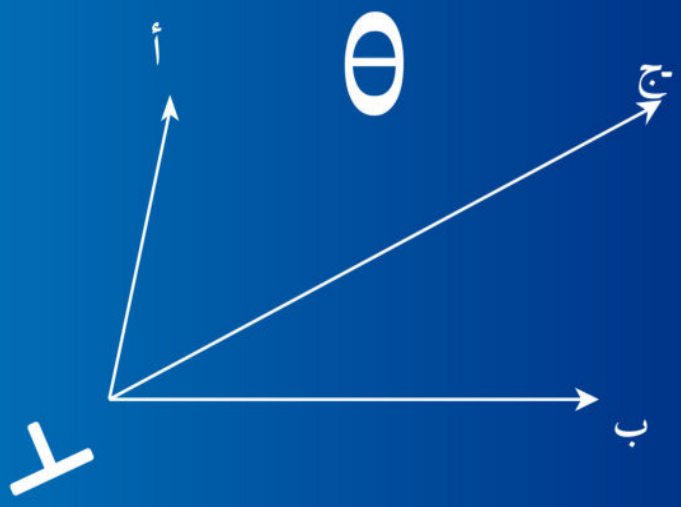


$$أ \cdot ب = |أ| |ب| \text{ جتا } \theta$$

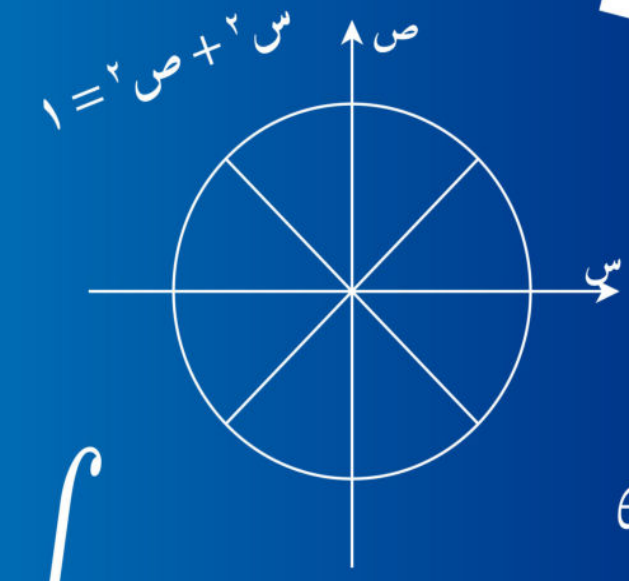


رياضيات

الصف الثاني بكالوريا

الجزء الثاني

11



$$\int \text{جا} \theta$$

Mathematics

Egyptian Baccalaureate

2nd Year

The International Baccalaureate™

has reviewed the pedagogical and assessment approaches underpinning this textbook.

© 2026 Ministry of Education and Technical Education

All rights reserved.

Copyrights and accountability for the content of this textbook remain with the Ministry of Education and Technical Education.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system,

or transmitted in any form or by any means - electronic, mechanical, photocopying, recording,

or otherwise - without the prior written permission of the copyright holders.

Ministry of Education and Technical Education

New Administrative Capital

Cairo, Egypt

المقدمة

انطلاقًا من رؤية نظام البكالوريا المصرية والتزامه بإعداد المتعلمين لمواجهة متطلبات القرن الحادي والعشرين، جاء تأليف كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر ليتيح للطلاب خبرة تعلّم عميقة وجذّابة ومُحفّزة للتفكير. وقد بُني المنهج على ترسيخ الفهم العميق، وتنمية الثقافة الرياضية، وإكساب الطلاب القدرة على توظيف المعرفة والمهارات الرياضية في سياقات الحياة الواقعية.

تقوم فلسفة هذا الكتاب على التعلّم القائم على الاستقصاء؛ إذ يبني الطلاب معارفهم بأنفسهم من خلال الملاحظة وطرح الأسئلة والتحرّي والاستدلال المستند إلى الأدلة. ويبدأ التعلّم بمسائل ذات معنى ومواقف أصيلة وخبرات استكشافية تُثير فضول المتعلمين وتدفعهم إلى البحث عن تفسيرات للأنماط والعلاقات والبِنى الرياضية التي تتجلّى في العالَم من حولهم. وبهذا المدخل يُوجّه الطلاب إلى اكتشاف الأنماط وصياغة التخمينات وتبريرها، وإلى بناء فهمهم الرياضي قبل التعامل مع المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج في صورتها المُجرّدة.

يعكس تنظيم كل درس تدرّجًا متماسكًا من الاستكشاف إلى بناء المفهوم ثم التطبيق، وفق مسار المدخل ثم التهيئة ثم الشرح ثم جرّب ثم التمارين. فتُعرض على الطلاب في البداية سياقات ومسائل وأمثلة مختارة بعناية تربط التعلّم الجديد بخبراتهم اليومية وبما سبق لهم تعلّمه. وتؤدي هذه المداخل دور المُحفّز على الاستقصاء، فتدعو المتعلمين إلى تحليل المعلومات وتفسير التمثيلات وتمييز الأنماط وصياغة تفسيرات أولية. وبعد هذه المرحلة الاستكشافية ينتقل الطلاب إلى المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج الرياضية التي تقوم عليها تلك المواقف، والتي توفّر إطارًا مُنظّمًا للفهم. وقد رُتّب المحتوى عن قصد بما يُعزّز الفهم العميق بدلًا من الحفظ الصمّ، فيتمكّن المتعلم من إدراك العلاقات بين المفاهيم، وإقامة روابط ذات معنى بين الأفكار، وتوظيف ما تعلّمه بثقة في السياقات المألوفة وغير المألوفة على السواء. ومن خلال مرحلتي جرّب والتمارين تُتاح للطلاب فرص الممارسة والتطبيق وتقويم فهمهم، وصولًا إلى فهم راسخ ومتماسك ومترابط للرياضيات.

يُتيح هذا الكتاب فرصًا واسعة لحل المسائل والنمذجة الرياضية والبحث المستقل. ويُشجّع الطلاب على اختبار الأفكار، وجمع البيانات وتحليلها، وتقويم الاستدلالات، واستخلاص نتائج مُبرّرة. وبهذه الخبرات تنمو لديهم الثقة في توظيف التفكير الرياضي، فيصيرون شركاء فاعلين في بناء المعرفة لا مُجرّد متلقين لها.

يتكامل التقويم مع مسار التعلّم بوصفه أداة للتعلّم والتحسين معًا. وقد ضُمّنت الدروس أنماطًا مُتنوّعة من أدوات التقويم التكويني والختامي تُعين الطلاب على متابعة تقدّمهم، وتحديد جوانب النمو لديهم، وإظهار ما بلغوه من فهم. كما صِيغت مهام التقويم بعناية لتُحاكي طبيعة الأسئلة التي قد يواجهونها في الامتحانات، مع تنمية مهارات التفكير العليا والاستدلال التحليلي وتوظيف المعرفة في سياقات غير مألوفة.

حظيت طبيعة الرياضيات بعناية خاصة تُبرزها بوصفها ركنًا أساسيًا من أركان الثقافة الرياضية. فتُتاح للطلاب فرص لإدراك كيف تُبنى المعرفة الرياضية وتُبرّر وتُنقّح ويجري تداولها داخل المجتمعات الرياضية. ويُعنى المنهج كذلك بتقدير إسهامات علماء الرياضيات والمبتكرين الذين أسهمت أفكارهم واكتشافاتهم في تشكيل فهمنا للعالَم الرياضي وفي دفع مسيرة التقدّم الإنساني.

يُنمّي الكتاب بصورة منهجية مهارات العمليات الرياضية، ومنها حل المسائل، والاستدلال، والتمثيل، والتواصل، والنمذجة، والتقدير، والتعرّف على الأنماط، وتفسير البيانات، والبرهان. وقد دُمجت هذه المهارات في خبرات التعلّم لضمان ألّا يقتصر الأمر على اكتساب المعرفة الرياضية، بل يمتد إلى تنمية الكفايات اللازمة للتفكير والعمل على نحو رياضي.

ومواكبةً لتطلّعات التعليم المعاصر، يُعزّز المنهج الوعي العالمي والانفتاح على العالَم من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالممارسات العلمية والابتكارات التقنية والتحدّيات البيئية وأهداف التنمية المستدامة. ويُشجّع الطلاب على تقدير الطبيعة المترابطة للمعرفة، وإدراك دور الرياضيات في معالجة القضايا التي تمسّ المجتمعات على المستويات المحلية والوطنية والعالمية.

ويسعى المنهج فضلًا عن ذلك إلى تنمية التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، عبر إشراك الطلاب في تحليل المعلومات، وتقويم الاستراتيجيات البديلة، وابتكار حلول جديدة، وتوظيف المعرفة الرياضية في مواجهة تحدّيات واقعية. ويُدعى المتعلمون إلى مقاربة المسائل بعقل عالِم الرياضيات والعالِم والمهندس، مستعينين بالاستدلال المنهجي والتفكير التصميمي في بحث الأسئلة وتطوير حلول عملية.

ومن أبرز سمات هذا الكتاب الربط المقصود بين الرياضيات وحياة الطلاب وخبراتهم. فعلى امتداد الفصول تُعرض الأفكار الرياضية في سياقات ذات معنى، مدعومةً بتطبيقات معاصرة مستمدة من العلوم والهندسة والتقنية والاقتصاد والبيانات والاستدامة والحياة اليومية. وتُبرز هذه الروابط قيمة الرياضيات وتُعين المتعلمين على تقدير أثرها في فهم العالَم من حولهم وفي تحسينه.

ولا يقلّ عن ذلك أهميةً حرص المنهج على ترسيخ التعلّم التأمّلي. فيُشجّع الطلاب على ممارسة التقويم الذاتي والتأمّل ما وراء المعرفي، بما يُمكّنهم من متابعة فهمهم، وتقويم استراتيجيات تعلّمهم، وتحمّل مسؤولية متنامية عن نموّهم الأكاديمي. وبتأمّلهم فيما يتعلّمونه وفي كيفية تعلّمه، تترسّخ لديهم عادات المتعلم مدى الحياة، القادر على التكيّف مع ما يستجدّ من تحدّيات وفرص.

