2)]$$
$$= -(\alpha + \beta + 4) = -(-2 + 4) = -2.$$
$$c = (\alpha + 2)(\beta + 2)$$
$$= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4$$
$$= -4 + 2(-2) + 4 = -4.$$

L'équation cherchée est donc $x^2 - 2x - 4 = 0$.

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

1. Formez une équation du second degré ayant $3 + 2i$ et $3 - 2i$ pour solutions.
2. Déterminez deux nombres dont la somme et le produit valent tous deux 1.
3. α et β étant les solutions de $x^2 + x - 3 = 0$, formez une équation du second degré ayant α^2 et β^2 pour solutions.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Formez une équation du second degré ayant pour solutions :

(a) -1 et 2 (b) $1+4i$ et $1-4i$

(c) $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$.

2. Déterminez deux nombres dont :

(a) la somme vaut 2 et le produit 5, (b) la somme vaut 4 et le produit 2.

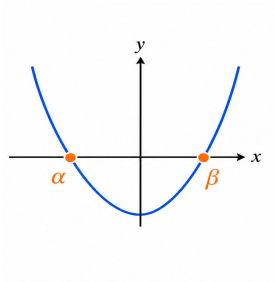
3. α et β étant les solutions de $x^2+2x+3=0$, formez une équation du second degré ayant

$\alpha+3\beta$ et $3\alpha+\beta$ pour solutions.

4. α et β étant les solutions de $x^2-2x+7=0$, formez une équation du second degré ayant α^2 et β^2 pour solutions.

5. α et β étant les solutions de $2x^2+3x+4=0$, formez une équation à coefficients du second degré entiers ayant $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ pour solutions.

★ DÉFI



Dans la figure ci-contre, α et β sont les deux racines de l'équation du second degré. Formez une équation du second degré dont les deux racines sont :

$\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$.

3-11

MATHÉMATIQUES

Signes des deux solutions

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

Pour les problèmes où les signes des solutions d'une équation du second degré sont connus, formez et résolvez simultanément les inégalités correspondant aux conditions :

(i) Deux solutions positives distinctes : $D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$.

(ii) Deux solutions négatives distinctes : $D > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$.

(iii) Solutions de signes opposés : $\alpha\beta < 0$, le discriminant n'est pas nécessaire.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Établir des relations entre les racines et les coefficients, puis étudier les signes des solutions d'une équation du second degré.

MISE EN ROUTE

L'équation $x^2 - 2\text{mx} + m + 6 = 0$ ayant deux solutions négatives distinctes, déterminez l'ensemble des valeurs du réel m.

EXPLICATION

Notons α et β les solutions et D le discriminant.

$D > 0 \Longrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 6) > 0$

$\Longrightarrow 4m^2 - 4m - 24 > 0 \Longrightarrow m^2 - m - 6 > 0$

$\Longrightarrow (m - 3)(m + 2) > 0 \Longrightarrow m < -2$ ou $m > 3$... (i).

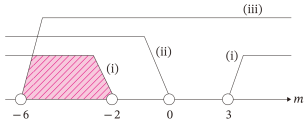
$\alpha + \beta < 0 \Longrightarrow 2m < 0 \Longrightarrow m < 0$ ... (ii).

$\alpha\beta > 0 \Longrightarrow m + 6 > 0 \Longrightarrow m > -6$ ... (iii).

L'intersection de (i), (ii) et (iii) donne : $-6 < m < -2$.

ERREUR COURANTE

— Écrire $\alpha + \beta = -2m$ au lieu de 2m conduit à une condition de signe erronée.



À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

Résolvez les problèmes suivants.

1. L'équation $x^2 + 2\text{mx} + m + 2 = 0$ ayant deux solutions positives distinctes, déterminez l'ensemble des valeurs de m.
2. Les solutions de $x^2 - (m-3)x - m - 4 = 0$ étant de signes opposés, déterminez l'ensemble des valeurs de m.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. L'équation $x^2 + 2(m-1)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$ ayant deux solutions positives distinctes, déterminez l'ensemble des valeurs de m.
2. Les solutions de $x^2 + 4\text{kx} - k - 3 = 0$ étant de signes opposés, déterminez l'ensemble des valeurs de k.
3. L'équation $x^2 + \text{kx} + 2k + 5 = 0$ ayant deux solutions négatives distinctes, déterminez l'ensemble des valeurs de k.

★ DÉFI

Dans un modèle simplifié de batterie, x est une variable réelle et m un paramètre. On étudie l'équation :

$x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0.$



Si l'équation admet deux solutions réelles distinctes, analysez l'ensemble des valeurs de m lorsque :

(a) les deux solutions sont positives,

(b) les deux solutions sont négatives,

(c) les solutions sont de signes opposés. Ces cas classent les racines du modèle, ils ne suffisent pas à caractériser la performance réelle d'une batterie.

RÉFLÉCHIR

Comment l'analyse des propriétés d'une équation — nombre de racines, somme et produit — sans la résoudre entièrement peut-elle vous aider à mieux comprendre les mathématiques ?

3-12

MATHÉMATIQUES

Théorème du reste (1)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations



Un modèle polynomial peut approximer des données économiques ou sociales sur un intervalle donné. Évaluer ce modèle à une valeur précise consiste à calculer l'image de cette valeur, cela ne garantit pas une prévision fiable hors du domaine étudié.

Le théorème du reste évalue rapidement le modèle pour une année donnée, par exemple P(5). Le théorème des facteurs repère les valeurs qui annulent le modèle. La division synthétique teste rapidement des valeurs et simplifie les calculs sur de grands ensembles de données.

QUESTION DIRECTRICE — Comment le théorème du reste permet-il d'évaluer rapidement un modèle polynomial en une valeur donnée ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le théorème du reste pour diviser efficacement des polynômes et résoudre des problèmes mathématiques portant sur des fonctions polynomiales.

POINT ESSENTIEL !

THÉORÈME DU RESTE

Le reste de la division d'un polynôme P(x) par $x-a$ est P(a).

Le reste de la division de P(x) par $ax-b$ est $P\left(\frac{b}{a}\right)$. Cette formule suppose a ≠ 0.

Exemples : par $x-4$, le reste est P(4), par $4x+3$, le reste est $P\left(-\frac{3}{4}\right)$.

En effet, si $P(x)=Q(x)(x-a)+R$, alors $P(a)=R$.

MISE EN ROUTE

1. Déterminez le reste de la division de $3x^4-8x^3-5x^2+12$ par $3x-2$.
2. Le reste de la division de x^3+ax^2+3x+1 par $x+3$ étant 4, déterminez a.

EXPLICATION — 1

Soit $P(x)=3x^4-8x^3-5x^2+12$. Pour une division par $3x-2$, on substitue $x=\frac{2}{3}$:

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^4-8\left(\frac{2}{3}\right)^3-5\left(\frac{2}{3}\right)^2+12=8.$$

Le reste est donc 8.

EXPLICATION — 2

Soit $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$. Pour une division par $x + 3$, on substitue $x = -3$:

$P(-3) = (-3)^3 + a(-3)^2 + 3(-3) + 1 = 9a - 35$.

Or le reste vaut 4 : 9a − 35 = 4, d'où $a = \frac{13}{3}$.

IDÉE FAUSSE

— Pour le diviseur $3x - 2$, il faut substituer $x = \frac{2}{3}$, et non $x = 2$.

À VOUS D'ESSAYER

1. Déterminez le reste de la division de $x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ par $2x - 1$.
2. Le reste de la division de $x^3 + ax^2 + 3x + 1$ par $x - 3$ étant 1, déterminez a.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe, puis discutez vos réponses.

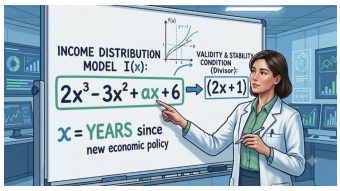
EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1. Reste de $(x^3 + 2x^2 - 3x - 4) \div (x + 2)$.
2. Reste de $(3x^3 + 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 1)$.
3. Reste de $(6x^3 - x^2 + x - 2) \div (3x - 2)$.
4. Reste de $(4x^3 - 2x^2 - 4x + 3) \div (2x + 1)$.
5. Si le reste de $(x^3 - x^2 + ax - 4) \div (x + 1)$ vaut -2, déterminez a.
6. Si le reste de $(x^3 + 4x^2 - 5x + a) \div (x + 3)$ vaut 8, déterminez a.
7. Si $x^3 - 3x^2 + 4x + a$ est divisible par $x - 2$, déterminez a.

★ DÉFI

Un chercheur modélise la répartition des revenus par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 6$, où x est le nombre d'années écoulées depuis l'adoption d'une politique économique. On suppose que $2x + 1$ est un facteur de P(x).



1. Déterminez a.
2. Discutez mathématiquement : que devient a si le diviseur est x + 2 ? Comment le choix du diviseur agit-il sur a ? Un polynôme peut-il être divisible par plusieurs facteurs linéaires ? À quelles conditions ?

3-13

MATHÉMATIQUES

Théorème du reste (2)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

• Appliquer efficacement le théorème du reste à la division de polynômes.

POINT ESSENTIEL !

• Si P(x) est divisé par une expression quadratique $(x-\alpha)(x-\beta)$, le quotient est Q(x) et le reste est $ax+b$:

$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b.$

• Lorsqu'on remplace x par α ou β, le terme $(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$ devient nul.

• Résoudre des problèmes portant sur des fonctions polynomiales.

Le reste est nul ou de degré strictement inférieur à 2 : il peut donc être constant, y compris égal à zéro.

$A=B\times Q+R$

MISE EN ROUTE

Lorsqu'un polynôme P(x) est divisé par $x-1$, le reste est 3, lorsqu'il est divisé par $x+3$, le reste est -5. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2+2x-3.

EXPLICATION

Soit Q(x) le quotient et $ax+b$ le reste de la division de P(x) par x^2+2x-3.

$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b.$

Factorisons le diviseur quadratique :

$P(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b.$

Comme le reste de la division par $x-1$ vaut 3, alors $P(1)=3$:

$P(1)=(1-1)(1+3)Q(1)+a+b=a+b$, d'où $a+b=3\ldots$ (i).

Comme le reste de la division par $x+3$ vaut -5, alors $P(-3)=-5$:

$P(-3)=(-3-1)(-3+3)Q(-3)-3a+b=-3a+b,$

d'où $-3a+b=-5$ … (ii).

La résolution du système formé par (i) et (ii) donne $a=2$ et $b=1$.

Par conséquent, le reste demandé est $2x+1$.

À VOUS D'ESSAYER

Lorsqu'un polynôme P(x) est divisé par $x-2$, le reste est 3, lorsqu'il est divisé par $x+3$, le reste est -7. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2+x-6.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Collaborez avec votre groupe pour résoudre cette activité, puis discutez la réponse.

EXERCICES — Résolvez les problèmes suivants.

1. Lorsqu'un polynôme P(x) est divisé par $x-1$, le reste est 5, lorsqu'il est divisé par $x+2$, le reste est -1. Déterminez le reste de la division de P(x) par $(x-1)(x+2)$.

2. Lorsqu'un polynôme P(x) est divisé par $x-2$, le reste est 4, lorsqu'il est divisé par $x+3$, le reste est -11. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2+x-6.

★ DÉFI

Un polynôme P(x) est divisible par $x-1$ et laisse un reste égal à −4 lorsqu'il est divisé par $x+3$.

Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2+2x-3.

3-14

MATHÉMATIQUES

Théorème du reste (3)

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

- Appliquer efficacement le théorème du reste.

POINT ESSENTIEL !

- Si P(x) est divisé par une expression quadratique $(x-\alpha)(x-\beta)$, le quotient est Q(x) et le reste est $ax+b$:

$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b.$

- Résoudre des problèmes sur les fonctions polynomiales.

Le degré du reste est inférieur à celui du diviseur.

Rappel : $A=B\times Q+R$

MISE EN ROUTE

Un polynôme P(x) laisse le reste $7x+6$ lorsqu'il est divisé par x^2-x-6, et le reste $4x-3$ lorsqu'il est divisé par x^2+2x-3. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2+x-2.

EXPLICATION

Soit Q(x) le quotient et $ax+b$ le reste de la division de P(x) par x^2+x-2 :

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b\ldots$ (i).

Soit $Q_1(x)$ le quotient de la division de P(x) par x^2-x-6. Puisque le reste est $7x+6$:

$P(x)=(x^2-x-6)Q_1(x)+7x+6$

$=(x+2)(x-3)Q_1(x)+7x+6.$

Ainsi $P(-2)=-14+6=-8$. D'après (i), $P(-2)=-2a+b$, donc $-2a+b=-8$ … (ii).

De même, soit $Q_2(x)$ le quotient de la division de P(x) par x^2+2x-3. Puisque le reste est $4x-3$:

$P(x)=(x^2+2x-3)Q_2(x)+4x-3$

$=(x-1)(x+3)Q_2(x)+4x-3.$

Ainsi $P(1)=4-3=1$. D'après (i), $P(1)=a+b$, donc $a+b=1$ … (iii).

La résolution de (ii) et (iii) donne $a=3$ et $b=-2$. Le reste demandé est donc $3x-2$.

À VOUS D'ESSAYER

Un polynôme P(x) laisse le reste $3x+2$ lorsqu'il est divisé par x^2-x-2, et le reste $7x-6$ lorsqu'il est divisé par x^2+2x-3. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2-1.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez l'activité en groupe, puis discutez la réponse.

EXERCICES — Résolvez les problèmes suivants.

1. P(x) laisse le reste $2x-2$ lorsqu'il est divisé par x^2-2x-3, et le reste $-x+7$ lorsqu'il est divisé par x^2-4. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2-x-2.
2. P(x) laisse le reste $-x+4$ lorsqu'il est divisé par x^2-3x+2, et le reste 3x lorsqu'il est divisé par x^2-4x+3. Déterminez le reste de la division de P(x) par x^2-5x+6.
3. P(x) laisse le reste $x-5$ lorsqu'il est divisé par $(x+1)^2$, et le reste 6 lorsqu'il est divisé par $x-2$. Déterminez le reste de la division de P(x) par $(x+1)^2(x-2)$.

★ DÉFI

Déterminez exactement le reste de la division de $x^{57}+57$ par $x+1$.

3-15

MATHÉMATIQUES

Division synthétique

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

Lorsqu'on divise un polynôme par une expression linéaire $x-a$, la division synthétique permet de déterminer facilement le quotient et le reste. La méthode présentée s'applique directement à un diviseur unitaire x − a.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser la division synthétique pour simplifier et effectuer la division de polynômes.

ERREURS FRÉQUENTES

- Oublier d'insérer le coefficient 0 d'un terme absent.
- Confondre les coefficients du quotient avec le reste.

MISE EN ROUTE

À l'aide de la division synthétique, déterminez le quotient et le reste de la division de $x^3+5x+11$ par $x+2$.