وغاية ما يصبو إليه هذا الكتاب إعداد متعلمين متمكّنين رياضيًا، مسؤولين، مبتكرين، مزوّدين بما يلزم من معارف ومهارات وقيم واتجاهات للنجاح في عالَم سريع التغيّر. ويَحدونا الأمل أن تُلهم رحلة التعلّم هذه طلابنا استكشاف الرياضيات بفضول، والتفكير بدقة، والعمل بمسؤولية، والإسهام إسهامًا ذا معنى في تقدّم المجتمع وفي بناء مستقبل مستدام للإنسانية.

الفهرس

رياضيات – الصف الثاني بكالوريا – الجزء الثاني

الفصل ٥ – الدوال المثلثية

المفهوم ١ تعريف الزاوية والدوال المثلثية الأساسية ٤

المفهوم ٢ المتطابقات المثلثية وتقويم المقادير ١٥

المفهوم ٣ خواص الدوال المثلثية وتمثيلها البيانى ٢٢

المفهوم ٤ حلّ المعادلات والمتباينات المثلثية ٣٦

المفهوم ٥ النظريات المتقدمة وتطبيقاتها ٤٦

الفصل ٦ – الأسس واللوغاريتمات

المفهوم ١ قوانين الأسس والجذور ٦٨

المفهوم ٢ الدوال الأسّية وتطبيقاتها ٨٠

المفهوم ٣ مقدمة اللوغاريتمات وخواصها ٩١

المفهوم ٤ تطبيقات اللوغاريتمات ١٠٢

الفصل ٧ – التفاضل والتكامل

المفهوم ١ أساسيات التفاضل والتكامل (النهايات والمشتقات) ١٢١

المفهوم ٢ التفاضل: أساليبه وتطبيقاته ١٢٩

المفهوم ٣ تطبيقات التفاضل: الدوال كثيرة الحدود ١٣٨

المفهوم ٤ التكامل: التكاملات المحددة وتطبيقاتها ١٥٧

المفهوم ٥ تطبيقات التكامل فى الهندسة ١٧٢

الفصل ٨ – المتغيّرات العشوائية

المفهوم ١ أساسيات المتغيّرات العشوائية ١٩٠

المفهوم ٢ التوقُّع والتباين لعدّة متغيّرات عشوائية ٢٠٧

١-٥
الرياضيات

الزاوية فى الوضع القياسى

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

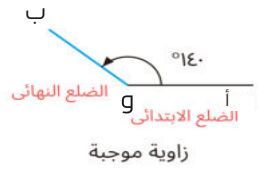
تعرّف الزاوية فى الوضع القياسى.

المفهوم ١ · تعريف الزاوية والدوال المثلثية الأساسية

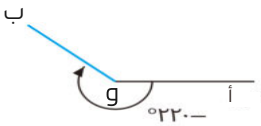


حين يتابع الطبيب قلب مريضه برسم القلب الكهربى (ECG)، تظهر على الشاشة موجة منتظمة تتكرّر. وهذا التمثيل المرئى للنشاط الكهربى يرصد علامات الحياة أوّلًا بأوّل. وكذلك يتابع أخصائى العلاج التنفسى تغيّر ضغط الهواء دخولًا إلى الرئتين وخروجًا منهما مع كل نفس.

تتكرّر هذه الأنماط الحيوية على فترات زمنية ثابتة، فتحاكى سلوك الموجات الهندسية. والأداة الرياضية التى تنمذج هذه النظم الحيوية الدورية وتحلّلها وتتنبّأ بها هى حساب المثلثات.



زاوية موجبة



زاوية سالبة

السؤال الموجّه: كيف تعرّف دورة شعاع فى المستوى الإحداثى دوالّ مثلثية تنمذج بدقّة الظواهر المتصلة والدورية فى الطبيعة؟

لاحظ!

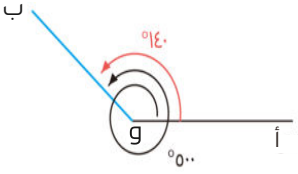
- فى المستوى، الشعاع $\overrightarrow{\text{و ب}}$ الدائر حول النقطة و يسمّى **الضلع النهائى**، ويسمّى وضعه الابتدائى $\overrightarrow{\text{و أ}}$ **الضلع الابتدائى**.
- يدور الضلع النهائى **عكس عقارب الساعة** إذا كانت الزاوية موجبة، و**مع عقارب الساعة** إذا كانت الزاوية سالبة.
- ليكن α قياس الزاوية التى يحصرها الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ مع الضلع الابتدائى $\overrightarrow{\text{و أ}}$. والزاوية θ تكتب فى الصورة

$$\theta = \alpha + ٣٦٠^\circ \times \text{ن} \quad \text{(حيث ن عدد صحيح)}$$

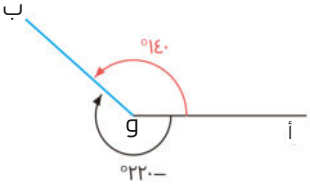
تسمّى **الزاوية العامة** التى يمثّلها الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$.

مثال: الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ للزاوية ١٤٠° ينطبق على الضلع النهائى لكلٍّ من الزاويتين ٥٠٠°، ٢٢٠°−.

$$١ \times ٣٦٠^\circ + ١٤٠^\circ = ٥٠٠^\circ$$



$$(-١) \times ٣٦٠^\circ + ١٤٠^\circ = -٢٢٠^\circ$$



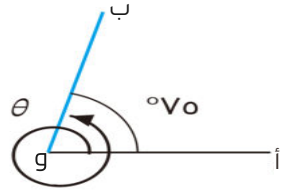
وفى هذه الحالة تكتب الزاوية العامة θ التى يمثّلها الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ فى الصورة

$$\theta = ١٤٠^\circ + ٣٦٠^\circ \times \text{ن} \quad \text{(حيث ن عدد صحيح)}.$$

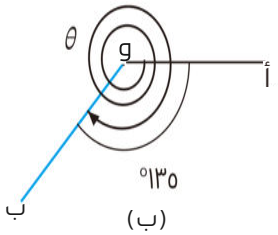
استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قياس الزاوية θ فى الأشكال الآتية.



(أ)



(ب)

٢ ارسم الضلع النهائى للزوايا الآتية.

(أ) ٣٠٠°　　(ب) −٤٥٠°

٣ اكتب الزوايا الآتية فى صورة زاوية عامة على الصورة $\alpha + ٣٦٠° \times$ ن، حيث ن عدد صحيح ، $٠° \leq \alpha < ٣٦٠°$.

(أ) ٤٢٠°　　(ب) −٢١٠°

طريقة الحل

١ (أ) ∵ الشكل يمثّل دورة كاملة عكس عقارب الساعة، ثم ٧٥°

$٣٦٠° \times ١ + ٧٥° = ٤٣٥°$

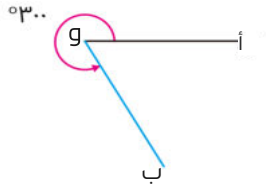
∴ القياس ٤٣٥°

(ب) ∵ الشكل يمثّل دورتين كاملتين مع عقارب الساعة، ثم ١٣٥°

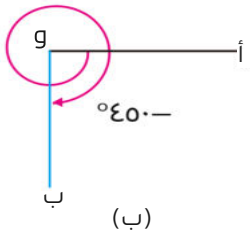
$-٨٥٥° = ١٣٥° - (-٢) \times ٣٦٠°$

∴ القياس −٨٥٥°

٢ ارسم الضلع النهائى فى كل حالة كما فى الشكلين.

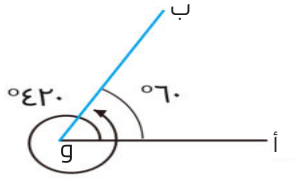


(أ)



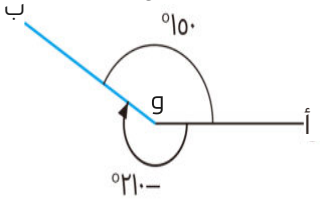
(ب)

٣ عند كتابة الزاوية فى الصورة $\alpha + ٣٦٠° \times$ ن (حيث ن عدد صحيح) يفيد رسمُ الضلع النهائى.



(أ)

من الشكل السابق: $٦٠° + ٣٦٠° \times$ ن (حيث ن عدد صحيح).



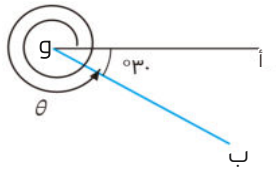
(ب)

من الشكل السابق: $١٥٠° + ٣٦٠° \times$ ن (حيث ن عدد صحيح).

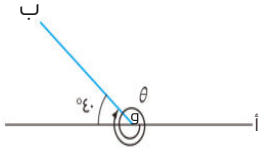
حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قياس الزاوية θ فى الأشكال الآتية.



(أ)



(ب)

٢ ارسم الضلع النهائى للزوايا الآتية.

(أ) ٥٠٠°　　(ب) −١٢٠°

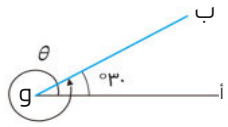
٣ اكتب الزوايا الآتية فى صورة زاوية عامة على الصورة $\alpha + ٣٦٠° \times$ ن، حيث ن عدد صحيح ، $٠° \leq \alpha < ٣٦٠°$.

(أ) ٥٢٠°　　(ب) −١٤٠°

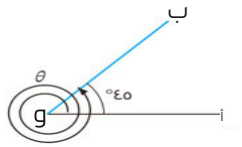
تدريب

حلّ المسائل الآتية.

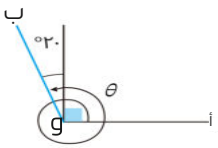
١ أوجد قياس الزاوية θ فى الأشكال الآتية.



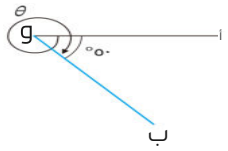
(أ)



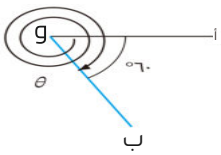
(ب)



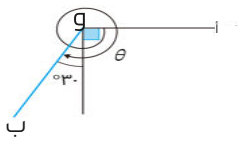
(جـ)



(د)



(هـ)



(و)

٢ ارسم الضلع النهائى للزوايا الآتية.

(أ) ٤٧٠°　　(ب) ٧٨٠°　　(جـ) ٢٢٥°

(د) −٣٨٠°　　(هـ) −٩٩٠°　　(و) −٢٠٠°

٣ اكتب الزوايا الآتية فى صورة زاوية عامة على الصورة $\alpha + ٣٦٠° \times$ ن، حيث ن عدد صحيح ، $٠° \leq \alpha < ٣٦٠°$.

(أ) ٦١٠°　　(ب) ٩٢٠°　　(جـ) ٨٤٠°

(د) −٤٣٠°　　(هـ) −٩٦٠°　　(و) −٢٠°

★ التحدّي

اكتب الزاويتين الآتيتين فى صورة زاوية عامة على الصورة $\alpha + ٣٦٠° \times$ ن، حيث ن عدد صحيح ، $٠° \leq \alpha < ٣٦٠°$: (أ) ١٢٩٧٢٠°　(ب) −٢٥٩٢١٠٠°

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقشوا الإجابة.

٢-٥ التقدير الدائرى

الرياضيات

الفصل الخامس الدوال المثلثية

لاحِظ!

التعبير عن الزاوية المركزية بطول القوس يسمّى **التقدير الدائرى**.

إذا كان طول قوس قطاع دائرى نصف قطره ١ وزاويته المركزية θ هو ل، كان θ = ل راديان.

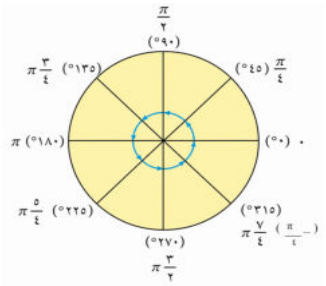
ولاحظ أن وحدة «الراديان» تحذف عند الكتابة بالتقدير الدائرى.

للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات فى $\frac{\pi}{١٨٠}$.

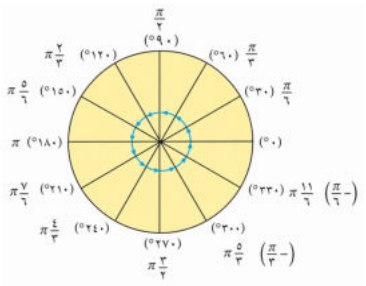
مثال: التعبير عن ٦٠° بالتقدير الدائرى: $٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$

نصف الدورة الكاملة قياسه π راديان، أى π = ١٨٠°. ومن ثمّ يكون التحويل من الراديان إلى الدرجات بضرب التقدير الدائرى فى $\frac{١٨٠}{\pi}$.

تدرّب على رسم الضلع النهائى للزوايا الشائعة الآتية بالتقدير الدائرى.



تقسيم π (١٨٠°) إلى ٤ أجزاء



تقسيم π إلى ٦ أجزاء

بالتقدير الدائرى، يكون طول قوس القطاع = (نصف القطر) × (الزاوية المركزية).

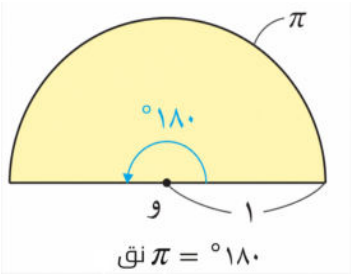
طول القوس ل = نق × θ ومساحته = (نصف القطر)^{٢} × π × (الزاوية المركزية) ÷ π ٢.

المساحة م = نق^{٢} × π × $\frac{\theta}{\pi ٢}$ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} θ

اضرب محيط الدائرة الكاملة (أو مساحتها) فى (الزاوية المركزية) ÷ π ٢.

نواتج التعلّم

التحويل الدقيق لقياس الزاوية بين القياس الستينى (الدرجات) والتقدير الدائرى (الراديان).



π = ١٨٠° نق

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ حوّل ٦٣٠° إلى التقدير الدائرى.

٢ حوّل $-\pi\frac{٧}{٤}$ إلى الدرجات.

٣ قطاع دائرى نصف قطره ٣ وزاويته المركزية $\pi\frac{٤}{٣}$، أوجد ما يأتى.

(أ) طول القوس ل (ب) المساحة م

طريقة الحل

١ ∵ للتحويل من الدرجات إلى الراديان يضرب قياس الزاوية بالدرجات فى $\frac{\pi}{١٨٠}$

$$\pi\frac{٧}{٢} = \frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٣٠$$

$$\therefore \pi\frac{٧}{٢} = ٦٣٠^\circ$$

٢ ∵ $\pi = ١٨٠^\circ$

$$-\pi\frac{٧}{٤} \times ١٨٠^\circ = -٣١٥^\circ$$

$$\therefore -\pi\frac{٧}{٤} = -٣١٥^\circ$$

٣ بالتقدير الدائرى: طول القوس ل = نق × θ، والمساحة م = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ θ
(حيث نق نصف القطر).

(أ) ل = $\pi\frac{٤}{٣} \times ٣$ ∴ طول القوس ل = $\pi ٤$

(ب) م = $\frac{١}{٢} \times ٣^٢ \times \pi\frac{٤}{٣}$ ∴ المساحة م = $\pi ٦$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ استعن بالشكلين السابقين للتعبير عن الدرجات بالتقدير الدائرى، وأكمل الجدول الآتى.

الدرجات	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	١٨٠°
الراديان									

الدرجات	٢١٠°	٢٢٥°	٢٤٠°	٢٧٠°	٣٠٠°	٣١٥°	٣٣٠°	٣٦٠°
الراديان								

٢ حوّل الزوايا الآتية إلى التقدير الدائرى.

(أ) ٢٨٨° (ب) −٤٠٠°

٣ حوّل الزوايا الآتية إلى الدرجات.

(أ) $\pi\frac{١١}{٦}$ (ب) $-\pi\frac{٣}{٥}$

٤ قطاع دائرى نصف قطره ٦ وزاويته المركزية $\pi\frac{٣}{٤}$، أوجد ما يأتى.

(أ) طول القوس ل (ب) المساحة م

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤالين ٣ و٤ ثم ناقِشوا الإجابات.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حوّل الزوايا الآتية إلى التقدير الدائرى.

(أ) ١٠٨° (ب) ٣٦° (جـ) -٢٤٠°

(د) -٢٢٥° (هـ) ٤٢٠° (و) ٤٠٠°

(ز) -٥٧٠° (ح) -٢٧٠٠°

٢ حوّل الزوايا الآتية إلى الدرجات.

(أ) $\pi\frac{٧}{٦}$ (ب) $\pi\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\pi\frac{٢}{٣}$

(د) $\pi\frac{٤}{٣}$ (هـ) $-\pi\frac{٥}{٤}$ (و) $-\frac{\pi}{٢}$

(ز) $-\pi\frac{١١}{٢}$ (ح) $-\pi\frac{٧}{١٨}$

٣ أوجد طول القوس ل والمساحة م لكلٍّ من القطاعات الدائرية الآتية.

(أ) قطاع دائرى نصف قطره ٦ وزاويته المركزية $\pi\frac{٧}{٦}$

(ب) قطاع دائرى نصف قطره ٤ وزاويته المركزية $\pi\frac{٢}{٥}$

(جـ) قطاع دائرى نصف قطره ٦ وزاويته المركزية $\pi\frac{٥}{٤}$

٤ ارسم الضلع النهائى للزوايا الآتية.

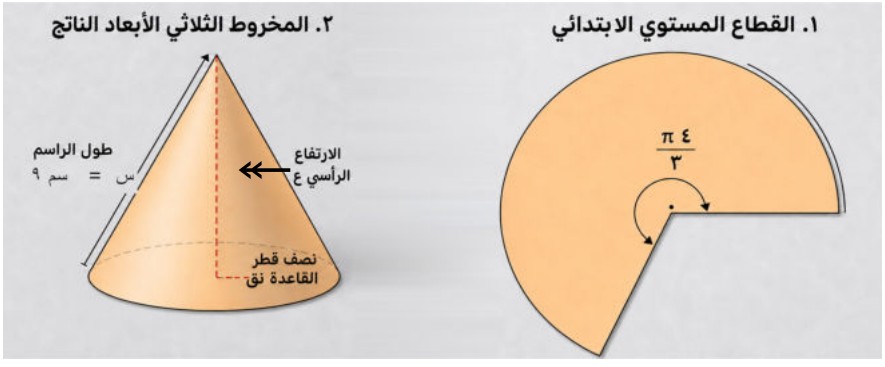
(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\pi\frac{٥}{٦}$

(د) $\pi\frac{٣}{٤}$ (هـ) $\pi\frac{٤}{٣}$ (و) $\pi\frac{٧}{٦}$

(ز) $-\frac{\pi}{٣}$ (ح) $-\frac{\pi}{٤}$

★ التحدّي

قُطع من ورقة مستوية قطاع دائرى نصف قطره ٩ سم وزاويته المركزية $\pi\frac{٤}{٣}$ راديان، ثم ضُمّ حرفاه المستقيمان أحدهما إلى الآخر دون تداخل، فتكوّن السطح الجانبى لمخروط دائرى قائم. أوجد بالضبط الارتفاع الرأسى للمخروط وحجمه.



الارتفاع المائل ٩ سم، ع الارتفاع الرأسى، نق نصف قطر القاعدة

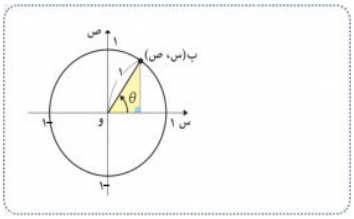
٣-٥ قيم الدوال المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

الرياضيات

نواتج التعلّم

اشتقاق قيم الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها للزوايا الخاصة والزوايا المرتبطة باستخدام دائرة الوحدة.



إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3}{2}\pi$ فإن ظا θ غير معرّفة.

لاحِظ!

- من الآن فصاعدًا تكتب الزوايا بالتقدير الدائرى.

- **تعريف الدوال المثلثية**

الدائرة التى نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الأصل تسمّى **دائرة الوحدة**.