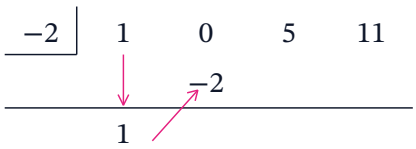
EXPLICATION — Étapes de la division synthétique

1. Relevez les coefficients de $x^3+5x+11$: 1, 0, 5, 11.

Comme le terme en x^2 est absent, son coefficient est 0.

2. Puisque le diviseur est $x+2=x-(-2)$, écrivez −2 à gauche.

3. Abaissez le premier coefficient 1 sans le modifier, multipliez-le par -2, puis inscrivez le résultat sur la deuxième ligne.



4. Additionnez verticalement les deux nombres.

5. Répétez les étapes 3 et 4 jusqu'à compléter l'extrémité droite de la troisième ligne.

Schéma final :

	1	0	5	11
−2		−2	4	−18
	1	−2	9	−7

De droite à gauche, on lit : le reste, le terme constant du quotient, puis les coefficients de x, x^2, …

Le quotient est x^2-2x+9 et le reste est -7.

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez cette activité en groupe, puis discutez les réponses.

À l'aide de la division synthétique, déterminez le quotient et le reste de la division de A par B :

(a) $A = x^3 + 5x - 6, B = x - 1.$

(b) $A = 3x^3 - 5x^2 - 3x - 1, B = x - 3.$

EXERCICES

À l'aide de la division synthétique, déterminez le quotient et le reste de la division de A par B :

(a) $A = x^3 - 5x + 6, B = x - 2.$

(b) $A = x^3 + 2x^2 - x - 3, B = x - 1.$

(c) $A = 4x^2 - 2x + 2, B = x - 1.$

(d) $A = 3x^4 + 5x^3 - 2x - 12, B = x + 2.$

★ DÉFI

Le polynôme $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x - 3$ possède une intersection avec l'axe des abscisses en $x = \frac{1}{2}$, de multiplicité 2.

Déterminez les autres abscisses d'intersection de P(x) avec cet axe.

3-16

MATHÉMATIQUES

Théorème des facteurs

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer le théorème des facteurs pour factoriser des polynômes.

POINT ESSENTIEL !

• Si un polynôme P(x) est divisible par $x-a$, alors $P(x)=(x-a)Q(x)$.

• Pour un polynôme à coefficients entiers, toute racine entière non nulle divise le terme constant. Pour chercher toutes les racines rationnelles, testez p/q en écriture irréductible, où p divise le terme constant et q le coefficient dominant. Si le polynôme est unitaire, ces racines sont entières. Si le terme constant est nul, commencez par factoriser x.

Exemple : pour x^3+3x^2+2x+6, testez ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6.

Q(x) est le quotient de la division de P(x) par $x-a$.

MISE EN ROUTE

Factorisez :

(a) x^3+2x^2-x-2.

(b) $x^4-6x^3+8x^2+8x-16$.

EXPLICATION (a)

Soit $P(x)=x^3+2x^2-x-2$. Le terme constant étant -2, testons ± 1 et ± 2.

$P(1)=1^3+2(1)^2-1-2=0$. Donc $x-1$ est un facteur.

En divisant P(x) par $x-1$:

$P(x)=(x-1)(x^2+3x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$.

Utilisez la division synthétique, puis factorisez la partie quadratique.

1	1	2	−1	−2
		1	3	2
	1	3	2	0

EXPLICATION (b)

Soit $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x - 16$. Testons $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \ldots$

$P(2) = 2^4 - 6(2^3) + 8(2^2) + 8(2) - 16 = 0$.

Donc $P(x) = (x-2)(x^3 - 4x^2 + 8)$. Posons $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 8$.

$Q(2) = 2^3 - 4(2^2) + 8 = 0$, donc $Q(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 4)$.

Ainsi $P(x) = (x-2)^2(x^2 - 2x - 4)$. La partie quadratique ne se factorise pas davantage sur les entiers.

2	1	−6	8	8	−16
		2	−8	0	16
	1	−4	0	8	0

2	1	−4	0	8
		2	−4	−8
	1	−2	−4	0

À VOUS D'ESSAYER

Factorisez : (a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, (b) $x^3 - x^2 - 16x - 20$, (c) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$, (d) $2x^3 - 3x^2 - x - 2$, (e) $x^4 + 3x^3 - 27x^2 + 13x + 42$, (f) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3$.

EXERCICES — Factorisez.

(a) $x^3 - 7x - 6$

(b) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

(c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

(d) $x^3 - 3x + 2$

(e) $x^3 + x^2 - 8x - 12$

(f) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(g) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(h) $3x^3 + x^2 - 8x + 4$

(i) $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3$

(j) $2x^3 - 7x^2 + 3x + 6$

(k) $x^3 + 4x^2 + 2x - 4$

(l) $x^3 - 3x^2 + 2$

(m) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

(n) $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10$

(o) $2x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 20x + 48$

(p) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 13x - 6$

(q) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$

(r) $x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

★ DÉFI

$P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 12$. Sachant que $x - 1$ et $x + 2$ sont des facteurs de P(x) :

1. Déterminez exactement a et b. 2. Déduisez toutes les racines de $P(x) = 0$.

RÉFLÉCHIR

— Comment la décomposition des polynômes en facteurs nous aide-t-elle à mieux comprendre les mathématiques et les systèmes du monde réel ?

3-17

MATHÉMATIQUES

Équations de degré supérieur

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

CONCEPT 3 — ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR

Dans certains modèles simplifiés de sciences ou d'ingénierie, une relation non linéaire peut être approchée par un polynôme de degré trois ou plus. Ces modèles ont un domaine de validité à préciser, ils ne représentent pas à eux seuls toute la complexité des phénomènes physiques.



Une équation cubique est de degré 3. Ses solutions représentent les valeurs de la variable qui satisfont la condition du modèle, et doivent être interprétées dans le domaine étudié.

QUESTION DIRECTRICE

Comment factoriser et résoudre une équation cubique, reconnaître ses racines répétées et utiliser les racines cubiques de l'unité ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des équations de degré supérieur.

POINT ESSENTIEL !

• Une équation de degré n possède toujours n solutions dans l'ensemble des nombres complexes, en comptant les multiplicités.

1. FACTORISER

• Cubique : si elle se ramène à $x^3 + a^3 = 0$, utilisez $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$, sinon, utilisez le théorème des facteurs.

• Quartique : si seuls x^4, x^2 et un terme constant apparaissent, posez $y = x^2$, sinon, utilisez le théorème des facteurs.

2. DÉTERMINER LES SOLUTIONS

• $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ donne $x = \alpha$, β ou γ.

• Pour $(x - a)(Ax^2 + Bx + C) = 0$, utilisez la formule quadratique si le trinôme ne se factorise pas : $x = a$ ou $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

MISE EN ROUTE

Résolvez :

(a) $x^3 - 8 = 0$.

(b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

(c) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

(d) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x - 16 = 0$.

EXPLICATION

(a) $x^3 - 8 = 0$

$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$.

Solutions : $x = 2,\ -1 \pm \sqrt{3}\,i$.

(b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x+2) = 0$.

Solutions : $x = 1, 3,\ -2$.

(c) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

$(x^2)^2 - 7x^2 - 18 = (x^2-9)(x^2+2) = 0$.

$x^2 = 9$ ou $x^2 = -2$. Solutions : $x = \pm 3,\ \pm\sqrt{2}\,i$.

(d) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x - 16 = 0$

$(x-2)(x^3-4x^2+8) = (x-2)^2(x^2-2x-4) = 0$.

Solutions : $x = 2, 1 \pm \sqrt{5}$.

Repères méthodologiques : utilisez l'identité remarquable pour (a), le théorème des facteurs pour (b) et (d), et traitez x^2 comme une inconnue pour (c).

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez :

(a) $x^3 = -1$.

(b) $3x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$.

(c) $2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0$.

(d) $x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$.

(e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

(f) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

EXERCICES — Résolvez les équations suivantes.

(a) $x^3 = 27$

(b) $x^3 = -125$

(c) $8x^3 = 1$

(d) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

(e) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

(f) $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$

(g) $x^3 - x^2 - 4 = 0$

(h) $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$

(i) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$

(j) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

(k) $2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$

(l) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

(m) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

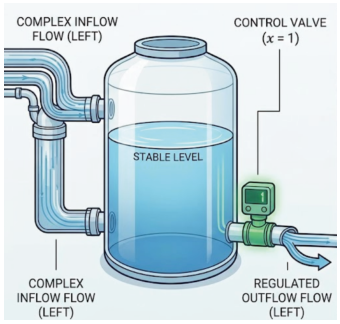
(n) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$

(o) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

(p) $x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$

(q) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$

★ DÉFI — STABILITÉ DU NIVEAU D'EAU



Dans un modèle simplifié de réservoir, les débits entrant et sortant dépendent d'une variable réelle x représentant le niveau de pression.

Débit entrant : $x^4 + x^2 + x$.

Débit sortant : $x^3 + 2$.

Pour que le niveau de l'eau reste parfaitement stable :

1. Écrivez l'équation exprimant l'équilibre entre le débit entrant et le débit sortant.
2. Résolvez cette équation afin de déterminer les valeurs de x qui maintiennent le niveau stable.
3. Déterminez si des solutions complexes non réelles existent. Seules les solutions réelles compatibles avec les hypothèses du modèle peuvent avoir une interprétation physique.

3-18

MATHÉMATIQUES

Détermination d'une équation cubique

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

POINT ESSENTIEL !

Lorsqu'une solution d'une équation cubique est donnée, remplacez x par cette solution dans l'équation.

• Construire des équations cubiques à partir de données fournies.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

• Résoudre des équations de degré supérieur.

MISE EN ROUTE

L'équation cubique $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ admet $2 + i$ comme solution. Déterminez les nombres réels a et b, puis les autres solutions.

EXPLICATION

Puisque $x = 2 + i$ est une solution :

$(2 + i)^3 + a(2 + i)^2 + b(2 + i) + 5 = 0.$

Sous la forme réelle-imaginaire :

$(3a + 2b + 7) + (4a + b + 11)i = 0.$

En identifiant les parties réelle et imaginaire :

$3a + 2b + 7 = 0, \quad 4a + b + 11 = 0.$

La résolution donne $a = -3$ et $b = 1.$

L'équation devient $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0.$

Son membre de gauche se factorise : $(x + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0.$

Ainsi $x = -1$ ou $x = 2 \pm i.$

Conclusion : $a = -3, b = 1$, les autres solutions sont $x = -1$ et $x = 2 - i$. Ne comptez pas de nouveau la solution donnée $2 + i$.

À VOUS D'ESSAYER

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez les réponses.

1. L'équation $x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$ admet -3 et 1 comme solutions. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.

2. L'équation $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ admet $1 + i$ comme solution. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.

EXERCICES — Résolvez les problèmes suivants.

1. L'équation $x^3 - ax^2 - x + b = 0$ admet -1 et 2 comme solutions. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.
2. L'équation $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ admet 1 et 2 comme solutions. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.
3. Une solution de $x^3 -$ kx$^2 + (3k - 1)x - 24 = 0$ est 2. Déterminez k réel, puis les autres solutions.
4. L'équation $x^3 + ax^2 + bx - 20 = 0$ admet $1 - 3i$ comme solution. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.
5. L'équation $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ admet $1 + 2i$ comme solution. Déterminez a et b réels, puis les autres solutions.

★ DÉFI

L'équation cubique $x^3 + ax + b = 0$ admet $1 + \sqrt{2}\,i$ comme solution.

Déterminez les nombres réels a et b, puis les autres solutions.

3-19

MATHÉMATIQUES

Racines cubiques de l'unité

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer les racines cubiques de l'unité et appliquer leurs propriétés pour simplifier des expressions algébriques.

POINT ESSENTIEL !

• Un nombre dont le cube est égal à 1 est appelé racine cubique de l'unité. Une racine complexe non réelle est notée ω (oméga).

• Propriétés : $\omega^3 = 1$ et $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

• Dans les calculs, utilisez d'abord $\omega^3 = 1$ pour réduire les puissances, s'il reste ω^2 et ω, utilisez $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Comme $\omega^3 = 1$:

$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$.

MISE EN ROUTE

Soit ω l'une des racines cubiques complexes non réelles de l'unité. Calculez :

(a) ω^9.

(b) $\omega^4 + \omega^5$.

(c) $\omega + \frac{1}{\omega}$.

★ DÉFI

Calculez sans développer directement les parenthèses :

$(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2)$.

EXPLICATION

(a) $\omega^9 = (\omega^3)^3 = 1^3 = 1$.

(b) $\omega^4 + \omega^5 = \omega \cdot \omega^3 + \omega^2 \cdot \omega^3 = \omega + \omega^2 = -1$.

(c) $\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2 + 1}{\omega} = -\frac{\omega}{\omega} = -1$.

On crée des puissances de ω^3 pour utiliser $\omega^3 = 1$, puis on emploie $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

À VOUS D'ESSAYER

Soit ω l'une des racines cubiques complexes non réelles de l'unité. Calculez :

(a) ω^{2010}.

(b) $\omega^2 + \omega$.

(c) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)$.

EXERCICES

Soit ω l'une des racines cubiques complexes non réelles de l'unité. Calculez :

(a) ω^3.

(b) $\omega^2 + \omega^4 + \omega^6$.

(c) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1$.

3-20

MATHÉMATIQUES

Équation cubique à racines répétées

Chapitre 3 — Nombres complexes et équations

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Résoudre des équations cubiques possédant des racines répétées.

POINT ESSENTIEL !

Pour déterminer une condition garantissant qu'une équation cubique possède une racine répétée, factorisez d'abord son expression sous la forme $(x-a)(x^2+bx+c)$.

Deux cas produisent une racine répétée :

• $x^2+bx+c=0$ admet aussi $x=a$: remplacez x par a dans le trinôme.

• $x^2+bx+c=0$ possède lui-même une racine double : imposez que son discriminant D soit nul.

MISE EN ROUTE

Déterminez la constante a pour que l'équation $x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$ possède une racine répétée.

EXPLICATION

Posons $P(x)=x^3-2x^2+(a-3)x+a\ldots$ (i).

$P(-1)=0$, ainsi $P(x)=(x+1)(x^2-3x+a)$.

L'équation possède une racine répétée dans l'un des deux cas suivants.

[1] Le trinôme x^2-3x+a admet $x=-1$:

$(-1)^2-3(-1)+\mathrm{a}=0$, d'où $a=-4$.

Alors (i) devient $(x+1)^2(x-4)=0$: la condition est satisfaite.

[2] Le trinôme x^2-3x+a possède une racine double :

$\mathrm{D}=(-3)^2-4(1)(\mathrm{a})=0$, d'où $a=\frac{9}{4}$.

Alors (i) devient $(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$: la condition est satisfaite.

Les valeurs demandées sont donc $a=-4$ et $a=\frac{9}{4}$.

À VOUS D'ESSAYER

Déterminez la constante a pour que l'équation $x^3 - x^2 + (a-2)x + a = 0$ possède une racine répétée.

TRAVAILLER AVEC UN PARTENAIRE

— Résolvez en groupe, puis discutez la réponse.

EXERCICES

1. Déterminez la constante a pour que $x^3 - 7x^2 + (a+6)x - a = 0$ possède une racine répétée.
2. Déterminez la constante a pour que $x^3 - (a+1)x^2 + (3a+5)x - 2a - 5 = 0$ possède une racine répétée.
3. Déterminez la constante a pour que $x^3 + (2a-1)x^2 - 3(a-2)x + a - 6 = 0$ possède une racine répétée.

★ DÉFI

Déterminez la constante a pour que l'équation

$x^3 + (a-1)x^2 + (a-3)x - 2a + 3 = 0$

possède une racine répétée.

RÉFLÉCHIR

Une équation quadratique telle que $x^2 + 1 = 0$ peut ne posséder aucune solution réelle. Pourquoi une équation cubique telle que $x^3 + x + 1 = 0$ possède-t-elle toujours au moins une solution réelle ? Que révèle cette différence sur le comportement de ces deux types d'équations ?

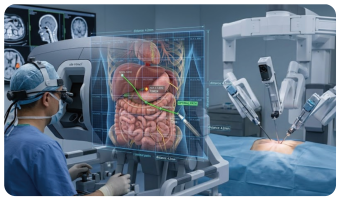
4-1

Mathématiques

Division interne et externe d'un segment sur une droite numérique

Concept 1 : Bases de la géométrie analytique

Pour programmer le déplacement d'un mobile sur un trajet rectiligne, on choisit une origine et une unité de longueur. Chaque position est alors repérée par un nombre réel : son abscisse.



Le repérage numérique permet de calculer les distances entre deux positions et de déterminer un point partageant un segment dans un rapport donné. Dans un plan, deux coordonnées sont nécessaires, dans l'espace, trois coordonnées sont utilisées.

Question directrice : Comment utiliser les abscisses pour calculer une distance, trouver un milieu et partager un segment dans un rapport donné ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer l'abscisse d'un point partageant un segment intérieurement ou extérieurement.

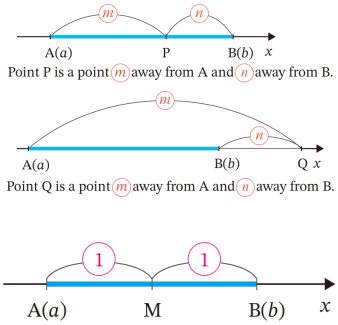
POINT ESSENTIEL !

- À tout point P d'une droite numérique correspond un unique nombre réel a, appelé abscisse de P. On note ce point P(a).

- La distance AB entre deux points A(a) et B(b) sur une droite numérique est donnée par $AB = |b - a|$. Puisque la distance ne peut pas être négative, nous utilisons la valeur absolue.
- Si le point P est sur le segment AB tel que $AP{:}PB = m{:}n$, on dit que le point P **divise le segment AB intérieurement** dans le rapport m:n.
- Pour m, n > 0 et m ≠ n, le point Q situé à l'extérieur de [AB] *et vérifiant* AQ:QB = m:n partage **[AB] extérieurement dans ce rapport**.

- Concernant le segment AB reliant deux points A(a) et B(b) sur une droite numérique :

1. L'abscisse du point P divisant le segment AB intérieurement dans le rapport m:n est : $\dfrac{na + mb}{m + n}$
2. L'abscisse du point Q divisant le segment AB extérieurement dans le rapport m:n est : $\dfrac{-na + mb}{m - n}$
3. L'abscisse du point médian M est (puisqu'il divise le segment AB intérieurement en 1:1) : $M\left(\dfrac{a + b}{2}\right)$



Attention à l'ordre de multiplication (produit en croix).

MISE EN ROUTE

Pour deux points A(-4) et B(8), trouvez les distances ou coordonnées suivantes :

1. Distance AB entre les deux points.
2. Coordonnée du point C divisant le segment AB intérieurement dans le rapport 2:1.
3. Coordonnée du point D divisant le segment AB extérieurement dans le rapport 2:3.
4. Coordonnée du point médian M du segment AB.

Explication

1. $AB = |8 - (-4)| = 12$
2. **Point** C : $\frac{1\times(-4)+2\times 8}{2+1} = 4$. Donc, C(4).
3. **Point** D : $\frac{-3\times(-4)+2\times 8}{2-3} = -28$. Donc, D(-28).
4. **Point** M : $\frac{-4+8}{2} = 2$. Donc, M(2).

À VOUS D'ESSAYER

Pour deux points A(-5) et B(7), trouvez les distances ou coordonnées suivantes :

1. Distance AB entre les deux points.
2. Coordonnée du point C divisant le segment AB intérieurement dans le rapport 2:1.
3. Coordonnée du point D divisant le segment AB extérieurement dans le rapport 2:5.
4. Coordonnée du point médian M du segment AB.

EXERCICES

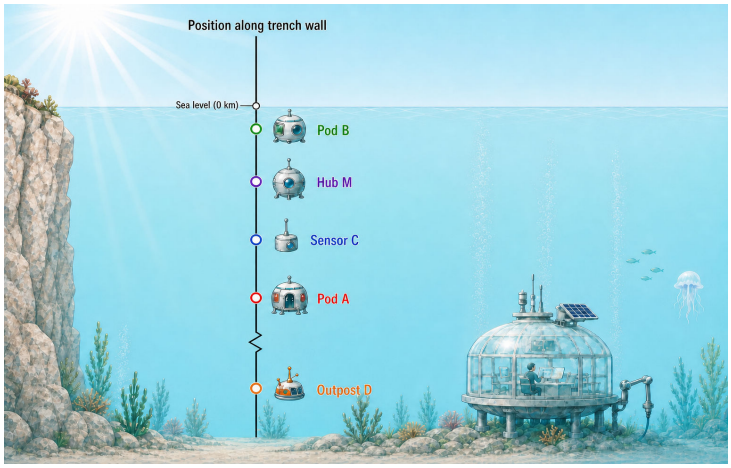
Résolvez les problèmes suivants :

- **1.** Pour deux points A(-2) et B(6), trouvez :
  - (a) Distance AB entre les deux points.
  - (b) Coordonnée du point C divisant le segment AB intérieurement dans le rapport 3:1.
  - (c) Coordonnée du point D divisant le segment AB extérieurement dans le rapport 5:3.
  - (d) Coordonnée du point médian M du segment AB.
- **2.** Pour deux points A(4) et B(10), trouvez :
  - (a) Distance AB entre les deux points.
  - (b) Coordonnée du point C divisant le segment AB intérieurement dans le rapport 2:1.
  - (c) Coordonnée du point D divisant le segment AB extérieurement dans le rapport 1:3.
  - (d) Coordonnée du point médian M du segment AB.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre les parties (c) et (d), puis discutez de la réponse.

★ Défi : Infrastructure de laboratoire de recherche souterraine



Une équipe de biologistes marins exploite un habitat de recherche sous-marin ancré le long d'une paroi de fosse verticale droite. Pour suivre les positions le long de cette paroi en eaux profondes, ils utilisent un axe de référence 1D mesuré en kilomètres par rapport au niveau de la mer (0 km).

En utilisant vos connaissances sur la division des coordonnées, calculez les emplacements exacts et l'espacement requis pour étendre leur réseau de recherche :

1. **Longueur du câble d'attache en fibre optique** (Distance).
2. **Réseau de capteurs environnementaux internes** — Le point C divise AB intérieurement dans le rapport 1:4.
3. **Avant-poste externe de la fosse profonde** — Le point D divise AB extérieurement dans le rapport 3:4.
4. **Emplacement du centre d'approvisionnement d'urgence (M)** — Point médian M de AB.

4-2

Mathématiques

Points dans le plan de coordonnées

POINT ESSENTIEL !

- Le plan de coordonnées est divisé en 4 quadrants, à l'exclusion des axes de coordonnées.

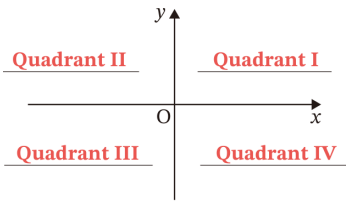
OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer le quadrant dans lequel se trouve un point dans le plan de coordonnées.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. **Déterminez dans quel quadrant se trouvent les points suivants.**
   - (a) Point $A(2, 3)$
   - (b) Point $B(2, -3)$
   - (c) Point $C(-2, 3)$
   - (d) Point $D(-2, -3)$
2. **Pour le point $A(-3, 2)$, trouvez les coordonnées des points suivants.**
   - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x
   - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y
   - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine



Explication

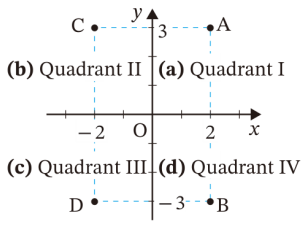
1. Placez les points sur le plan de coordonnées pour visualiser.
   - (a) $A(2, 3)$: 1er quadrant
   - (b) $B(2, -3)$: 4e quadrant
   - (c) $C(-2, 3)$: 2e quadrant
   - (d) $D(-2, -3)$: 3e quadrant
2. Changez le signe de l'autre coordonnée.
   - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x : Changez le signe de la coordonnée y.

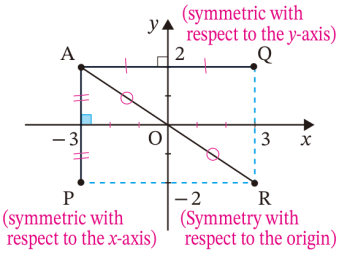
$P(-3, -2)$

   - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y : Changez le signe de la coordonnée x.

$Q(3, 2)$

   - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine : Changez le signe de la coordonnée x et de la coordonnée y. $R(3, -2)$





À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. **Déterminez dans quel quadrant se trouvent les points suivants.**
   - (a) Point $A(-4, 2)$
   - (b) Point $B(1, 2)$
   - (c) Point $C(3, -2)$
   - (d) Point $D(-3, -1)$
2. **Pour le point $A(-1, 2)$, trouvez les coordonnées des points suivants.**
   - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x.
   - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y.
   - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine.

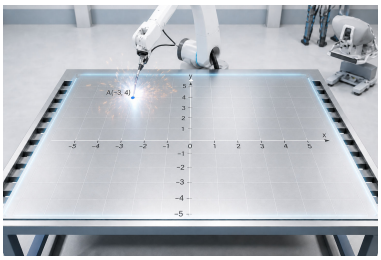
EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

- **1. Déterminez dans quel quadrant se trouvent les points suivants.**
  - (a) Point $A(-3, 1)$
  - (b) Point $B(2, -8)$
  - (c) Point $C(4, 4)$
  - (d) Point $D(-6, -4)$
  - (e) Point $E(-2, 6)$
  - (f) Point $F(3, -3)$
  - (g) Point $G(-5, -7)$
  - (h) Point $H(1, 4)$
- **2. Pour le point $A(-4, -2)$, trouvez les coordonnées des points suivants.**
  - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x.
  - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y.
  - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine.
- **3. Pour le point $A(1, -2)$, trouvez les coordonnées des points suivants.**
  - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x.
  - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y.
  - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine.
- **4. Pour le point $A(-3, 4)$, trouvez les coordonnées des points suivants.**
  - (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x.
  - (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y.
  - (c) Point R symétrique par rapport à l'origine.

★ Défi : Bras de soudage robotisé

Un bras de soudage robotisé est programmé au point $A(-3, 4)$ sur une plaque de métal. Pour souder des supports de fixation identiques, le bras doit refléter ce point :



1. (a) Point P symétrique par rapport à l'axe des x.
2. (b) Point Q symétrique par rapport à l'axe des y.
3. (c) Point R symétrique par rapport à l'origine.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

4-3

Mathématiques

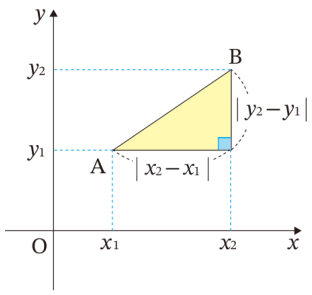
Distance entre deux points

POINT ESSENTIEL !

- La distance AB entre deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Dans les problèmes où la distance entre 2 points est connue, **élevez les deux côtés au carré**.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer la distance entre deux points.



Use the Pythagorean theorem.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez la distance entre les 2 points suivants : $A(2, 6)$, $B(5, 10)$.
2. Si la distance entre les points $A(3, -2)$ et $B(x, 1)$ est 5, trouvez la valeur de x.

Explication

1. $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
2. Puisque la distance entre les 2 points A et B est 5, $\sqrt{(x-3)^2 + (1-(-2))^2} = 5$.
   Élevez les deux côtés au carré :
   $(x - 3)^2 + 3^2 = 25$
   $(x - 3)^2 = 16$
   $x - 3 = \pm 4$
   Donc, $x = -1, 7$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez la distance entre les 2 points suivants :
   - (a) $A(4, 3)$, $B(1, 2)$
   - (b) $A(\sqrt{3}, -1)$, $B(0, 1)$
   - (c) Origin O, $A(2, -4)$
2. Si la distance entre les points $A(-1, 3)$ et $B(x, 1)$ est $\sqrt{5}$, trouvez la valeur de x.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez la distance entre les 2 points suivants :
   - (a) $A(1, 2)$, $B(11, 7)$
   - (b) $A(3, -1)$, $B(-1, 3)$
   - (c) Origin O, $A(-3, 4)$
2. Si la distance entre les points $A(3, -1)$ et $B(x, 2)$ est 5, trouvez x.
3. Si la distance entre les points $A(1, -3)$ et $B(-2, y)$ est $\sqrt{13}$, trouvez y.
4. Si la distance entre les points $A(-4, -2)$ et $B(x, 3)$ est $5\sqrt{5}$, trouvez x.

★ Défi

Si la distance entre les deux points $(x, 7)$ et $(3x - 1, -5)$ est égale à 13 unités de longueur, trouvez la (les) valeur(s) de x.

4-4

Mathématiques

Points équidistants de deux points

POINT ESSENTIEL !

- Pour trouver un point équidistant de deux points, attribuez des variables à ses coordonnées en fonction des conditions données.
- Point sur l'axe des $x \Longrightarrow$ Le point recherché est $(s, 0)$
- Point sur l'axe des $y \Longrightarrow$ Le point recherché est $(0, t)$
- Point sur la droite $y = ax + b \Longrightarrow$ Le point recherché est $(s, as + b)$

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer la position d'un point équidistant de deux points.

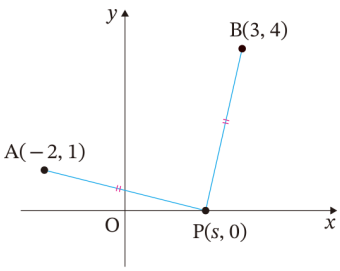
MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées du point P sur l'axe des x équidistant des 2 points $A(-2, 1)$ et $B(3, 4)$.
2. Trouvez les coordonnées du point Q sur la droite $y = 2x - 1$ équidistant des 2 points $A(1, 4)$ et $B(3, 1)$.