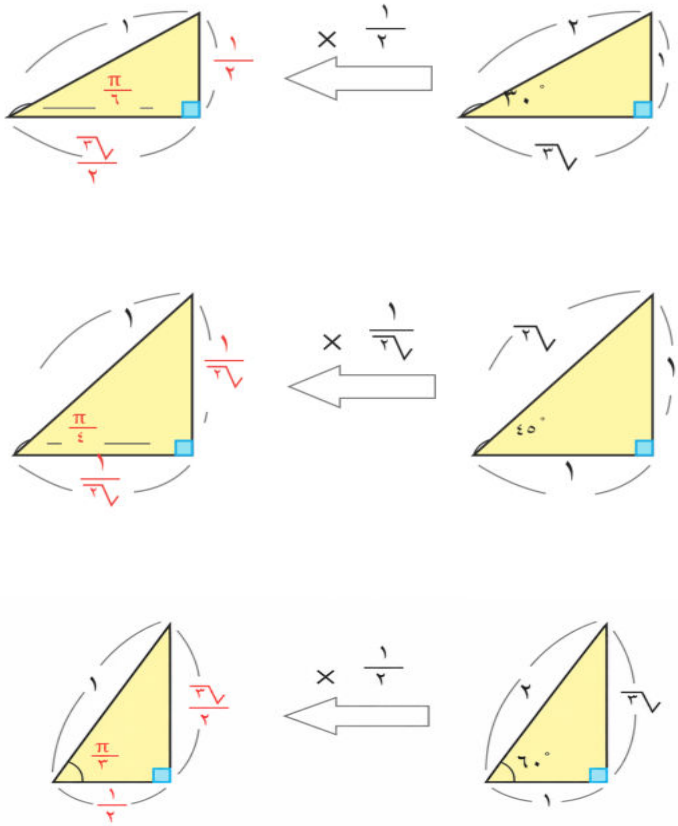
لتكن ب نقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية θ مع دائرة الوحدة، وإحداثياها (س، ص)، فإن

جا θ = ص (جيب الزاوية)

جتا θ = س (جيب تمام الزاوية)

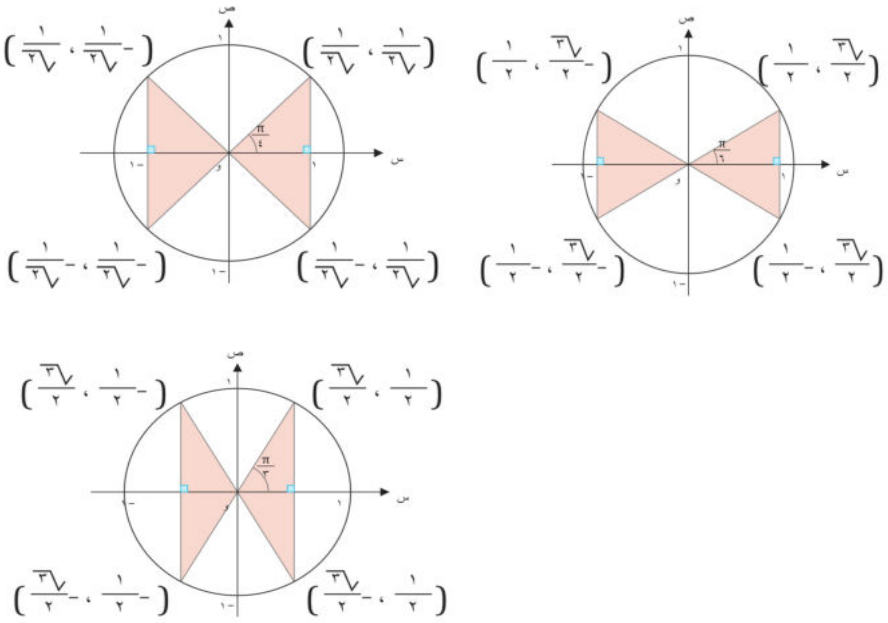
ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (ظل الزاوية)

- لإيجاد قيم الدوال المثلثية، استخدم المثلثات القائمة الزاوية التى طول وترها ١ كما فى الأشكال الآتية.



لاحظ!

بتطبيق هذه المثلثات القائمة الزاوية على دائرة الوحدة، تجد إحداثيات نقطة تقاطع الضلع النهائى مع الدائرة.



من المعتاد عدم تحويل المقام إلى عدد صحيح مثل: $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

تحويل مقامى الكسرين $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ و $\frac{١}{\sqrt{٢}}$.

ظا $\theta = \frac{ص}{س}$، أى الإحداثى ص مقسومًا على الإحداثى س.

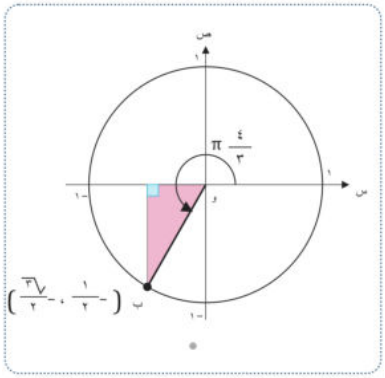
استعد

إذا كان $\theta = \frac{٤}{٣}\pi$، فأوجد قيم جا θ، جتا θ، ظا θ.

طريقة الحل

ارسم دائرة الوحدة دائمًا؛ فهى تعينك على الحل.

ارسم الضلع النهائى $\overrightarrow{و\,ب}$ للزاوية $\theta = \frac{٤}{٣}\pi$، ثم أنزل عمودًا من ب على محور س فيتكوّن مثلث قائم الزاوية طول وتره ١.



ومن الشكل

جا $\frac{٤}{٣}\pi = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ← الإحداثى الصادى

جتا $\frac{٤}{٣}\pi = -\frac{١}{٢}$ ← الإحداثى السينى

ظا $\frac{٤}{٣}\pi = \frac{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{-\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣}$

حاول

أوجد قيم الدوال المثلثية الآتية، وإذا كانت القيمة غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

(أ) جا $\frac{٧}{٤}\pi$ (ب) جتا $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) ظا $\frac{\pi}{٢}$

(د) جا $\left(-\frac{٢}{٣}\pi\right)$ (هـ) جتا $(-\pi)$ (و) ظا $\left(-\frac{\pi}{٢}\right)$

تدريب

أوجد قيم الدوال المثلثية الآتية، وإذا كانت القيمة غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

(أ) جا $\frac{\pi}{٣}$ (ب) جا $\frac{٧}{٦}\pi$ (جـ) جا π

(د) جتا $\frac{٥}{٤}\pi$ (هـ) جتا $\frac{٥}{٣}\pi$ (و) جتا $\frac{٧}{٦}\pi$

(ز) ظا $\frac{٢}{٣}\pi$ (ح) ظا $\frac{٥}{٤}\pi$ (ط) ظا π

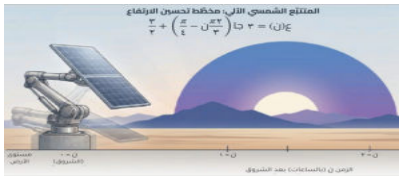
(ى) جا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ (ك) جا $\left(-\frac{٥}{٤}\pi\right)$ (ل) جا $\left(-\frac{٥}{٣}\pi\right)$

(م) جتا $\left(-\frac{\pi}{٤}\right)$ (ن) جتا $\left(-\frac{٥}{٦}\pi\right)$ (س) جتا $\left(-\frac{٤}{٣}\pi\right)$

(ع) ظا $\left(-\frac{٤}{٣}\pi\right)$ (ف) ظا $\left(-\frac{١١}{٦}\pi\right)$ (ص) ظا $\left(-\frac{٣}{٢}\pi\right)$

★ التحدّي

ذراعٌ آلية مبرمَجة لتتبّع حركة لوح شمسى، ويُنمذَج الارتفاع الرأسى ع بالمتر لطرف اللوح بالنسبة إلى قاعدته بالدالة



$$ع(ن) = ٣ \text{ جا } \left(\frac{\pi٢}{٣}ن - \frac{\pi}{٤}\right) + \frac{٣}{٢}$$

حيث ن الزمن بالساعات بعد شروق الشمس (حيث ن = ٠ لحظة الشروق).

أوجد بالضبط ارتفاع طرف اللوح لحظة الشروق، دون استخدام الآلة الحاسبة، واترك إجابتك فى صورة جذرية تامة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفروع (د) و(هـ) و(و) من «حاول» ثم ناقِشوا الإجابات.

٤-٥
الرياضيات

إيجاد قياس الزاوية من قيمة الدالة المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

حساب قياسات الزوايا من قيم الدوال المثلثية.

لاحِظ!

طريقة إيجاد قياس الزاوية من قيمة الدالة المثلثية.

١ ارسم دائرة الوحدة.

٢ ارسم المستقيم المناسب حسب الدالة المثلثية، ثم أوجد نقط تقاطعه مع دائرة الوحدة.

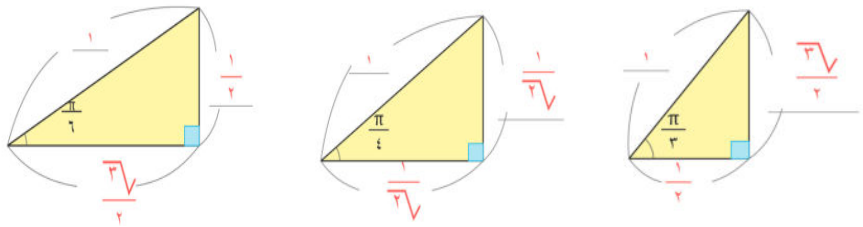
إذا كانت جا θ = أ فارسم المستقيم ص = أ.

إذا كانت جتا θ = أ فارسم المستقيم س = أ.

إذا كانت ظا θ = أ فارسم المستقيم ص = أ س.

٣ أوجد الزاوية θ فى الوضع القياسى التى يمرّ ضلعها النهائى بنقطة التقاطع.

ولإيجاد θ، استخدم المثلثات القائمة المرجعية التى درستها فى الدرس ٥-٣.



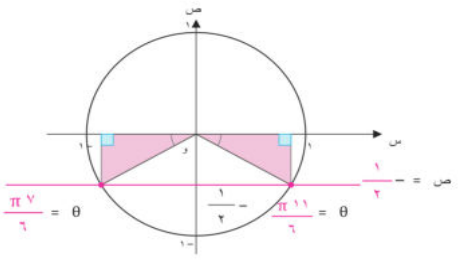
استعد

حلّ المعادلات الآتية فى θ، (حيث $0 \leq \theta < 2\pi$).

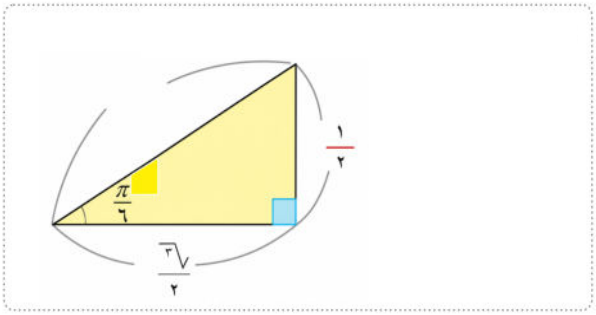
(أ) جا $\theta = -\frac{1}{2}$ (ب) جتا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ظا $\theta = -\sqrt{3}$

طريقة الحل

(أ) ارسم دائرة الوحدة، ثم ارسم المستقيم ص = $-\frac{1}{2}$.



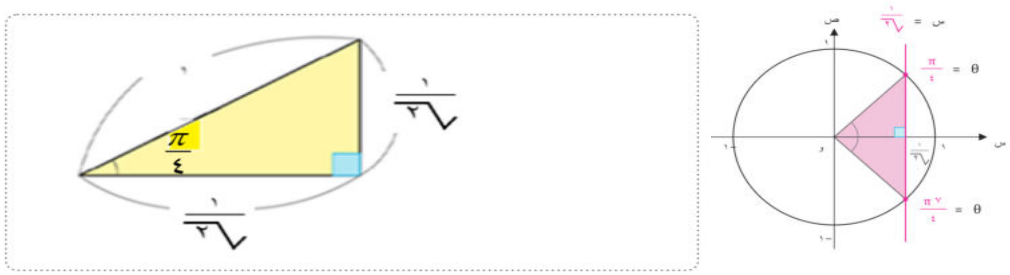
لأن الإحداثى الصادى يساوى $-\frac{1}{2}$، استخدم المثلث القائم المرجعى الذى ارتفاعه $\frac{1}{2}$.



من الشكل السابق: $\theta = \frac{7}{6}\pi$ أو $\theta = \frac{11}{6}\pi$

(ب) ارسم دائرة الوحدة، ثم ارسم المستقيم س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$.

بما أن الإحداثى السينى يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣}}$، استخدم المثلث القائم المرجعى الذى قاعدته $\frac{١}{\sqrt{٣}}$.



من الشكل السابق: $\theta = \frac{\pi}{٤}$ أو $\theta = \frac{٧}{٤}\pi$

(جـ) ارسم دائرة الوحدة، ثم ارسم المستقيم ص = $-\sqrt{٣}$ س.

بما أن ظا $\theta = -\sqrt{٣}$، استخدم المثلث القائم المرجعى الذى فيه $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = -\sqrt{٣}$.



من الشكل السابق: $\theta = \frac{٢}{٣}\pi$ أو $\theta = \frac{٥}{٣}\pi$

حاول

حلّ المعادلات الآتية فى θ، (حيث $٠ \leq \theta < ٢\pi$).

(أ) جا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$
(ب) جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(جـ) ظا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$
(د) جا $\theta = ٠$
(هـ) جتا $\theta = \frac{١}{٢}$
(و) ظا $\theta = -١$

تدريب

حلّ المعادلات الآتية فى θ، (حيث $٠ \leq \theta < ٢\pi$).

(أ) جا $\theta = \frac{١}{٢}$
(ب) جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(جـ) جتا $\theta = ٠$
(د) جتا $\theta = ١$
(هـ) ظا $\theta = ٠$
(و) ظا $\theta = \sqrt{٣}$
(ز) جا $\theta = ١$
(ح) جا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$
(ط) جتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$
(ى) جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$
(ك) ظا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$
(ل) ظا $\theta = ١$
(م) جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
(ن) جا $\theta = -١$
(س) جتا $\theta = -١$
(ع) جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفروع (د) و(هـ) و(و) ثم ناقشوا الإجابات.

★ التحدّي

حلّ المعادلة الآتية فى θ، (حيث $٠ \leq \theta < ٣٦٠°$).

ظا$^{٢}\theta$ + (١ − $\sqrt{٣}$) ظاθ = $\sqrt{٣}$

تأمّل

كيف تغير تفكيرك عن حساب الدوال المثلثية باستخدام المثلث قائم الزاوية بعد حسابها باستخدام دائرة الوحدة؟

٥-٥ المتطابقات المثلثية الأساسية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

٥-٥
الرياضيات

المفهوم ٢ · المتطابقات المثلثية وتقويم المقادير

فى هندسة الصوت وعلومه، يعتمد نقاء الصوت كلّه على ضبط الموجات المركّبة. فحين تعزف آلات كثيرة معًا، أو يلتقط الميكروفون ضجيجًا من الخلفية، تخرج الموجة الصوتية خليطًا متشابكًا من ترددات مختلفة. ولو عالج البرنامج كل موجة خامًا على حدة، لأرهق الحاسوب حتى يتوقّف، أو لتأخّر الصوت تأخّرًا شديدًا.

لذلك تستخدم سمّاعات إلغاء الضجيج وخوارزميات ضغط الصوت التكافؤ الرياضى: تأخذ معادلات الموجات الطويلة المعقّدة، فتختصرها إلى مقادير من حدّ واحد. وبإعادة كتابة البيانات المعقّدة فى صور رياضية أبسط ومكافئة لها، تنقّى التقنية الصوت من الضجيج، وتنقله نقيًّا فى الحال. فالمدخل موجة خامّة معقّدة، والمخرج موجة مضغوطة مبسّطة تكافئها.

السؤال الموجّه: كيف تستخدم العلاقات الجبرية الأساسية بين النسب المثلثية فى تبسيط المقادير المثلثية متعدّدة الحدود إلى قيمة واحدة قابلة للحساب؟

نواتج التعلّم

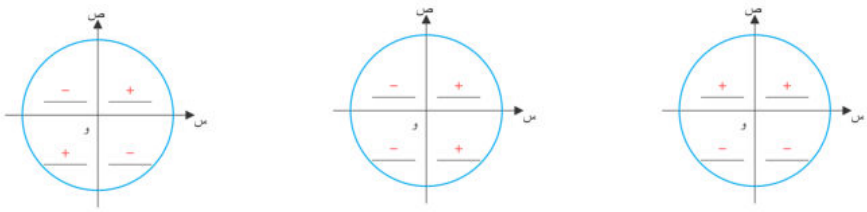
تطبيق المتطابقات المثلثية الأساسية لتبسيط المقادير المثلثية والتحقّق منها.



لاحظ!

إشارات الدوال المثلثية. لتكن ب نقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية θ مع دائرة الوحدة

جا θ هو الإحداثى الصادى للنقطة ب، وجتا θ هو الإحداثى السينى للنقطة ب، وظا θ هو ميل و ب.



المتطابقات المثلثية الأساسية.

$$\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١ \qquad \text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \qquad ١ + \text{ظا}^٢\theta = \frac{١}{\text{جتا}^٢\theta}$$

إيجاد جتا θ وظا θ إذا علم جا θ (وتتبع الطريقة نفسها إذا علم جتا θ).

١ أوجد جتا θ من $\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$ (أو جا θ إذا بدأت من جتا θ).

٢ أوجد ظا θ من $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$.

إيجاد جا θ وجتا θ إذا علم ظا θ.

١ أوجد جتا θ من $١ + \text{ظا}^٢\theta = \frac{١}{\text{جتا}^٢\theta}$.

٢ أوجد جا θ من $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$.

لإيجاد جا θ أو جتا θ من $\text{جا}^٢\theta$ أو $\text{جتا}^٢\theta$، حدّد الإشارة من الربع الواقعة فيه الزاوية.

ارجع إلى الأشكال السابقة لمعرفة إشارات الدوال المثلثية.

استعد

إذا علمت إحدى قيم الدوال المثلثية والربع الواقعة فيه الزاوية θ، فأوجد قيمتى الدالتين الأخريين.

(أ) جا $\theta = -\frac{١}{٥}$ (حيث θ فى الربع الثالث)

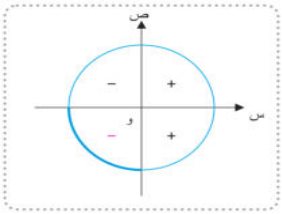
(ب) ظا $\theta = -\sqrt{٦}$ (حيث $\frac{\pi ٣}{٢} < \theta < \pi ٢$)

طريقة الحل

(أ) من جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ ينتج جتا$^{٢}\theta$ = ١ – جا$^{٢}\theta$

جتا$^{٢}\theta = ١ - \left(-\frac{١}{٥}\right)^{٢} = \frac{٢٤}{٢٥}$

∵ θ فى الربع الثالث ∴ جتا θ < ٠



جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٦}^{٢}}{٥}$

ومن ظا $\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

ظا $\theta = \frac{-\frac{١}{٥}}{-\frac{\sqrt{٦}^{٢}}{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٦}^{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{١٢}$

وبذلك جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٦}^{٢}}{٥}$، ظا $\theta = \frac{\sqrt{٦}}{١٢}$

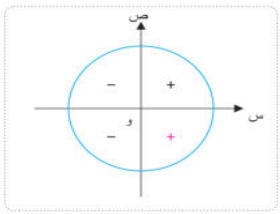
اضرب البسط والمقام فى –٥.

(ب) من ١ + ظا$^{٢}\theta = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$

$\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta} = ١ + \left(-\sqrt{٦}\right)^{٢} = ٧$

وبالحلّ نجد جتا$^{٢}\theta = \frac{١}{٧}$

∵ جتا θ < ٠ عندما $\frac{\pi ٣}{٢} < \theta < \pi ٢$



جتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٧}}{٧}$

ومن ظا $\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ينتج جا θ = ظا θ × جتا θ

جا $\theta = -\sqrt{٦} \times \frac{\sqrt{٧}}{٧} = -\frac{\sqrt{٤٢}}{٧}$

وبذلك جا $\theta = -\frac{\sqrt{٤٢}}{٧}$، جتا $\theta = \frac{\sqrt{٧}}{٧}$

حاول

إذا علمت الزاوية θ وإحدى قيم جا θ، جتا θ، ظا θ فيما يأتى، فأوجد القيمتين الأخريين.