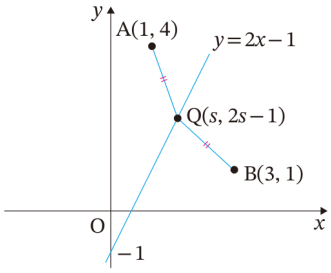
Explication

1. Soit $(s, 0)$ les coordonnées du point P.
   Puisqu'il est équidistant des 2 points $A(-2, 1)$ et $B(3, 4)$, $AP = BP$.
   $(s - (-2))^2 + (-1)^2 = (s - 3)^2 + (-4)^2$
   $(s + 2)^2 + 1 = (s - 3)^2 + 16$
   En simplifiant et en résolvant, on obtient $s = 2$.
   Par conséquent, les coordonnées recherchées sont $P(2, 0)$.



2. Soit $(s, 2s - 1)$ les coordonnées du point Q.
   Puisqu'il est équidistant des 2 points $A(1, 4)$ et $B(3, 1)$, $AQ = BQ$.
   $(s - 1)^2 + ((2s - 1) - 4)^2 = (s - 3)^2 + ((2s - 1) - 1)^2$
   $(s - 1)^2 + (2s - 5)^2 = (s - 3)^2 + (2s - 2)^2$

   En simplifiant et en résolvant, on obtient $s = \frac{13}{8}$.
   Puisque le point recherché est sur $y = 2x - 1$, la coordonnée y est $2\left(\frac{13}{8}\right) - 1 = \frac{9}{4}$.
   Donc, $Q\left(\frac{13}{8}, \frac{9}{4}\right)$.



À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées du point P sur l'axe des y équidistant des 2 points $A(4, 2)$ et $B(1, -1)$.
2. Trouvez les coordonnées du point Q sur la droite $y = 3x + 1$ équidistant des 2 points $A(4, -5)$ et $B(2, -3)$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées du point P sur l'axe des x équidistant des 2 points $A(-1, 2)$ et $B(4, 3)$.
2. Trouvez les coordonnées du point P sur l'axe des y équidistant des 2 points $A(-5, 2)$ et $B(3, 5)$.
3. Trouvez les coordonnées du point P sur l'axe des x équidistant des 2 points $A(-1, 2)$ et $B(3, 8)$.
4. Trouvez les coordonnées du point Q sur $y = 2x - 3$ équidistant des 2 points $A(1, 4)$ et $B(3, -2)$.
5. Trouvez les coordonnées du point Q sur $y = x - 1$ équidistant des 2 points $A(-1, 5)$ et $B(7, -1)$.
6. Trouvez les coordonnées du point Q sur $y = -x + 1$ équidistant des 2 points $A(1, 2)$ et $B(-3, 6)$.

★ Défi

Si $A(2,1)$, $B(4,5)$, $C(3, y)$ et $D(x, 0)$ tels que $CA = CB$ et $DA = DB$, alors trouvez CD.

4-5

Mathématiques

Division interne et externe d'un segment dans le plan

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver les coordonnées du point de division (interne et externe) d'un segment de droite sur le plan de coordonnées.

POINT ESSENTIEL !

Concernant le segment de droite AB reliant deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ sur le plan de coordonnées :

- (a) Les coordonnées du point P divisant le segment AB intérieurement dans le rapport m:n sont : $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$
- (b) Les coordonnées du point Q divisant le segment AB extérieurement dans le rapport m:n sont : $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}\right)$
- (c) Puisque le point médian M divise le segment AB intérieurement dans le rapport 1:1, ses coordonnées sont : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- (d) Les coordonnées du centre de gravité (centroid) G du triangle ABC avec les sommets $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x_3, y_3)$ sont : $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

MISE EN ROUTE

Étant donné trois points $A(-2, -3)$, $B(3, 7)$ et $C(5, 2)$, trouvez les coordonnées des points suivants :

1. (a) Point P divisant le segment BA intérieurement dans le rapport 1:2.
2. (b) Point Q divisant le segment BC extérieurement dans le rapport 1:3.
3. (c) Point médian M du segment CA.
4. (d) Centre de gravité G du triangle ABC.

Explication

1. (a) $P\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$
2. (b) $Q\left(2, \frac{19}{2}\right)$
3. (c) $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
4. (d) $G(2, 2)$

À VOUS D'ESSAYER

Étant donné trois points $A(-3, 4)$, $B(1, -4)$ et $C(-4, 3)$, trouvez les coordonnées des points suivants :

1. Point P divisant le segment AC intérieurement dans le rapport 3:1.
2. Point Q divisant le segment BC extérieurement dans le rapport 2:3.
3. Point médian M du segment AB.
4. Centre de gravité G du triangle ABC.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre les questions 3 et 4, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Étant donné trois points $A(2, 3)$, $B(2, -3)$ et $C(-2, 3)$, trouvez les coordonnées des points suivants :
   - (a) Point P divisant le segment AB intérieurement dans le rapport 4:1.
   - (b) Point Q divisant le segment BC extérieurement dans le rapport 2:3.
   - (c) Point médian M du segment CA.
   - (d) Centre de gravité G du triangle ABC.
2. Étant donné trois points $A(-2, 1)$, $B(6, -3)$ et $C(1, 7)$, trouvez les coordonnées des points suivants :
   - (a) Point P divisant le segment BC intérieurement dans le rapport 3:2.
   - (b) Point Q divisant le segment CA extérieurement dans le rapport 3:2.
   - (c) Point médian M du segment AB.
   - (d) Centre de gravité G du triangle ABC.
3. Étant donné trois points $A(-4, 5)$, $B(1, -5)$ et $C(3, 0)$, trouvez les coordonnées des points suivants :
   - (a) Point P divisant le segment BA intérieurement dans le rapport 1:2.
   - (b) Point Q divisant le segment BC extérieurement dans le rapport 1:3.
   - (c) Point médian M du segment BC.
   - (d) Centre de gravité G du triangle ABC.

★ Défi

Si $A(-2,3)$, $B(6,1)$ et $C(0, y)$ tels que $CA = CB$, trouvez les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

4-6

Mathématiques

Points symétriques

POINT ESSENTIEL !

- Deux points B, C sont symétriques par rapport au point A ⇔ Le point A est le point milieu du segment $\overline{BC}$. Lors de la recherche de points symétriques, dessinez d'abord un diagramme pour comprendre les positions relatives des points. Ensuite, soit (s, t) les coordonnées recherchées et exprimez le point milieu en fonction de s et t.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer le point symétrique.

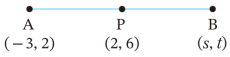


MISE EN ROUTE

Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(-3, 2)$ par rapport au point $P(2, 6)$.

Explication

Soit (s, t) les coordonnées du point B.



Les coordonnées du point milieu du segment AB peuvent être exprimées par $\left(\frac{-3+s}{2}, \frac{2+t}{2}\right)$.

Puisque cela coïncide avec le point $P(2, 6)$:

$$\begin{cases} \frac{-3+s}{2} = 2 \Rightarrow -3+s = 4 \Rightarrow s = 7 \\ \frac{2+t}{2} = 6 \Rightarrow 2+t = 12 \Rightarrow t = 10 \end{cases}$$

Par conséquent, les coordonnées recherchées sont $B(7, 10)$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(-1, 2)$ par rapport au point $P(2, 3)$.
2. Trouvez les coordonnées du point Q symétrique au point $P(3, 2)$ par rapport au point $A(-1, 5)$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(-3, 1)$ par rapport au point $P(2, 0)$.
2. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(7, 4)$ par rapport au point $M(-3, 5)$.
3. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(4, -8)$ par rapport au point $P(-3, 2)$.
4. Trouvez les coordonnées du point Q symétrique au point $P(0, -4)$ par rapport au point $A(-4, 1)$.
5. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(-4, 2)$ par rapport au point $P(-1, -3)$.

★ Défi

Si les points $B(m, 5)$ et $C(4, n)$ sont symétriques par rapport au point $A(1, -1)$, trouvez $m + n$.

4-7

Mathématiques

Nature des triangles

Concept 2 : Triangles et droites

Dans un modèle géométrique plan, plusieurs trajectoires rectilignes peuvent se rencontrer en un même point. On représente chaque trajectoire par une droite dans un repère.



Les équations des droites permettent de calculer leurs intersections et de distinguer des droites concourantes de droites qui délimitent un triangle. Cette étude porte sur un modèle mathématique, elle ne permet pas, à elle seule, de valider un dispositif réel.

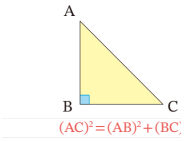
Question directrice : Comment utiliser les équations de droites pour étudier leurs intersections et les figures qu'elles délimitent ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Utiliser des coordonnées pour déterminer les types de triangles (isocèle, rectangle, etc.).

POINT ESSENTIEL !

- Pour déterminer la nature du ΔABC, calculez $(AB)^2$, $(BC)^2$ et $(CA)^2$.
- Dans le ΔABC :
  - Si $(AB)^2 = (BC)^2 = (CA)^2$, le ΔABC est un **triangle équilatéral**.
  - Si $(AB)^2 = (BC)^2 \neq (CA)^2$, le ΔABC est un **triangle isocèle**.
  - Si $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, le ΔABC est un **triangle rectangle**.
  - Remarque : Si les deux conditions sont remplies, c'est un **triangle rectangle isocèle**.



MISE EN ROUTE

Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(4, 9)$, $B(0, 6)$ et $C(3, 2)$.

Explication

$(AB)^2 = (0 - 4)^2 + (6 - 9)^2 = 25 \ldots (i)$

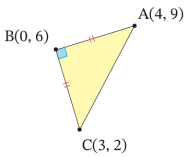
$(BC)^2 = (3 - 0)^2 + (2 - 6)^2 = 25 \ldots (ii)$

$(CA)^2 = (3 - 4)^2 + (2 - 9)^2 = 50 \ldots (iii)$

De (i) et (ii), le ΔABC est un triangle isocèle.

De (i), (ii) et (iii), puisque $(CA)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, le ΔABC est un triangle rectangle.

Par conséquent, le ΔABC est un **triangle rectangle isocèle** avec $\angle B = 90°$.



À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$ et $C(0, 4)$.
2. Déterminez la forme du ΔABC avec les sommets $A(3, 2)$, $B(-1, 0)$ et $C(1+\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3})$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(0, 2)$, $B(-1, -2)$ et $C(4, 1)$.
2. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(2, 2)$, $B(2, 0)$ et $C(\sqrt{3}+2, 1)$.
3. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(1, 2)$, $B(5, 8)$ et $C(11, 4)$.
4. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(-3, 4)$, $B(1, 7)$ et $C(3, -4)$.
5. Déterminez la nature du ΔABC avec les sommets $A(-1, 1)$, $B(4, 2)$ et $C(1, 4)$.

★ Défi

Si $A(1, 2)$, $B(2k, k)$ et $C(4, 5)$ et que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B, alors trouvez k.

4-8

Mathématiques

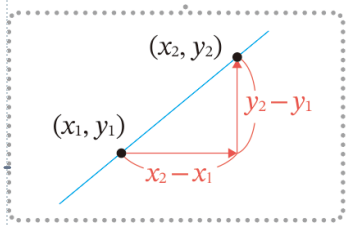
Équation d'une droite

POINT ESSENTIEL !

- **Équation d'une droite parallèle à un axe :**
  - La droite passant par le point (x_1, y_1) et parallèle à l'axe des x est $y = y_1$.
  - La droite passant par le point (x_1, y_1) et perpendiculaire à l'axe des x est $x = x_1$.
  - La droite passant par le point (x_1, y_1) et parallèle à l'axe des y est $x = x_1$.
- L'équation d'une droite passant par 2 points (x_1, y_1) et (x_2, y_1) est $y = y_1$. (Les ordonnées des 2 points sont égales).
- L'équation d'une droite passant par 2 points (x_1, y_1) et (x_1, y_2) est $x = x_1$. (Les abscisses des 2 points sont égales).
- Si la pente et un point sur la droite sont connus, l'équation de la droite peut être déterminée.
  - L'équation d'une droite passant par le point (x_1, y_1) avec une pente a est $y - y_1 = a(x - x_1)$.
  - La pente d'une droite passant par 2 points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) $(x_1 \neq x_2)$ est $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver l'équation de la droite sous ses différentes formes.



MISE EN ROUTE

Trouvez les équations des droites suivantes :

1. (a) La droite passant par le point $(3, -4)$ et parallèle à l'axe des x.
2. (b) La droite passant par le point $(-3, 8)$ et parallèle à l'axe des y.
3. (c) La droite passant par deux points $(-3, 1)$ et $(-3, 2)$.
4. (d) La droite passant par deux points $(-2, 3)$ et $(-5, 3)$.
5. (e) La droite passant par le point $(2, -1)$ avec une pente de 3.
6. (f) La droite passant par deux points $(1, -1)$ et $(4, 0)$.

Explication

- (a) $y = -4$
- (b) $x = -3$
- (c) Puisque les abscisses des 2 points sont égales, $x = -3$.
- (d) Puisque les ordonnées des 2 points sont égales, $y = 3$.
- (e) $y - (-1) = 3(x - 2) \Longrightarrow y = 3x - 7$
- (f) $a = \frac{0-(-1)}{4-1} = \frac{1}{3}$.
  $y-(-1) = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les équations des droites suivantes :

1. La droite passant par le point $(2, 6)$ et parallèle à l'axe des x.
2. La droite passant par le point $(3, 5)$ et perpendiculaire à l'axe des x.
3. La droite passant par deux points $(-2, -2)$ et $(2, -2)$.
4. La droite passant par deux points $(-4, 2)$ et $(-4, 8)$.
5. La droite passant par le point $(-3, 4)$ avec une pente de 2.
6. La droite passant par deux points $(-2, -6)$ et $(-4, 1)$.