(أ) جتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (حيث θ فى الربع الثالث)

(ب) ظا $\theta = -٢$ (حيث θ فى الربع الرابع)

(جـ) جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ (حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$)

(د) ظا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (حيث $\pi < \theta < \frac{\pi ٣}{٢}$)

تدريب

إذا علمت الزاوية θ وإحدى قيم جا θ، جتا θ، ظا θ فيما يأتى، فأوجد القيمتين الأخريين.

(أ) جا $\theta = -\frac{٣}{٤}$ (حيث θ فى الربع الثالث)

(ب) جتا $\theta = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (حيث θ فى الربع الرابع)

(جـ) ظا $\theta = -\sqrt{٧}$ (حيث θ فى الربع الرابع)

(د) جا $\theta = \frac{٢}{٣}$ (حيث θ فى الربع الثانى)

(هـ) جتا $\theta = \frac{١}{٤}$ (حيث θ فى الربع الرابع)

(و) ظا $\theta = -٢\sqrt{٢}$ (حيث θ فى الربع الرابع)

(ز) ظا $\theta = -\frac{١}{٣}$ (حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$)

(ح) جا $\theta = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$)

(ط) جتا $\theta = \frac{٥}{١٣}$ (حيث $\frac{\pi ٣}{٢} < \theta < \pi ٢$)

(ى) جا $\theta = -\frac{٥}{١٣}$ (حيث $\frac{\pi ٣}{٢} < \theta < \pi ٢$)

(ك) جتا $\theta = -\frac{٤}{٥}$ (حيث $\pi < \theta < \frac{\pi ٣}{٢}$)

(ل) ظا $\theta = -\frac{١}{٢}$ (حيث $\frac{\pi ٣}{٢} < \theta < \pi ٢$)

★ التحدّي

باستخدام المتطابقات المثلثية، أوجد القيمتين الأخريين إذا كان ظا θ + ظتا $\theta = \frac{٢٥}{١٢}$ (حيث $\pi ٢ > \theta > \pi$).

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (جـ) و(د) ثم ناقِشوا الإجابات.

٦-٥
الرياضيات

إيجاد قيمة المقادير المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

لاحِظ!

- استخدم جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ فى إيجاد قيمة المقادير المثلثية.
- استخدم القانون الآتى لإيجاد قيمة جا$^{٣}\theta$ + جتا$^{٣}\theta$.

جا$^{٣}\theta$ + جتا$^{٣}\theta$ = (جا θ + جتا θ)(جا$^{٢}\theta$ − جا θ جتا θ + جتا$^{٢}\theta$)

- لإيجاد جا θ ± جتا θ، حدّد الإشارة من الربع الواقعة فيه الزاوية.

نواتج التعلّم

استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية (متطابقة فيثاغورث، ومتطابقات الدوال المتتامة، وخواص الدوال الزوجية والفردية) فى تبسيط المقادير المثلثية والتحقّق من صحّتها.

أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} − أب + ب^{٢})

استعد

إذا كان جا θ + جتا θ = $\frac{١}{٢}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث θ فى الربع الثانى).

(أ) جا θ جتا θ (ب) جا$^{٣}\theta$ + جتا$^{٣}\theta$ (جـ) جا θ − جتا θ

طريقة الحل

(أ) جا θ + جتا θ = $\frac{١}{٢}$

ربّع الطرفين واستخدم
جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١

(جا θ + جتا θ)^{٢} = $\frac{١}{٤}$

جا$^{٢}\theta$ + ٢ جا θ جتا θ + جتا$^{٢}\theta$ = $\frac{١}{٤}$

١ + ٢ جا θ جتا θ = $\frac{١}{٤}$

جا θ جتا θ = $-\frac{٣}{٨}$

(ب) جا$^{٣}\theta$ + جتا$^{٣}\theta$

• جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١
• من (أ)، جا θ جتا θ = $-\frac{٣}{٨}$

= (جا θ + جتا θ)(جا$^{٢}\theta$ − جا θ جتا θ + جتا$^{٢}\theta$)

= $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{٣}{٨} + ١\right)$ = $\frac{١١}{١٦}$

طريقة الحل

(ج) $(\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)^{٢}$

$= \text{جا}^{٢}\theta - ٢\,\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\theta$

$= ١ - ٢ \times \left(-\frac{٣}{٨}\right) = \frac{٧}{٤}$

ربّع المقدار واستخدم
$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$

$\because \theta$ فى الربع الثانى $\therefore \text{جا}\,\theta > ٠$ وجتا $\theta < ٠$، ومنه:

$\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta < ٠$

$\therefore (\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta)^{٢} = \frac{٧}{٤}$

$\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٧}}{٢}$

حاول

إذا كان $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث θ فى الربع الثانى).

(أ) $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ (ب) $\text{جا}^{٣}\theta + \text{جتا}^{٣}\theta$ (جـ) $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابات.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث θ فى الربع الأول).

(أ) $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ (ب) $\text{جا}^{٣}\theta - \text{جتا}^{٣}\theta$ (جـ) $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta$

٢ إذا كان $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث θ فى الربع الرابع).

(أ) $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ (ب) $\text{جا}^{٣}\theta + \text{جتا}^{٣}\theta$ (جـ) $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta$

٣ إذا كان $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٢}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث θ فى الربع الثالث).

(أ) $\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta$ (ب) $\text{جا}^{٣}\theta - \text{جتا}^{٣}\theta$ (جـ) $\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta$

★ التحدّي

إذا كان $\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٢}$ وكانت θ فى الربع الثالث، فأوجد القيمة الدقيقة للمقدار $\text{جا}^{٦}\theta - \text{جتا}^{٦}\theta$.

٧-٥ إثبات المتطابقات المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

٧-٥
الرياضيات

نواتج التعلّم

استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية (متطابقة فيثاغورث، ومتطابقات الدوال المتتامة، وخواص الدوال الزوجية والفردية) فى تبسيط المقادير المثلثية والتحقّق من صحّتها.

لاحِظ!

- لإثبات متطابقة مثلثية، بيّن أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.
- **تحويلات كثيرة الاستخدام.**
  - $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$
  - $١ - \text{جا}^{٢}\,\theta = \text{جتا}^{٢}\,\theta$
  - $\text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta = ١$
  - $١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta = \text{جا}^{٢}\,\theta$
- لجمع الكسور أو طرحها، وحّد المقامات ثم اجمع.

استعد

أثبت أن $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + ١} + \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

طريقة الحل

[الإثبات]

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + ١} + \frac{١}{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}}$

اكتب ظا θ فى صورة $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$، ثم اضرب البسط والمقام فى جتا θ.

$= \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + ١} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

وحّد المقامات ثم اجمع الكسور.

$= \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + ١)}{\text{جا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + ١)}$

جا$^{٢}\,\theta$ + جتا$^{٢}\,\theta$ = ١

$= \frac{\text{جا}^{٢}\,\theta + \text{جتا}\,\theta + \text{جتا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + ١)}$

اختصر (١ + جتا θ) من البسط والمقام.

$= \frac{\text{جتا}\,\theta + ١}{\text{جا}\,\theta(\text{جتا}\,\theta + ١)}$

$= \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

= الطرف الأيسر

$\therefore \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + ١} + \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

حاول

أثبت صحّة المتطابقات الآتية.

(أ) $\frac{\text{ظا}\,\theta - ١}{\text{ظا}\,\theta + ١} = \frac{\text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + \text{جا}\,\theta}$

(ب) $\frac{\text{جتا}\,\theta}{١ - \text{جا}\,\theta} - \text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أثبت صحّة المتطابقات الآتية.

(أ) $\text{ظا}^٢\,\theta - \text{جا}^٢\,\theta = \text{ظا}^٢\,\theta\,\text{جا}^٢\,\theta$

(ب) $\text{ظا}\,\theta + \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta\,\text{جتا}\,\theta}$

(جـ) $\frac{\text{جتا}\,\theta}{١ - \text{جا}\,\theta} - \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} = \text{ظا}\,\theta$

(د) $\frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} - \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta} = \text{جا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$

(هـ) $\frac{١ + \text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta} = \frac{٢}{\text{جتا}\,\theta}$

(و) $\frac{\text{ظا}^٢\,\theta - \text{جا}^٢\,\theta}{\text{جا}^٢\,\theta} = \text{ظا}^٢\,\theta$

★ التحدّي

أثبت صحّة المعادلة الآتية لكل قيم س التى تكون عندها المقادير معرَّفة:

$$\frac{١ + \text{جا}\,س - \text{جتا}\,س}{١ + \text{جا}\,س + \text{جتا}\,س} + \frac{١ + \text{جا}\,س + \text{جتا}\,س}{١ + \text{جا}\,س - \text{جتا}\,س} = \frac{٢}{\text{جا}\,س}$$

تأمّل

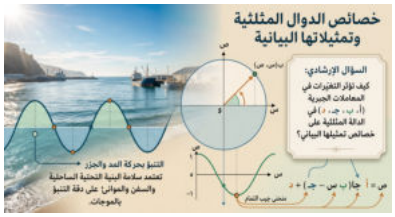
يدّعى طالب أنه بما أن $\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$، فإن المعادلة $\text{ظا}\,\theta \times \text{جتا}\,\theta = \text{جا}\,\theta$ متطابقة تصحّ لكل الأعداد الحقيقية. ناقِش هذا الادّعاء نقدًا. وهل من شرط أو قيمة بعينها للزاوية θ تنهار عندها هذه العلاقة تمامًا؟ فسّر إجابتك.

٨-٥
الرياضيات

خواص الدوال المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

المفهوم ٣ · خواص الدوال المثلثية وتمثيلها البيانى



يعتمد علم المحيطات وسلامة السواحل اعتمادًا كاملًا على التنبّؤ بحركة المدّ والجزر. فمنسوب الماء عند الشواطئ يرتفع وينخفض ارتفاعًا وانخفاضًا متّصلًا، بفعل جاذبية القمر والشمس ودوران الأرض.

ولو أخطأ مخطّطو الطوارئ أو ربابنة السفن فى تقدير أعلى منسوب للمدّ أو موعد أدنى منسوب للجزر، لغرقت الموانئ، ولجنحت سفن الحاويات. ولأن تغيّرات المدّ تتكرّر وفق جدول يمكن التنبّؤ به، لا يرسمها العلماء خطوطًا مضطربة، بل موجات هندسية ملساء متّصلة.

السؤال الموجّه: كيف تغيّر معاملات الدالة المثلثية خواصّ منحناها، كالامتداد الرأسى والانضغاط الأفقى والإزاحة؟

نواتج التعلّم

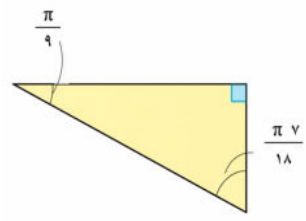
تحليل الخواص الدورية للدوال المثلثية (المدى، والسعة، والدورة، والإزاحة الأفقية)، وتمثيلها بيانيًّا، وتفسير سلوكها.

لاحِظ!

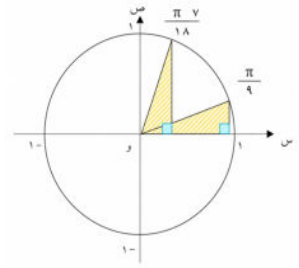
! فى المسائل التى تُكتب فيها الدوال المثلثية بدلالة زاوية حادّة، ارسم الضلع النهائى للزاوية على دائرة الوحدة ليتكوّن مثلث قائم الزاوية، ثم انظر إليه فى الربع الأول.

تأمّل مثلثين قائمى الزاوية، زاويتهما الحادّة عند الركن الأسفل الأيسر.

مثال:



فتصير هكذا



! الدوال المثلثية لزوايا مثل $\theta + \frac{\pi}{٢}$، $\theta + \pi$، $\theta + ٢\pi$ ن (حيث ن عدد صحيح)،
– θ تُكتب بدلالة الدوال المثلثية للزاوية θ.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

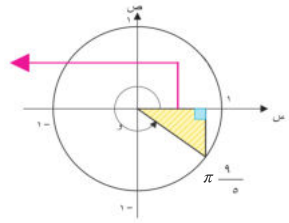
١ اكتب جا $\frac{٩\pi}{٥}$ فى صورة دالة مثلثية لزاوية حادّة.

٢ بسّط جا θ + جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جا $\left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right)$

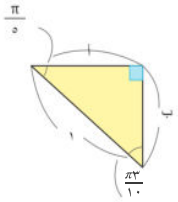
طريقة الحل

(١) ∵ $\frac{\pi ٣}{٢} > \frac{\pi ٩}{٥} > \pi ٢$ ∴ $\frac{\pi ٩}{٥}$ زاوية فى الربع الرابع.

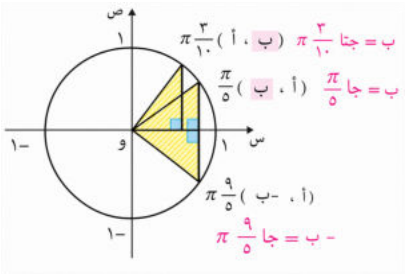
وضلعُها النهائى يصنع مع المحور السينى زاوية حادّة قياسها $\frac{\pi}{٥}$



وباستخدام هذا



يصير الشكل كما فى الشكل الآتى:

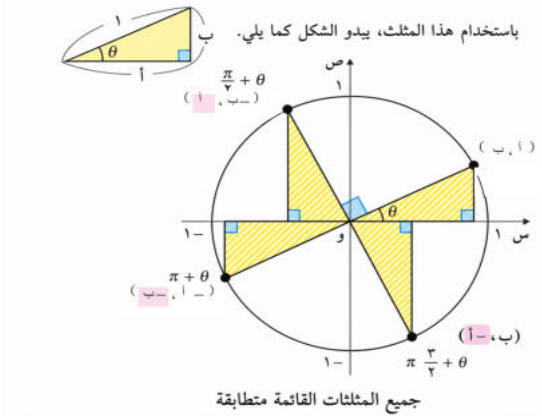


ومن الشكل السابق، القيمتان المساويتان لـجا $\frac{\pi ٩}{٥}$ هما

$-$ جا $\frac{\pi}{٥}$ و $-$ جتا $\frac{\pi ٣}{١٠}$

(٢) اكتب الدوال المثلثية لزوايا مختلفة كلًّا بدلالة دوال زاوية واحدة (وهى غالبًا θ).

وإن كان قياس θ مجهولًا، فارسمها بقياس مناسب؛ فذلك يعينك على الحل.



ومن الشكل السابق، والمثلثات القائمة الأربعة متطابقة:

$$\text{جا}\,\theta = \text{جتا}\,\text{أ} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$$

$$\text{جا}(\pi + \theta) = -\text{ب} = -\text{جا}\,\theta$$

$$\text{جا}\left(\frac{\pi ٣}{٢} + \theta\right) = -\text{أ} = -\text{جتا}\,\theta$$

∴ قيمة المقدار المطلوب هى

$$\text{جا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta = \text{صفر}$$

$\frac{\pi}{٥} = \frac{\pi ٩}{٥} - \pi ٢$

$\frac{\pi ٣}{١٠} = \frac{\pi}{٥} - \frac{\pi}{٢}$

تشتمل الإجابة دائمًا على جا واحدة و جتا واحدة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب جتا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ فى صورة دالة مثلثية لزاوية حادّة.

٢ اكتب جا $\frac{\pi ٨}{٧}$ فى صورة دالة مثلثية لزاوية حادّة.

٣ بسّط جتا $\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ جا$(\theta - \pi)$ – جا $\left(\theta + \frac{\pi ٣}{٢}\right)$ جتا$(\theta - \pi)$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب الدوال المثلثية الآتية فى صورة دوال مثلثية لزوايا حادّة.

(أ) جتا $\frac{\pi ١٧}{٥}$ (ب) جتا $\frac{\pi ٥}{٧}$

(جـ) جا $\left(-\frac{\pi ٧}{٨}\right)$ (د) جا $\left(-\frac{\pi ١٩}{٨}\right)$

٢ أوجد القيم الآتية.

(أ) ظا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ (ب) ظا $\left(-\frac{\pi}{٤}\right)$

٣ بسّط المقادير الآتية.

(أ) جا θ + جتا$(\theta + \pi)$ – جتا$(\theta - \pi)$ + جا$(\theta + \pi)$

(ب) جا $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ جتا$(\pi + \theta)$ + جا$(-\theta)$جتا $\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$

★ التحدّي

بسّط:

$$\text{جا}\left(\theta - \frac{\pi ٣}{٢}\right) \text{قا}(\theta + \pi) - \text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) \frac{١}{\text{ظا}\left(\theta + \frac{\pi ٥}{٢}\right)}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقشوا الإجابة.

٥-٩ التمثيل البيانى للدوال المثلثية (١)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

الرياضيات

نواتج التعلّم

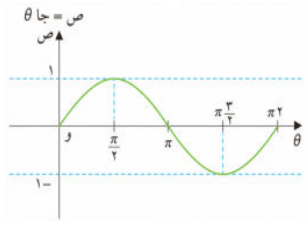
تحليل الخواص الدورية للدوال المثلثية (المدى، والسعة، والدورة، والإزاحة الأفقية)، وتمثيلها بيانيًّا، وتفسير سلوكها.

$\theta = -\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$ خطّا تقارب يقترب منهما المنحنى دون أن يلمسهما.

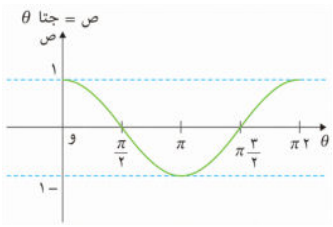
لاحِظ!

منحنيات ص = جا θ، ص = جتا θ، ص = ظا θ.

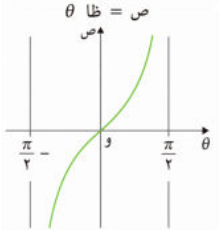
• احفظ دورة واحدة من كلّ منها، وتدرّب على رسمها.



الدورة: $\pi 2$
المدى: $-1 \leq$ ص ≤ 1



الدورة: $\pi 2$
المدى: $-1 \leq$ ص ≤ 1



الدورة: π
المدى: كل الأعداد الحقيقية

• درّج محور θ من $-\pi$ إلى $\pi 2$ بخطوة $\frac{\pi}{2}$.

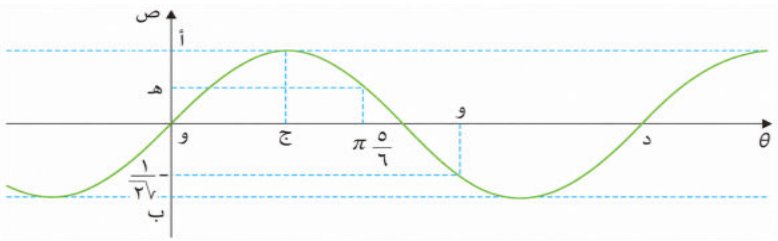
استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ ارسم المنحنيات الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = جا θ (ب) ص = جتا θ (جـ) ص = ظا θ

٢ الشكل الآتى يمثّل منحنى ص = جا θ. أوجد قيم التدريجات من أ إلى و فى الشكل.

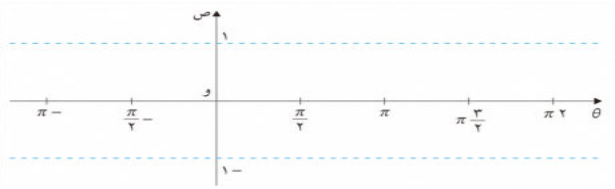


طريقة الحل

(أ)

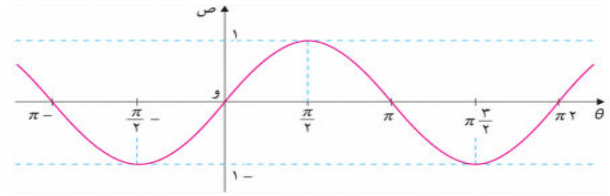
١ ارسم أولًا محور θ ومحور ص، ثم درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ من $-\pi$ إلى $\pi ٢$.

٢ ارسم مستقيمين أفقيين متقطّعين عند ص $= \pm ١$.