Travailler avec un partenaire

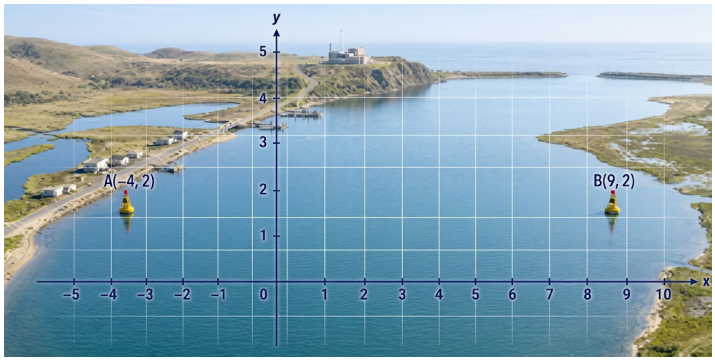
Collaborez avec votre groupe pour résoudre les questions 5 et 6, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants en trouvant les équations des droites :

1. (a) La droite passant par le point $(-4, 5)$ et parallèle à l'axe des x.
2. (b) La droite passant par le point $(2, 1)$ et parallèle à l'axe des x.
3. (c) La droite passant par le point $(-4, -7)$ et parallèle à l'axe des x.
4. (d) La droite passant par le point $(1, -2)$ et perpendiculaire à l'axe des x.
5. (e) La droite passant par le point $(-3, -4)$ et perpendiculaire à l'axe des x.
6. (f) La droite passant par le point $(3, -5)$ et perpendiculaire à l'axe des x.
7. (g) La droite passant par le point $(2, -7)$ et parallèle à l'axe des y.
8. (h) La droite passant par le point $(4, 3)$ et parallèle à l'axe des y.
9. (i) La droite passant par le point $(-6, -2)$ et parallèle à l'axe des y.
10. (j) La droite passant par deux points $(4, 0)$ et $(4, 3)$.
11. (k) La droite passant par deux points $(-1, 2)$ et $(-1, 6)$.
12. (l) La droite passant par deux points $(-5, -3)$ et $(-5, 2)$.
13. (m) La droite passant par deux points $(-2, 3)$ et $(-3, 3)$.
14. (n) La droite passant par deux points $(4, -2)$ et $(1, -2)$.
15. (o) La droite passant par deux points $(-3, 6)$ et $(2, 6)$.
16. (p) La droite passant par le point $(-1, 5)$ avec une pente de -1.
17. (q) La droite passant par le point $(-3, -8)$ avec une pente de 1.
18. (r) La droite passant par le point $(2, -1)$ avec une pente de -2.
19. (s) La droite passant par deux points $(1, 2)$ et $(3, 10)$.
20. (t) La droite passant par deux points $(-1, -8)$ et $(4, 2)$.

★ Défi



Une équipe de recherche environnementale surveille les changements du niveau de la mer dans un estuaire côtier sensible. Ils ont mis en place un système de grille où :

- L'axe des x représente la distance depuis une station de recherche centrale.
- L'axe des y représente la hauteur de la surface de la mer locale.

Lors d'une étude des marées, des capteurs situés dans deux stations de surveillance différentes enregistrent des hauteurs de surface de mer identiques et stables :

- Le capteur Ouest est situé aux coordonnées $A(-4, 2)$.
- Le capteur Est est situé aux coordonnées $B(9, 2)$.

Pour cartographier la limite uniforme de ce niveau d'eau à travers l'estuaire, l'équipe doit trouver l'équation de la droite limite reliant ces deux capteurs.

4-9

Mathématiques

Application de l'équation d'une droite

POINT ESSENTIEL !

- Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (a ≠ 0 ou b ≠ 0) représente également une droite.
- L'équation d'une droite peut être trouvée lorsque la pente et un point sur la droite sont connus.
- La pente d'une droite peut être trouvée en utilisant deux points sur la droite.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

L'équation de la droite sous ses différentes formes, et son application dans des situations géométriques.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Étant donné que trois points $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ et $C(a - 1, 2 - a)$ sont alignés sur la même droite, trouvez la valeur de la constante a.
2. Trouvez l'équation de la droite passant par l'intersection des 2 droites $2x - 3y + 1 = 0$ et $x + 2y - 3 = 0$, et passant par le point $(-1, 3)$.

Explication

1. L'équation de la droite passant par 2 points $A(2, 3)$ et $B(4, -1)$ est :
   $y - 3 = \frac{-1-3}{4-2}(x - 2)$. En simplifiant, on obtient $y = -2x + 7$ ... (i).
   Puisque (i) passe par $C(a - 1, 2 - a)$, en remplaçant : $2 - a = -2(a - 1) + 7$.
   En résolvant, on obtient $a = 7$.

2. $2x - 3y + 1 = 0$ ... (i), $x + 2y - 3 = 0$ ... (ii).
   En résolvant ce système d'équations, on trouve le point d'intersection $(1, 1)$.
   L'équation de la droite passant par 2 points $(1, 1)$ et $(-1, 3)$ est :
   $y - 1 = \frac{3-1}{-1-1}(x - 1)$.
   Soit $x + y - 2 = 0$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Étant donné que trois points $A(2, 5)$, $B(4, 9)$ et $C(-1, a)$ sont alignés sur la même droite, trouvez la valeur de la constante a.
2. Trouvez l'équation de la droite passant par l'intersection des 2 droites $x + 2y - 10 = 0$ et $2x + 3y - 7 = 0$, et passant par le point $(5, 6)$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

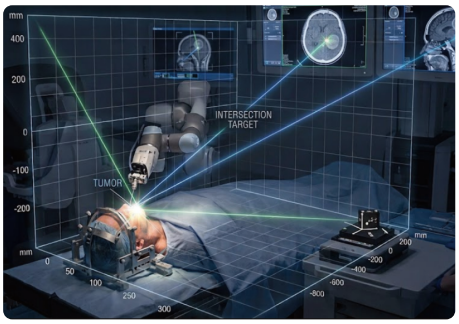
1. Étant donné que trois points $A(1, -1)$, $B(-2, -3)$ et $C(4, a)$ sont alignés, trouvez la valeur de la constante a.
2. Étant donné que trois points $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ et $C(a, -1)$ sont alignés, trouvez la valeur de la constante a.
3. Étant donné que trois points $A(-3, -9)$, $B(5, 7)$ et $C(a + 3, 3a - 2)$ sont alignés, trouvez la valeur de la constante a.
4. Trouvez l'équation de la droite passant par l'intersection des 2 droites $3x + 5y - 1 = 0$ et

$7x + 8y - 6 = 0$, et passant par le point $(-1, 2)$.

5. Trouvez l'équation de la droite passant par l'intersection des 2 droites $x + 2y - 4 = 0$ et $2x - y - 3 = 0$, et passant par le point $(-3, -1)$.

★ DÉFI — TRAJECTOIRE D'UN BRAS ROBOTIQUE

Dans une simulation plane de robotique, une cible est placée à l'intersection de deux droites. Le repère est gradué en millimètres. Les équations des deux droites sont :



- Chemin de Balayage Laser A : $6x + 5y + 7 = 0$
- Chemin de Balayage Laser B : $3x - 2y + 5 = 0$

Le problème géométrique :

Un bras mécanique part de l'origine $(0, 0)$. Dans cette simulation, sa trajectoire est le segment rectiligne reliant l'origine à la cible située au point d'intersection.

Les ingénieurs logiciels doivent calculer l'équation linéaire exacte de cette trajectoire d'aiguille pour programmer le chemin du bras robotique.

4-10

Mathématiques

Droites parallèles et perpendiculaires

POINT ESSENTIEL !

- Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (a ≠ 0 ou b ≠ 0) représente également une droite.
- Les problèmes concernant des droites parallèles ou perpendiculaires utilisent les **pentes**.
- Pour 2 droites $y = m_1x + k_1$ et $y = m_2x + k_2$:
  - 2 droites sont parallèles $\Longrightarrow m_1 = m_2$, c'est-à-dire que les pentes sont égales.
  - 2 droites sont perpendiculaires $\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$, c'est-à-dire que les pentes sont des inverses opposés.
- Résolvez les problèmes concernant les droites parallèles ou perpendiculaires en transformant l'équation sous la forme $y = mx + k$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Appliquer les conditions de parallélisme et de perpendicularité des droites pour résoudre des problèmes géométriques.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Identifiez lesquelles des droites suivantes sont parallèles entre elles et lesquelles sont perpendiculaires.
   - (a) $y = 2x + 3$
   - (b) $y = -3x + 2$
   - (c) $x - 3y + 1 = 0$
   - (d) $2x - y - 1 = 0$
   - (e) $x + 3y + 3 = 0$
2. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(2, -4)$ et parallèle à $3x - 2y + 1 = 0$.
3. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(-2, 5)$ et perpendiculaire à $3x + 5y + 1 = 0$.

Explication

1. Trouvez la pente de chaque droite.
   - (a) $y = 2x + 3$, la pente est 2
   - (b) $y = -3x + 2$, la pente est -3
   - (c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, la pente est $\frac{1}{3}$
   - (d) $y = 2x - 1$, la pente est 2
   - (e) $y = -\frac{1}{3}x - 1$, la pente est $-\frac{1}{3}$

Les droites parallèles (pentes égales) sont **(a) et (d)**.
Les droites perpendiculaires (pentes inverses opposées) sont **(b) et (c)**.

2. $3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, la pente est $\frac{3}{2}$.
   La droite parallèle passe par $(2, -4)$ avec une pente de $\frac{3}{2}$.
   $y - (-4) = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow 3x - 2y - 14 = 0$.

3. $3x + 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$, la pente est $-\frac{3}{5}$.
   La droite perpendiculaire passe par $(-2, 5)$ avec une pente de $\frac{5}{3}$.
   $y - 5 = \frac{5}{3}(x - (-2)) \Rightarrow 5x - 3y + 25 = 0$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Identifiez lesquelles des droites suivantes sont parallèles entre elles et lesquelles sont perpendiculaires.
   - (a) $y = 3x + 1$
   - (b) $y = 4x - 1$
   - (c) $y = -4x - 7$
   - (d) $6x - 2y = 5$
   - (e) $8x + 2y - 3 = 0$
   - (f) $x + 4y - 4 = 0$
2. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(1, -3)$ et parallèle à $6x + 3y - 5 = 0$.
3. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(2, 1)$ et perpendiculaire à $2x + 3y + 4 = 0$.

EXERCICES

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 1, puis discutez de la réponse.

Résolvez les problèmes suivants :

1. Identifiez lesquelles des droites suivantes sont parallèles entre elles et lesquelles sont perpendiculaires.
   - (a) $y = 3x - 1$
   - (b) $y = -3x + 4$
   - (c) $y = x - 3$
   - (d) $6x + 2y + 5 = 0$
   - (e) $2x - 2y - 1 = 0$
   - (f) $x + 3y - 2 = 0$
2. Identifiez lesquelles des droites suivantes sont parallèles entre elles et lesquelles sont perpendiculaires.
   - (a) $y = 2x - 1$
   - (b) $y = -x + 4$
   - (c) $y = \frac{3}{2}x + 6$
   - (d) $x + y + 3 = 0$
   - (e) $2x + 3y + 8 = 0$
   - (f) $3x + 6y - 1 = 0$
3. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(1, -2)$ et parallèle à $2x - y + 5 = 0$.
4. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(-1, 2)$ et parallèle à $2x + 3y = 0$.
5. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(3, -1)$ et parallèle à $3x + 2y + 1 = 0$.
6. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(2, -5)$ et perpendiculaire à $2x + y - 1 = 0$.
7. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(-1, 3)$ et perpendiculaire à $5x - 2y + 3 = 0$.
8. Trouvez l'équation de la droite passant par le point $(-2, -5)$ et perpendiculaire à $3x - 2y - 7 = 0$.

★ Défi

Pour les droites L_1: $2x + 3y - 10 = 0$, L_2: $kx - 2y + 5 = 0$, L_3: $4x + my - 1 = 0$, si L_1 est perpendiculaire à L_2 et L_1 est parallèle à L_3, alors trouvez $\frac{m}{k}$.

4-11

Mathématiques

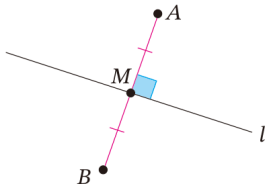
Médiatrice et points symétriques par rapport à une droite

POINT ESSENTIEL !

- Puisque la **médiatrice** du segment de droite (AB) est perpendiculaire à la droite AB et passe par le point médian du segment (AB), on la trouve en utilisant la pente de la droite (AB) et les coordonnées du point médian du segment (AB).
- Pour trouver les coordonnées du point $B(s, t)$, qui est symétrique au point A par rapport à la droite l, nous exprimons les deux conditions suivantes sous forme d'équations et les résolvons simultanément : **le segment de droite (AB) est perpendiculaire à** l et **le point médian de (AB) se trouve sur la droite** l.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Dériver l'équation de la médiatrice d'un segment de droite et identifier les points de symétrie d'une droite, en appliquant ces concepts dans des contextes géométriques.



MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Étant donné les points $A(5, 11)$ et $B(1, -1)$, trouvez l'équation de la médiatrice du segment de droite (AB).
2. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(-4, 3)$ par rapport à la droite $3x - y + 5 = 0$.

Explication

1. La pente de la droite (AB) est $\frac{-1-11}{1-5} = 3$, donc la pente de la droite perpendiculaire est $-\frac{1}{3}$.

   Les coordonnées du point médian du segment (AB) sont $\left(\frac{5+1}{2}, \frac{11-1}{2}\right)$, soit $(3, 5)$.

   La médiatrice passe par $(3, 5)$ avec une pente de $-\frac{1}{3}$:

   $y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow x + 3y - 18 = 0$.

2. Soit (s, t) les coordonnées du point B, et la ligne soit l.

   La pente de (AB) est $\frac{t-3}{s+4}$, et la pente de l est 3.

   Puisque $(AB) \perp l, \frac{t-3}{s+4} = -\frac{1}{3} \Rightarrow s + 3t - 5 = 0 \ldots (i)$

   Le point médian de (AB) est $\left(\frac{-4+s}{2}, \frac{3+t}{2}\right)$ et se trouve sur l :

3. $3\frac{-4+s}{2} - \frac{3+t}{2} + 5 = 0 \Rightarrow 3s - t - 5 = 0 \ldots (ii)$

   En résolvant (i) et (ii), on obtient $s = 2, t = 1$. Donc, $B(2, 1)$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Étant donné les points $A(-1, 2)$ et $B(3, -4)$, trouvez l'équation de la médiatrice du segment de droite (AB).
2. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(0, 4)$ par rapport à la droite $2x - y - 1 = 0$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les équations des médiatrices des segments de droite AB suivants.
   - (a) $A(-2, 3), B(2, 1)$
   - (b) $A(-1, 2), B(5, -2)$
   - (c) $A(0, 6), B(4, 4)$
2. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(1, 2)$ par rapport à la droite $x + 2y - 10 = 0$.
3. Trouvez les coordonnées du point B symétrique au point $A(4, -1)$ par rapport à la droite $4x - 2y - 3 = 0$.

★ Défi

Dans un modèle de dispositif optique, l'axe du faisceau est la droite y = 2x. Un capteur est placé en A$(5, 0)$. Déterminez les coordonnées du point B, symétrique de A par rapport à cette droite.

Trouvez les coordonnées du point cible B pour assurer un étalonnage précis du système.

4-12

Mathématiques

Distance entre un point et une droite

POINT ESSENTIEL !

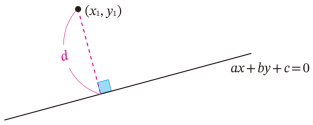
- La distance d entre le point (x_1, y_1) et la droite $ax + by + c = 0$ est :

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Pour trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point à une droite, il suffit de trouver la distance entre le point et la droite.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer la distance perpendiculaire d'un point à une droite et appliquer cette compétence dans la résolution de problèmes géométriques.



MISE EN ROUTE

Trouvez les valeurs suivantes :

1. La distance d entre le point $(-2, 1)$ et la droite $3x - 2y + 5 = 0$.
2. La longueur de la perpendiculaire OH abaissée de l'origine O à la droite $3x - y = 5$.

Explication

1. $$d = \frac{|3(-2) - 2(1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

2. La longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point à une droite est la distance entre le point et la droite.
En transformant $3x - y = 5$, on obtient $3x - y - 5 = 0$.
$$OH = \frac{|3(0) - 1(0) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les valeurs suivantes :

1. La distance entre le point $(3, -2)$ et la droite $x + 2y - 4 = 0$.
2. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $(-1, 5)$ à la droite $y = 3x - 2$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Trouvez les valeurs suivantes :

1. La distance entre le point $(-3, 2)$ et la droite $2x - 3y + 6 = 0$.
2. La distance entre le point $(-3, 7)$ et la droite $12x - 5y = 7$.
3. La distance entre le point $(-8, 1)$ et la droite $y = 2x - 3$.
4. La distance entre l'origine et la droite $3x - 4y - 5 = 0$.
5. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $(2, 3)$ à la droite $3x + 2y + 1 = 0$.
6. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $(13, 4)$ à la droite $3x + 4y - 5 = 0$.
7. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $(1, 2)$ à la droite $y = 3x + 1$.

★ Défi

Dans un modèle plan, un faisceau lumineux est modélisé par la droite $y = \frac{1}{3}x + 2$. Un capteur est situé à proximité à $P(-1, 5)$.

Calculez la distance minimale entre le capteur P et la droite représentant le faisceau. Il s'agit d'une distance géométrique dans le modèle.

4-13

Mathématiques

Aire d'un triangle

POINT ESSENTIEL !

Comment trouver l'aire du ΔABC sur le plan de coordonnées :

- Pour la base, trouvez la distance entre les 2 points A et B.
- Pour la hauteur, trouvez la distance entre le point C et la droite (AB).

MISE EN ROUTE

Trouvez l'aire du ΔABC avec les sommets $A(1, 1)$, $B(3, 7)$ et $C(-3, -1)$.

Explication

L'équation de la droite (AB) est : $y-1=\frac{7-1}{3-1}(x-1)$.

En simplifiant, on obtient $3x - y - 2 = 0$.

$(AB)=\sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}\ldots(i)$

La distance entre le point C et la droite (AB) est : $\frac{|3(-3)-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\ldots(ii)$

De (i) et (ii), l'aire requise du ΔABC est : $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les aires du ΔABC avec les sommets suivants :

1. (a) $A(1, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(3, -6)$
2. (b) $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 4)$

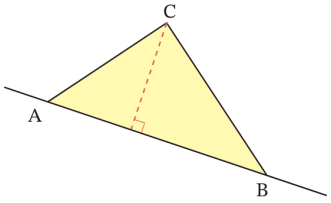
EXERCICES

Trouvez les aires du ΔABC avec les sommets suivants :

1. (a) $A(0, -6)$, $B(2, -2)$, $C(1, 5)$
2. (b) $A(-2, 4)$, $B(-3, -5)$, $C(5, -1)$
3. (c) $A(2, 5)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

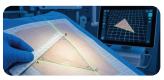
Déterminer l'aire d'un triangle en utilisant des coordonnées.



Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la section d'essai, puis discutez de la réponse.

★ Défi



Dans un modèle plan, une zone triangulaire a pour sommets A(-2, 1), B(1, 5) et C(-21, -21). L'unité de longueur est le millimètre.

Calculez l'aire du triangle ABC en millimètres carrés.

4-14

Mathématiques

Droite passant par un point fixe

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer la droite passant par un point fixe.

POINT ESSENTIEL !

Étapes pour résoudre les problèmes impliquant des droites "passant par un point fixe pour toutes les valeurs de k" :

1. Réorganisez l'équation de la droite par rapport à k et traitez-la comme une identité en k : $(ax + by + c)k + (\mathbf{a'}x + \mathbf{b'}y + \mathbf{c'}) = 0$.
2. À partir de l'identité en k, créez un système d'équations et résolvez-le :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

MISE EN ROUTE

La droite $(k - 4)x + (k + 2)y + k + 5 = 0$ passe par un point fixe indépendamment de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.

Explication

En réorganisant par rapport à k, on obtient : $k(x + y + 1) + (-4x + 2y + 5) = 0$.

Puisque cela doit être vrai pour tout k :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -4x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

En résolvant, on obtient $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$.

Par conséquent, le point fixe par lequel passe la droite est $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

À VOUS D'ESSAYER

La droite $(2k + 1)x - (k + 2)y + 7k + 8 = 0$ passe par un point fixe pour toutes les valeurs de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la section d'essai, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. La droite $(k + 2)x + ky - 6 = 0$ passe par un point fixe pour toutes les valeurs de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.
2. La droite $(k + 3)x - (2k + 1)y + k - 2 = 0$ passe par un point fixe pour toutes les valeurs de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.
3. La droite $(k + 3)x + (3k + 2)y + 7 = 0$ passe par un point fixe pour toutes les valeurs de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.

★ Défi

La droite $-(k - 2)x + (k - 3)y = -3k + 5$ passe par un point fixe pour toutes les valeurs de k. Trouvez les coordonnées de ce point fixe.

4-15

Mathématiques

Conditions pour ne pas former un triangle

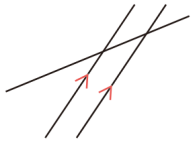
POINT ESSENTIEL !

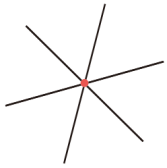
Il y a 2 cas pour les conditions où 3 droites ne forment pas un triangle :

1. **2 droites sont parallèles** ⟹ Les pentes des 2 droites sont les mêmes.
2. **3 droites se coupent en 1 point** ⟹ Trouvez le point d'intersection de 2 droites, et la droite restante passe également par ce point.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Dériver et expliquer les conditions dans lesquelles un triangle ne se forme pas (colinéarité de points).





MISE EN ROUTE

Si les 3 droites x - $y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$, et $ax + 3y$ - $4 = 0$ ne forment pas un triangle, trouvez la valeur de la constante a.

Explication

Tout d'abord, vérifiez la condition où 2 des 3 droites données sont parallèles.

La transformation des 3 droites donne :

$$\begin{cases} y = x + 1 \ldots (i) \\ y = \text{-}2x \text{ - } 2 \ldots (ii) \\ y = -\frac{a}{3}x + \frac{4}{3} \ldots (iii) \end{cases}$$

Puisque (i) et (ii) ne sont pas parallèles, vérifiez les cas où (i) et (iii) sont parallèles, et (ii) et (iii) sont parallèles.

(i) et (iii) sont parallèles quand : $1 = -\frac{a}{3}$, donc $a = \text{-}3$.

(ii) et (iii) sont parallèles quand : $-2 = -\frac{a}{3}$, donc $a = 6$.

Ensuite, vérifiez la condition où les 3 droites se coupent en 1 point.

En résolvant (i) et (ii) simultanément, le point d'intersection est $(\text{-}1, 0)$.

Puisque (iii) passe par le point $(\text{-}1, 0)$, alors $0 = -\frac{a}{3}(-1) + \frac{4}{3} \Rightarrow a = -4$.

Par conséquent, $a = \text{-}4, \text{-}3, 6$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la section d'essai, puis discutez de la réponse.

À VOUS D'ESSAYER

Si les 3 droites x - $2y + 8 = 0$, $x + y$ - $1 = 0$, et $ax + y$ - $5 = 0$ ne forment pas un triangle, trouvez la valeur de la constante a.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Si les 3 droites $x - 2y + 1 = 0$, $3x + 2y = 6$, et $ax - 3y + 2 = 0$ ne forment pas un triangle, trouvez la valeur de la constante a.
2. Si les 3 droites $x - y = -1$, $3x + 2y = 12$, et $ax - y = a - 1$ ne forment pas un triangle, trouvez la valeur de la constante a.

★ Défi

Si les trois droites $x + 2y - 1 = 0$, $3x + y + 2 = 0$ et $mx + 4y - 3 = 0$ ne forment pas un triangle, trouvez la somme de toutes les valeurs possibles de m.

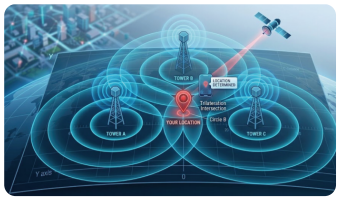
4-16

Mathématiques

Équation d'un cercle (1)

Concept 3 : Cercles

Dans un modèle plan de localisation, la distance d'un point inconnu à un repère fixe est donnée. L'ensemble des positions possibles est alors un cercle centré sur ce repère. Avec plusieurs repères et leurs distances, on recherche les points communs des cercles correspondants.



Deux cercles peuvent avoir zéro, un ou deux points communs. Une troisième distance compatible peut lever l'ambiguïté. Ce modèle suppose des distances connues exactement dans un même plan. Les mesures réelles comportent des incertitudes, le modèle ne suffit donc pas à garantir une position exacte.

Question directrice : Comment écrire l'équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon, et utiliser des distances pour localiser un point ?

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Dériver et utiliser les différentes formes de l'équation d'un cercle—étant donné son centre et son rayon, ou en se basant sur des points spécifiques.

POINT ESSENTIEL !

- L'équation d'un cercle de centre (a, b) et de rayon r est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (Forme standard). Surtout lorsque l'origine est le centre : $x^2 + y^2 = r^2$.
- L'équation d'un cercle peut également être exprimée comme $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ (Forme générale).
- Lorsque le centre et le rayon du cercle sont connus, utilisez $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Lorsque $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ est transformé en $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, si $k > 0$, cela représente un cercle de centre (a, b) et de rayon $\sqrt{k}$.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez l'équation du cercle de centre $(3, -2)$ et de rayon 5.
2. Déterminez quel type de figure représente $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

Explication

1. Puisque le centre et le rayon sont connus : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
2. Transformez dans la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
   $(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 6 = 0 \Longrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
   Par conséquent, la figure requise est un cercle de centre $(3, -1)$ et de rayon 2.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les équations des cercles suivants.
   - (a) Centre $(-3, 1)$, rayon 2
   - (b) Le centre est l'origine, le rayon est 4
2. Déterminez quel type de figure représente $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les équations des cercles suivants.
   - (a) Centre $(3, 4)$, rayon 6
   - (b) Centre $(-2, 6)$, rayon $2\sqrt{3}$
   - (c) Le centre est l'origine, le rayon est 5
2. Déterminez quel type de figures les équations suivantes représentent.
   - (a) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$
   - (b) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
   - (c) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
   - (d) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$

★ Défi

Trouvez l'équation du cercle passant par les deux points $A(2,5)$ et $B(8,1)$ tel que son centre se trouve sur la droite dont l'équation est $x + y = 8$.

4-17

Mathématiques

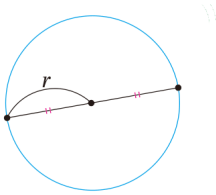
Équation d'un cercle (2)

POINT ESSENTIEL !

- Lorsque le centre et le rayon d'un cercle sont connus, utilisez $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Le rayon d'un cercle peut être trouvé par la distance entre le centre et un point sur le cercle.
- Le centre d'un cercle où les coordonnées des deux extrémités de son diamètre sont connues est le point médian du diamètre.
- Lorsque 3 points sur le cercle sont connus, utilisez $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Dériver et utiliser les différentes formes de l'équation d'un cercle—étant donné son centre et son rayon, ou en se basant sur des points spécifiques.



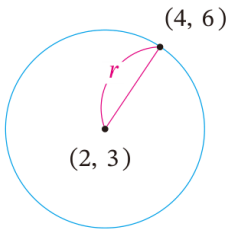
MISE EN ROUTE

Trouvez les équations des cercles suivants :

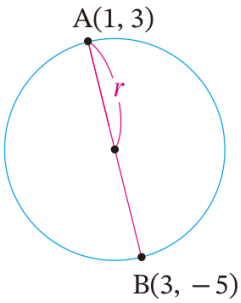
1. Un cercle de centre $(2, 3)$ passant par le point $(4, 6)$.
2. Un cercle avec 2 points $A(1, 3)$ et $B(3, -5)$ comme extrémités de son diamètre.
3. Un cercle passant par 3 points $(1, 1)$, $(2, -1)$, et $(3, 2)$.

Explication

1. Trouvez le rayon : $r^2 = (2 - 4)^2 + (3 - 6)^2 = 13$. L'équation est $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

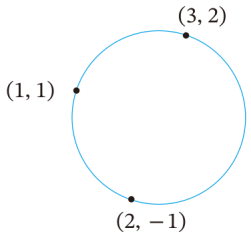


2. Le centre est le point milieu de AB : $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+(-5)}{2}\right) = (2, -1)$.



Le rayon au carré est $(2 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 = 17$. L'équation est $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$.

3. Utilisez $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$. En remplaçant les 3 points :
   $(1, 1) \Longrightarrow l + m + n + 2 = 0$ ... (i)
   $(2, -1) \Longrightarrow 2l - m + n + 5 = 0$ ... (ii)
   $(3, 2) \Longrightarrow 3l + 2m + n + 13 = 0$ ... (iii)
   En résolvant, on obtient $l = -5$, $m = -1$, $n = 4$. L'équation est
   $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$.



À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les équations des cercles suivants :

1. Un cercle de centre (-3, 1) passant par le point (4, -2).
2. Un cercle avec 2 points (3, 4) et (5, -2) comme extrémités de son diamètre.
3. Un cercle passant par 3 points (0, 1), (-1, 2), et (3, 1).

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 3, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Trouvez les équations des cercles suivants :

1. Un cercle de centre (1, -3) passant par le point (-3, 0).
2. Un cercle de centre (-4, 1) passant par le point (3, -2).
3. Un cercle de centre (2, -1) passant par l'origine.
4. Un cercle avec l'origine comme centre passant par le point (4, -3).
5. Un cercle avec 2 points (4, 7) et (-2, -1) comme extrémités de son diamètre.
6. Un cercle avec 2 points (4, -2) et (-6, -2) comme extrémités de son diamètre.
7. Un cercle avec 2 points (-3, 0) et (-1, 2) comme extrémités de son diamètre.
8. Un cercle avec 2 points (-3, 6) et (3, -2) comme extrémités de son diamètre.
9. Un cercle passant par 3 points (0, 0), (-1, 1), et (2, 4).
10. Un cercle passant par 3 points (-4, 6), (0, 8), et (3, -1).
11. Un cercle passant par 3 points (1, 1), (5, -1), et (-3, -7).

★ Défi

Dans un modèle plan de propagation, on suppose qu'un front d'onde est circulaire. Cette hypothèse géométrique simplifie la situation étudiée.

Trois capteurs situés aux points (0, 2), (2, 0) et (4, 6) appartiennent au même front d'onde.

Déterminez l'équation du cercle passant par ces trois points, puis son centre et son rayon.

4-18

Mathématiques

Équation d'un cercle (3)

POINT ESSENTIEL !

- Un cercle de rayon r > 0 tangent aux deux axes a pour centre (±r, ±r). Choisissez les signes selon le quadrant du point donné, sinon, examinez les quatre cas.
- Le rayon d'un cercle tangent à l'axe des x ou à l'axe des y peut être trouvé par la distance entre le centre et le point de tangence.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Dériver et utiliser les différentes formes de l'équation d'un cercle—étant donné son centre et son rayon, ou en se basant sur des points spécifiques.

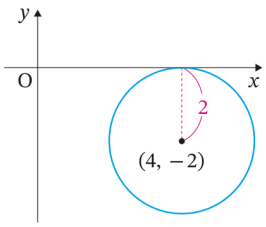
MISE EN ROUTE

Trouvez les équations des cercles suivants :

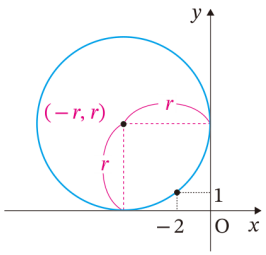
1. Un cercle de centre (4, -2) tangent à l'axe des x.
2. Un cercle passant par le point (-2, 1) et tangent à la fois à l'axe des x et à l'axe des y.
3. Un cercle dont le centre se trouve sur la droite y = -x, passant par 2 points (5, 2) et (-2, 3).

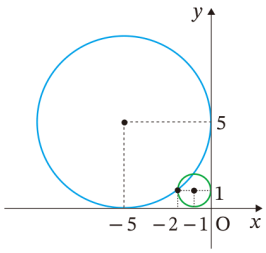
Explication

1. Le rayon est 2. L'équation est $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

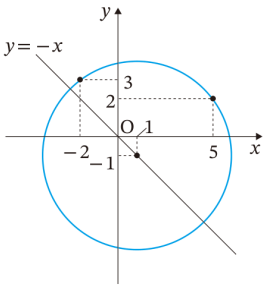


2. Le centre est $(-r, r)$ avec $r > 0$. $(-2 + r)^2 + (1 - r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow r = 1, 5$. Les équations sont $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ et $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.





3. Le centre est $(a, -a)$. $(5 - a)^2 + (2 + a)^2 = r^2$ et $(-2 - a)^2 + (3 + a)^2 = r^2$. En résolvant, $a = 1$, $r^2 = 25$. L'équation est $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$.



À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les équations des cercles suivants :

1. Un cercle de centre $(-2, 3)$ tangent à l'axe des y.
2. Un cercle passant par le point $(1, 2)$ et tangent à la fois à l'axe des x et à l'axe des y.
3. Un cercle dont le centre se trouve sur la droite $y = x + 5$, passant par l'origine et le point $(1, 2)$.

EXERCICES

Trouvez les équations des cercles suivants :

1. Un cercle de centre $(-1, 4)$ tangent à l'axe des x.
2. Un cercle de centre $(3, -4)$ tangent à l'axe des x.
3. Un cercle de centre $(5, -4)$ tangent à l'axe des x.
4. Un cercle de centre $(-1, 6)$ tangent à l'axe des y.
5. Un cercle de centre $(2, -5)$ tangent à l'axe des y.
6. Un cercle de centre $(-3, -4)$ tangent à l'axe des y.
7. Un cercle passant par le point $(-1, -2)$ et tangent à la fois à l'axe des x et à l'axe des y.
8. Un cercle passant par le point $(-2, -1)$ et tangent à la fois à l'axe des x et à l'axe des y.
9. Un cercle passant par le point $(8, -1)$ et tangent à la fois à l'axe des x et à l'axe des y.
10. Un cercle dont le centre se trouve sur la droite $y = x + 1$, passant par 2 points $(3, 4)$ et $(1, 4)$.
11. Un cercle dont le centre se trouve sur la droite $y = 2x - 6$, passant par 2 points $(3, 7)$ et $(-1, 3)$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 3, puis discutez de la réponse.

★ Défi

Dans un modèle plan de rotation, un mobile suit un cercle dont le centre appartient à l'axe des abscisses. La trajectoire passe par $P_1(-2, 2)$ et $P_2(1, 1)$. Déterminez l'équation du cercle, son centre et son rayon.

4-19

Mathématiques

Conditions pour représenter un cercle

POINT ESSENTIEL !

- Dans $(x - a)^2 + (y - b)^2 = C$: si $C > 0$, on obtient un cercle, si $C = 0$, le seul point (a, b), si $C < 0$, aucun point réel.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Identifier les conditions requises pour former l'équation d'un cercle.

MISE EN ROUTE

Trouvez la plage de valeurs pour la constante k telle que l'équation $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 4k + 6 = 0$ représente un cercle.

Explication

En transformant, on obtient : $(x - k)^2 - k^2 + (y + k)^2 - k^2 + 4k + 6 = 0$

$(x - k)^2 + (y + k)^2 = 2k^2 - 4k - 6$

Pour représenter un cercle, $2k^2 - 4k - 6 > 0$.

En résolvant, on obtient $k < -1$ **ou** $k > 3$.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez la plage de valeurs pour la constante k telle que l'équation $x^2 + y^2 + 2kx - 4ky + 4k^2 + 6 = 0$ représente un cercle.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez la plage de valeurs pour la constante k telle que l'équation $x^2 + y^2 + 2x - y + k = 0$ représente un cercle.
2. Trouvez la plage de valeurs pour la constante k telle que l'équation $x^2 + y^2 + 6kx - 2ky + 28k + 6 = 0$ représente un cercle.
3. Trouvez la plage de valeurs pour la constante k telle que l'équation $x^2 + y^2 + 2kx - 2(k + 3)y + 4k^2 + 1 = 0$ représente un cercle.

★ Défi



Dans un modèle plan, une frontière est décrite par $x^2 + y^2 + 6x - 2ky + 2k^2 - 4k + 9 = 0$. Déterminez les valeurs réelles de k pour lesquelles cette équation représente un cercle de rayon strictement positif. Cette condition géométrique ne garantit pas la sécurité d'un dispositif réel.

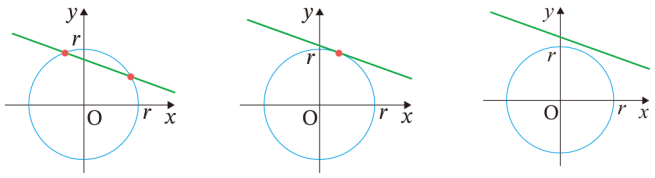
4-20

Mathématiques

Points d'intersection d'un cercle et d'une droite (1)

POINT ESSENTIEL !

- Lors de la recherche des coordonnées ou du nombre de points d'intersection entre un cercle et une droite, résolvez simultanément les équations du cercle et de la droite.
  - Pour trouver les coordonnées, trouvez les solutions aux équations simultanées.
  - Pour trouver le nombre de points, créez une équation quadratique et vérifiez le signe du discriminant D.
    - $D > 0$: 2 points d'intersection (Se croise en deux points distincts).
    - $D = 0$: 1 point d'intersection (Tangente).
    - $D < 0$: 0 point d'intersection (N'a aucun point d'intersection).



OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer les points d'intersection entre un cercle et une droite.

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées des points d'intersection du cercle $(x + 2)^2 + y^2 = 10$ et de la droite $y = -2x + 1$.
2. Trouvez le nombre de points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 2$ et de la droite $x - y + 3 = 0$.

Explication

1. Résolvez simultanément les équations du cercle et de la droite.

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 10 \ldots\ldots \text{(i)} \\ y = -2x + 1 \ldots\ldots \text{(ii)} \end{cases}$$

En substituant (ii) dans (i) et en simplifiant, on obtient :

$5x^2 - 5 = 0$

La résolution de cette équation donne $x = \pm 1$.

Substituez dans l'équation linéaire.

D'après (ii), quand $x = 1, y = -1$, quand $x = -1, y = 3$.

Par conséquent, les coordonnées des points recherchés sont $(1, -1), (-1, 3)$.

2. Résolvez simultanément les équations du cercle et de la droite.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \ldots\ldots \text{(i)} \\ x - y + 3 = 0 \ldots\ldots \text{(ii)} \end{cases}$$

D'après (ii), $y = x + 3 \ldots\ldots$ (ii)'

En substituant (ii)' dans (i) et en simplifiant, on obtient :

$2x^2 + 6x + 7 = 0$

Soit D le discriminant de cette équation,

$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20 < 0$

Par conséquent, le nombre de points d'intersection est 0.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées des points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 4$ et de la droite $x + y = 2$.
2. Trouvez le nombre de points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 10$ et de la droite $y = 2x - 5$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants :

1. Trouvez les coordonnées des points d'intersection pour les cercles et les droites suivants :
   - (a) $x^2 + y^2 = 10, y = 3x - 10$
   - (b) $x^2 + y^2 = 5, 2x - y + 5 = 0$
   - (c) $(x-1)^2 + y^2 = 10, x + 3y - 1 = 0$
2. Trouvez le nombre de points d'intersection pour les cercles et les droites suivants :
   - (a) $x^2 + y^2 = 5, y = x + 2$
   - (b) $x^2 + y^2 = 2, 2x + 3y - 6 = 0$
   - (c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5, x + 2y + 2 = 0$

4-21

Mathématiques

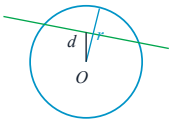
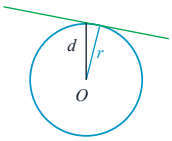
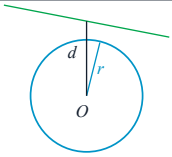
Points d'intersection d'un cercle et d'une droite (2)

POINT ESSENTIEL !

Pour déterminer la position relative d'un cercle et d'une droite :

Après substitution de l'équation de la droite dans celle du cercle, étudiez le discriminant D : D > 0 donne deux points d'intersection, D = 0 une tangence, et D < 0 aucun point commun. Une intersection existe donc si et seulement si D ≥ 0.

Si le rayon est inconnu, comparez le rayon r à la distance d du centre à la droite pour déterminer leur position relative.

Position relative entre un cercle et une droite :	 **Deux points distincts**	 **Tangence**	 **Aucun point** d'intersection
Comparaison entre r et d :	$r > d$	$r = d$	$r < d$

MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1 Si le cercle $x^2 + y^2 = 5$ et la droite $y = 2x - k$ se coupent en 2 points distincts, trouvez l'intervalle de valeurs de la constante k.

2 Si le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et la droite $2x + y - 5 = 0$ sont tangents, trouvez la valeur du rayon r du cercle.

Explication

1 Substituez l'expression de la droite dans l'équation du cercle, puis étudiez le discriminant de l'équation obtenue.

$5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0$

Soit D le discriminant de cette équation,

$D = (-4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 5)$

$= -4k^2 + 100 > 0$

Deux points d'intersection distincts correspondent à $D > 0$.

La résolution de ce système donne $-5 < k < 5$

2 Puisque le rayon du cercle est inconnu, trouvez la distance d entre le centre du cercle $(0, 0)$ et la droite.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer les points d'intersection entre un cercle et une droite.

$d = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$

$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$

$= \sqrt{5}$

Donc $r = \sqrt{5}$.

Lorsqu'elles sont tangentes, $r = d$.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1 Si le cercle $x^2 + y^2 = 4$ et la droite $y = mx + 4$ sont tangents, trouvez la valeur de la constante m.

2 Si le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et la droite $x - 3y - 10 = 0$ n'ont aucun point d'intersection, trouvez la plage de valeurs pour le rayon r du cercle.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1 Si le cercle $x^2 + y^2 = 8$ et la droite $y = x + m$ sont tangents, trouvez la valeur de la constante m.

2 Si le cercle $x^2 + y^2 = 10$ et la droite $y = 3x + n$ n'ont aucun point d'intersection, trouvez l'intervalle de valeurs pour la constante n.

3 Si le cercle $x^2 + y^2 = 5$ et la droite $y = 2x + m$ ont des points d'intersection, trouvez la plage de valeurs pour la constante m.

4 Si le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et la droite $y = x + 2$ sont tangents, trouvez la valeur du rayon r du cercle.

5 Si le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et la droite $4x - y + 17 = 0$ se coupent en 2 points distincts, trouvez la plage de valeurs pour le rayon r du cercle.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

★ Défi

Une station radar côtière cartographie sa zone de couverture comme une zone circulaire centrée à l'origine :

$x^2 + y^2 = r^2$

Une voie maritime internationale rectiligne suit le trajet modélisé par l'équation linéaire :

$3x + 4y - 10 = 0$

Dans ce modèle plan, on impose que la droite reste entièrement à l'extérieur du disque de couverture, sans tangence ni intersection. Déterminez l'intervalle des rayons r > 0 qui respecte cette condition géométrique.

4-22

Mathématiques

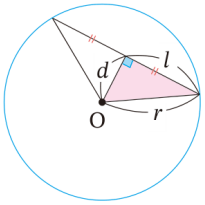
Longueur d'une corde

POINT ESSENTIEL !

Soient r le rayon, d la distance du centre à la droite et ℓ la demi-longueur de la corde. La perpendiculaire issue du centre coupe la corde en son milieu : $r^2 = d^2 + \ell^2$. Pour $0 \le d \le r$, la longueur totale est $L = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Calculer la longueur de la corde commune formée par l'intersection d'un cercle et d'une droite.



MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1 Trouvez la longueur de la corde coupée par le cercle $x^2 + y^2 = 4$ sur la droite $x + y - 1 = 0$.

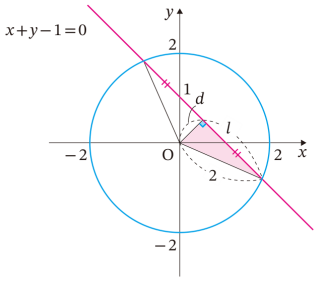
2 Déterminez la valeur de la constante k telle que la longueur du segment de droite reliant les deux points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 3$ et de la droite $x - y + k = 0$ est égal à 2.

Explication

1. Puisqu'il s'agit d'un problème de trouver la longueur d'une corde, commencez par dessiner un diagramme pour visualiser.

Soit d la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle $(0, 0)$ à la droite $x + y - 1 = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



La longueur de la perpendiculaire est la distance entre le point et la droite.

Soit l la moitié de la longueur de la corde recherchée. Le rayon du cercle étant de 2, d'après le théorème de Pythagore :

$$l^2 = 2^2 - d^2$$

$$l^2 = 4 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$l^2 = \frac{7}{2}$$

De $l > 0$, $l = \frac{\sqrt{14}}{2}$

Par conséquent, la longueur requise de la corde est de $2l = \sqrt{14}$.

2. Puisque le segment de droite reliant les 2 points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 3$ et de la droite $x - y + k = 0$ forme une corde, représentez-la par un schéma. Soit d la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle $(0, 0)$ à la droite $x - y + k = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \quad \text{(i)}$$

$$d^2 = (\sqrt{3})^2 - 1^2$$

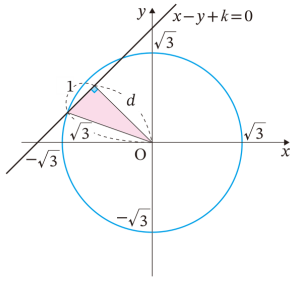
$$d^2 = 2$$

$$d > 0, \quad d = \sqrt{2} \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|k| = 2$$

$$k = \pm 2$$



Lorsqu'on supprime le signe de valeur absolue, on ajoute ±.

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Trouvez la longueur de la corde coupée par le cercle $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ sur la droite $x + 2y - 5 = 0$.

2. Déterminez la valeur de la constante k telle que la longueur du segment de droite reliant les deux points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 16$ et de la droite $y = x + k$ soit égale à $\sqrt{2}$.

Travaillez en binôme.
Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1 Trouvez la longueur de la corde coupée par le cercle $x^2 + y^2 = 10$ sur la droite $2x - y = 5$.

2. Trouvez la longueur de la corde coupée par le cercle $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ sur la droite $x + y = 4$.

3 Trouvez la longueur de la corde coupée par le cercle $x^2 + y^2 = 3$ sur la droite $x - y = 2$.

4 Déterminez la valeur de la constante k telle que la longueur du segment de droite reliant les deux points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 10$ et de la droite $y = x + k$ soit égale à $4\sqrt{2}$.

5 Déterminez la valeur de la constante k telle que la longueur du segment de droite reliant les deux points d'intersection du cercle $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ et de la droite $y = x + k$ soit égale à $3\sqrt{2}$.

★ Défi

Déterminez la valeur de la constante k telle que la longueur du segment de droite reliant les deux points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 7 = 0$ et de la droite $y = x + k$ soit égale à 4.

4-23

Mathématiques

Tangente à un cercle

POINT ESSENTIEL !

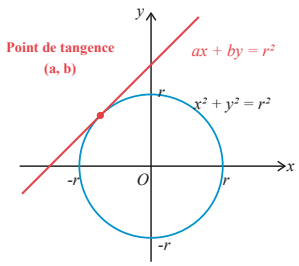
1 Pour le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, avec $r > 0$, la tangente au point (a, b) vérifiant $a^2 + b^2 = r^2$ a pour équation $ax + by = r^2$.

Lorsqu'une tangente est menée depuis un point extérieur au cercle, notez (a, b) son point de tangence.

Tangente menée depuis un point extérieur

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer l'équation d'une tangente à un cercle.



MISE EN ROUTE

Trouvez les équations des tangentes suivantes.

1 Tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $(4, 3)$

2 Tangente issue du point $P(1, 3)$ au cercle $x^2 + y^2 = 5$

Explication

1 Puisque le point de tangence est $(4, 3)$,

$4x + 3y = 25$

C'est la tangente au point (4, 3) du cercle.

2 Soient (a, b) les coordonnées du point de tangence...

L'équation de la tangente est $ax + by = 5$

Puisque cette droite passe par le point $P(1, 3)$, $a + 3b = 5$ .....(i)

De plus, puisque le point de tangence se trouve sur $x^2 + y^2 = 5$, $a^2 + b^2 = 5$ .....(ii)

Résolvez (i) et (ii) simultanément.

D'après (i), $a = -3b + 5$ .....$(i)'$

En substituant (i)′ dans (ii), on obtient $(-3b + 5)^2 + b^2 = 5$

La résolution de cette équation donne $b = 1, 2$

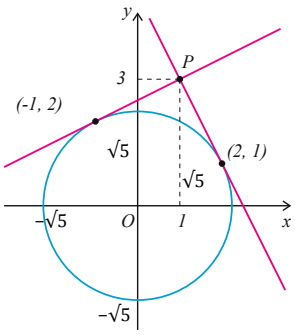
En substituant dans (i)′, lorsque $b = 1$, $a = 2$, lorsque $b = 2$, $a = -1$

Par conséquent, puisque le point de tangence est $(2, 1)$ ou $(-1, 2)$,

Les équations recherchées des tangentes sont $2x + y = 5$ et $-x + 2y = 5$.

Mémo — Tangentes issues d'un point extérieur

Il existe 2 tangentes issues d'un point extérieur au cercle.



À VOUS D'ESSAYER

Trouvez les équations des tangentes suivantes.

1 Tangente au cercle $x^2 + y^2 = 34$ au point $(5, 3)$

2 Tangente menée du point $(-2, 4)$ au cercle $x^2 + y^2 = 10$

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Trouvez les équations des tangentes suivantes.

1 Tangente au cercle $x^2 + y^2 = 10$ au point $(3, -1)$

2 Tangente au cercle $x^2 + y^2 = 29$ au point $(-5, -2)$

3 Tangente au cercle $x^2 + y^2 = 5$ au point $(-2, 1)$

4 Tangente menée du point $(-1, 3)$ au cercle $x^2 + y^2 = 5$

5 Tangente issue du point $(2, 1)$ au cercle $x^2 + y^2 = 1$

6 Tangente menée du point $(2, 6)$ au cercle $x^2 + y^2 = 20$

★ Défi



Dans un modèle plan de navigation, la limite d'une zone circulaire centrée à l'origine est représentée par l'équation :

$x^2 + y^2 = 20$

Le drone est actuellement en vol stationnaire au point de repère $P(2, 6)$.

Depuis le point P, déterminez les équations des deux droites tangentes au cercle et les coordonnées des points de contact. Ces droites décrivent des lignes de visée dans le modèle, elles ne suffisent pas à garantir la sécurité d'une navigation réelle.

4-24

Mathématiques

Position relative de deux cercles

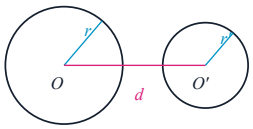
POINT ESSENTIEL !

1. Position relative de deux cercles

Soient r et r′ les rayons positifs et d la distance des centres. Comparez d à r + r′ et à |r − r′|. Pour d = 0 et r = r′, les cercles sont confondus, la tangence intérieure exige d > 0.

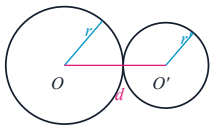
Extérieurs l'un à l'autre

$r + r' < d$



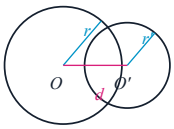
Tangents extérieurement

$r + r' = d$



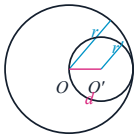
Intersection en 2 points

|r − r′| < d < r + r′



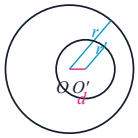
Tangents intérieurement

|r − r′| = d > 0



L'un à l'intérieur de l'autre

|r − r′| > d



MISE EN ROUTE

Résolvez les problèmes suivants.

1 Indiquez la position relative entre le cercle $x^2 + y^2 = 4$ et le cercle $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

2 Trouvez l'équation du cercle de centre $(3, 1)$ qui touche intérieurement le cercle $(x-1)^2+(y+3)^2 = 5$.

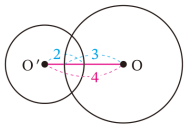
OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Déterminer la position relative de deux cercles : séparés, tangents ou sécants.

Explication

1. Puisque les centres des 2 cercles sont $(0, 0)$ et $(4, 0)$,

$d = \sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} = 4$



Puisque les rayons des deux cercles sont respectivement de 2 et 3,

De $3 - 2 < 4 < 3 + 2$,

$r - r' < d < r + r'$

Par conséquent, les 2 cercles se croisent en 2 points.

2. Puisque le centre du cercle $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$ est $(1, -3)$,

$d = \sqrt{(3-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = 2\sqrt{5}$

Puisque les 2 cercles se touchent intérieurement, $r - r' = d$.

Le rayon du cercle $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$ est $\sqrt{5}$, et puisque $\sqrt{5} < d, r' = \sqrt{5}$.

$r - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$r = 3\sqrt{5}$

L'équation du cercle recherchée est donc :

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 45$

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1. Choisissez la position relative des 2 cercles suivants de A à E, et répondez par la lettre.

(a) Le cercle $x^2 + y^2 = 9$ et $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

(b) Le cercle $(x - 1)^2 + y^2 = 52$ et le cercle $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 3$

A. Sont externes l'un à l'autre

B. Tangents extérieurement.

C. Tangents intérieurement.

D. L'un est à l'intérieur de l'autre

E. Intersection en 2 points

2. Trouvez l'équation du cercle de centre $(-3, -9)$ qui touche extérieurement le cercle $(x+6)^2 + (y+5)^2 = 1$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre Question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1 Choisissez la position relative des 2 cercles suivants de A à E et répondez avec la lettre.

(a) Le cercle $x^2 + y^2 = 4$ et $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

(b) Le cercle $x^2 + y^2 = 18$ et $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$

(c) Le cercle $(x + 3)^2 + y^2 = 16$ et le cercle $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$

d) Le cercle $x^2 + (y - 3)^2 = 45$ et le cercle $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 3$

A. Sont externes l'un à l'autre

B. Tangents extérieurement

C. Tangents intérieurement

D. L'un est à l'intérieur de l'autre

E. Intersection en 2 points

2 Trouvez l'équation du cercle de centre $(3, -9)$ qui touche intérieurement le cercle $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

★ Défi

Trouvez l'équation du cercle de centre $(-1, -2)$ qui touche extérieurement le cercle $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

4-25

Mathématiques

Points d'intersection de deux cercles

POINT ESSENTIEL !

Pour deux cercles non concentriques, soustrayez les équations normalisées des cercles : vous obtenez leur axe radical, qui passe par leurs points communs. Pour trouver ces points, résolvez ensuite le système formé par cette droite et l'un des cercles.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver les coordonnées des points d'intersection de deux cercles.

MISE EN ROUTE

1 Trouvez l'équation de la droite passant par les points d'intersection des cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$.

2 Trouvez les coordonnées des points d'intersection des cercles $x^2 + y^2 = 10$ et $x^2 + y^2 + 2x - y = 5$.

Explication

1. Soustrayons les équations des deux cercles :

$x^2 + y^2 = 4 \quad (i)$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9 \quad (ii)$

La soustraction de (ii) à (i) donne :

$-2x + 4y = -5$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

L'équation recherchée est donc :

$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

2. Résolution simultanée des équations des deux cercles :

$x^2 + y^2 = 10 \quad (i)$

$x^2 + y^2 + 2x - y = 5 \quad (ii)$

La soustraction de (ii) à (i) donne :

$-2x + y = 5$

$y = 2x + 5 \ldots\ldots(iii)$

En substituant (iii) dans (i), on obtient :

$x^2 + (2x + 5)^2 = 10$

$5x^2 + 20x + 15 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = -3, -1$

En substituant ces valeurs dans (iii) :

Lorsque $x = -3, y = -1$

Lorsque $x = -1, y = 3$

Par conséquent, les coordonnées des points d'intersection sont (-3, -1), (-1, 3).

À VOUS D'ESSAYER

Résolvez les problèmes suivants.

1 Trouvez l'équation de la droite passant par les points d'intersection des cercles $x^2 + y^2 = 6$ et $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 9$.

2. Trouvez les coordonnées des points d'intersection des cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la question 2, puis discutez de la réponse.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1 Trouvez l'équation de la droite passant par les points d'intersection des 2 cercles suivants.

(a) Les cercles $x^2 + y^2 = 10$ et $x^2 + y^2 - 12x + 6y = 3$

(b) Les cercles $x^2 + y^2 = 4$ et $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

2 Trouvez les coordonnées des points d'intersection des cercles $x^2 + y^2 = 5$ et $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

★ Défi

Deux stations radar omnidirectionnelles suivent un drone.

La limite de couverture de la station Alpha est modélisée par $x^2 + y^2 = 25$.

La limite de couverture de la station Beta est modélisée par $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 65$.

Pour déterminer avec précision les emplacements où le drone passe d'un périmètre radar à l'autre, trouvez les points d'intersection de leurs limites de signal.

4-26

Mathématiques

Cercle passant par les points d'intersection de deux cercles

POINT ESSENTIEL !

1. Une famille de cercles passant par les points communs des cercles $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ et $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ s'écrit :

$k\,(x^2 + y^2 + px + qy + r) + (x^2 + y^2 + lx + my + n) = 0$

Multipliez la première équation par k et ajoutez la seconde. Excluez k = −1 : les termes quadratiques s'annulent alors et donnent l'axe radical, pas un cercle.

1 Les coefficients de x^2 et y^2 doivent être égaux et non nuls. Divisez ensuite par ce coefficient pour les ramener à 1, puis vérifiez que le rayon est réel et positif.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Trouver l'équation du cercle qui passe par les points d'intersection de deux autres cercles.

MISE EN ROUTE

Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection des deux cercles $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ et $x^2 + y^2 = 5$, et le point $(3, 0)$.

Explication

Le cercle recherché appartient à la famille :

$k(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5) + (x^2 + y^2 - 5) = 0$ .....(i)

Puisque le cercle passe par le point $(3, 0)$:

$k(3^2 + 0^2 - 2 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 5) + 3^2 + 0^2 - 5 = 0$

$8k + 4 = 0$

$k = -\frac{1}{2}$

En substituant cette valeur dans (i) et en calculant, on obtient :

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x + 3y - \frac{15}{2} = 0$

Par conséquent, $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

Normalisez les coefficients de x^2 et y^2.

Travailler avec un partenaire

Collaborez avec votre groupe pour résoudre la section d'essai, puis discutez de la réponse.

À VOUS D'ESSAYER

Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection des deux cercles $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$, et l'origine.

EXERCICES

Résolvez les problèmes suivants.

1 Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection de 2 cercles $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$, et le point $(3, 0)$.

2 Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection de 2 cercles $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$, et le point $(-3, 2)$.

3 Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection de 2 cercles $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ et $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$, et le point $(4, 0)$.

★ Défi

Trouvez l'équation du cercle passant par les points d'intersection de 2 cercles $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ et $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$, et le point $(2, 2)$.

Authors

Project Lead & Editorial Director

Maki Komizo

Editors & Writers

Tomoaki Tsunoyama
Yukihiro Kawakubo
Yoshihito Kosaka
Ritsu Igarashi

Designer

Sayaka Higuchi

Reviewers

Prof. Jalal Mahrous Moatamed Prof. Ahmed Abdel-Kader
Prof. Mohamed Mohamed Ali Prof. Taha Mohamed Morsy
Mme. Manal Abbas Ahmed (conseiller en mathématiques)
Dr. Mohamed Mohie El-Din
Mr. Othman Mustafa Othman
Mr. Sameh Abdel-Baset El-Sayed
M. Nasser Saad Zaghloul
M. Adel Mohamed Hamza

General Supervision

Dr. Gebriel Anwer Hemeida

Head of the Central Administration for Curriculum Development

EDUCATION SPRINGS NEW LIFE

SPRIX

الإدارة المركزية لتطوير المناهج
Central Administration Of Curriculum Development
CACD

class	name