٣ ارسم المنحنى القياسى لدورة واحدة.

٤ مدّ المنحنى دوريًّا على باقى المجال.



الدورة $\pi ٢$

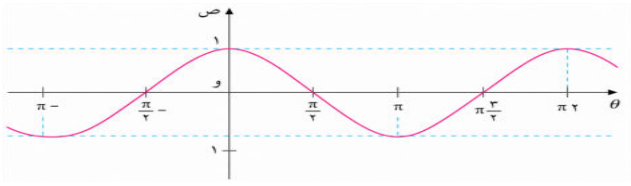
(ب)

١ ارسم أولًا محور θ ومحور ص، ثم درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ من $-\pi$ إلى $\pi ٢$.

٢ ارسم مستقيمين أفقيين متقطّعين عند ص $= \pm ١$.

٣ ارسم المنحنى القياسى لدورة واحدة.

٤ مدّ المنحنى دوريًّا على باقى المجال.



الدورة $\pi ٢$

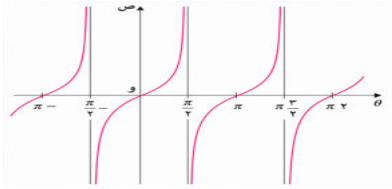
(جـ)

١ ارسم أولًا محور θ ومحور ص، ثم درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ من $-\pi$ إلى $\pi ٢$.

٢ ارسم خطوط التقارب عند $\theta = -\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}$.

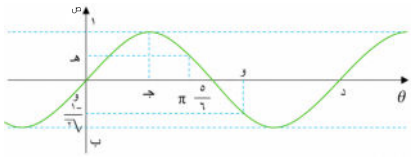
٣ ارسم المنحنى القياسى لدورة واحدة.

٤ مدّ المنحنى دوريًّا على باقى المجال.



الدورة π

٢ كما تفعل عند الرسم، درّج بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ على محور θ، ثم ارسم ص $= \pm ١$ على المنحنى.



ومن ذلك: أ $= ١$، ب $= -١$، جـ $= \frac{\pi}{٢}$، د $= \pi ٢$.

∵ هـ قيمة جا $\frac{\pi ٥}{٦}$ ∴ هـ $= \frac{١}{٢}$

والنقطة و تقع فى الفترة $\pi \geq \theta \geq \frac{\pi ٣}{٢}$ حيث جا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ومن المنحنى $\frac{\pi ٥}{٤}$.

وبذلك: أ $= ١$، ب $= -١$، جـ $= \frac{\pi}{٢}$، د $= \pi ٢$، هـ $= \frac{١}{٢}$، و $= \frac{\pi ٥}{٤}$

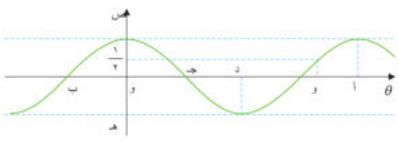
حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ ارسم المنحنيات الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص $=$ جا θ (ب) ص $=$ جتا θ (جـ) ص $=$ ظا θ

٢ الشكل الآتى يمثّل منحنى الدالة ص $=$ جتا θ. أوجد قيم أ إلى و على المحاور.



تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

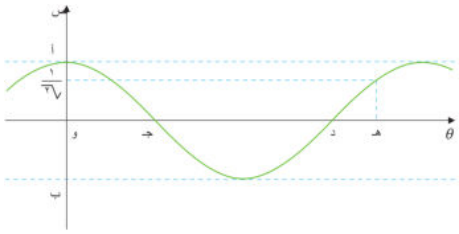
تدريب

حلّ المسائل الآتية.

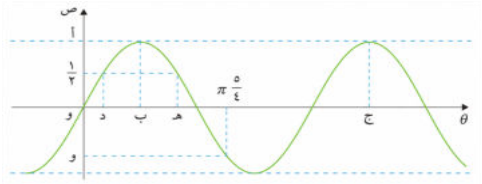
١ ارسم المنحنيات الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = جا θ (ب) ص = جتا θ (جـ) ص = ظا θ

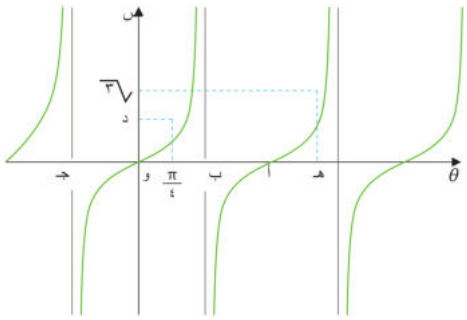
٢ الشكل الآتى يمثّل منحنى الدالة ص = جتا θ . أوجد قيم أ إلى هـ على المحاور.



٣ الشكل الآتى يمثّل منحنى الدالة ص = جا θ . أوجد قيم أ إلى و على المحاور.

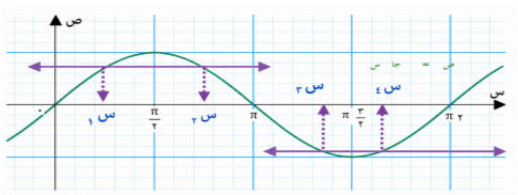


٤ الشكل الآتى يمثّل منحنى الدالة ص = ظا θ . أوجد قيم أ إلى هـ على المحاور.



★ التحدّي

المنحنى الآتى يمثّل: ص = جا س، ٠ < س < ٢π



أوجد: س$_{١}$ + س$_{٢}$ + س$_{٣}$ + س$_{٤}$

١-٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية (٢)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

١-٥
الرياضيات

نواتج التعلّم

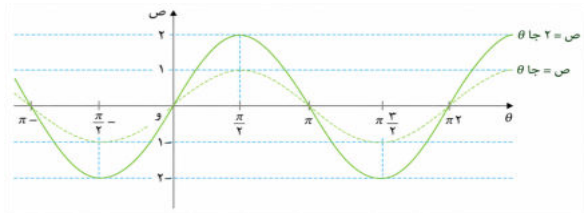
تحليل الخواص الدورية للدوال المثلثية (المدى، والسعة، والدورة، والإزاحة الأفقية)، وتمثيلها بيانيًا، وتفسير سلوكها.

لاحِظ!

منحنى ص = أ جا θ.

هو منحنى ص = جا θ ممتدًا رأسيًا بمعامل أ. (وكذلك ص = أ جتا θ، ص = أ ظا θ)

مثال: منحنى ص = ٢ جا θ.



الدورة 2π، والمدى $-2 \leq ص \leq 2$

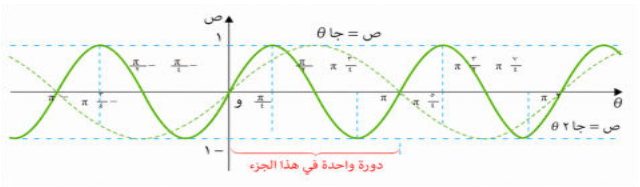
منحنى ص = جا بθ.

هو منحنى ص = جا θ منضغطًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{ب}$.
(وكذلك ص = جتا بθ، ص = ظا بθ)

أى تضرب قيم محور θ والدورة فى $\frac{1}{ب}$.

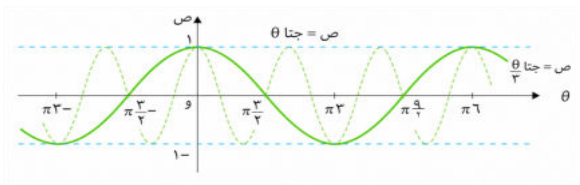
اضرب فى مقلوب ب.

مثال: منحنى ص = جا ٢θ، وهو منحنى ص = جا θ منضغطًا أفقيًا بمعامل $\frac{1}{2}$.



• درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{4}$ • الدورة π • المدى $-1 \leq ص \leq 1$

مثال: منحنى ص = جتا $\frac{\theta}{3}$، وهو منحنى ص = جتا θ ممتدًا أفقيًا بمعامل ٣.



• درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi ٣}{2}$ • الدورة $\pi ٦$ • المدى $-1 \leq ص \leq 1$

استعد

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = ٢ جتا θ

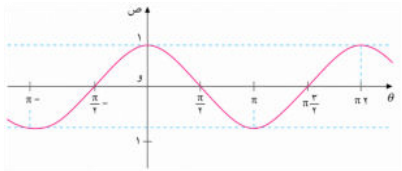
(ب) ص = ظا $\frac{\theta}{٢}$

طريقة الحل

(١) منحنى ص = ٢ جتا θ هو:

منحنى ص = جتا θ ممتدًّا رأسيًّا بمعامل ٢

درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$، وعلّم ±٢ على محور الصادات.

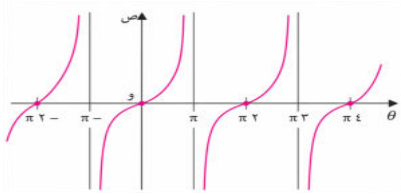


∴ الدورة ٢π

∵ معامل θ يساوى ١ ∴ الدورة لا تتغيّر.

(٢) منحنى ص = ظا $\frac{\theta}{٢}$ هو منحنى ص = ظا θ ممتدًّا أفقيًّا بمعامل ٢

اضرب فى مقلوب $\frac{١}{٢}$.



∴ الدورة ٢π

درّج محور θ بخطوة π . فتصير الدورة ضعف الدورة π للمنحنى ص = ظا θ.

حاول

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = ٢ جا θ

(ب) ص = ظا ٢θ

(ج) ص = جتا $\frac{\theta}{٢}$

تدريب

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = ٣ جا θ

(ب) ص = ٣ جتا θ

(ج) ص = $\frac{١}{٢}$جتا θ

(د) ص = جا ٣θ

(هـ) ص = جتا ٢θ

(و) ص = ظا ٣θ

(ز) ص = جا $\frac{\theta}{٢}$

(ح) ص = جتا $\frac{\theta}{٣}$

(ط) ص = ظا $\frac{\theta}{٣}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّي

ارسم منحنى
ص = $-٢|$جا(٣س)$|$.
وأوجد دورته.

١١-٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية (٣)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

الرياضيات

نواتج التعلّم

تحليل الخواص الدورية للدوال المثلثية (المدى، والسعة، والدورة، والإزاحة الأفقية)، وتمثيلها بيانيًّا، وتفسير سلوكها.

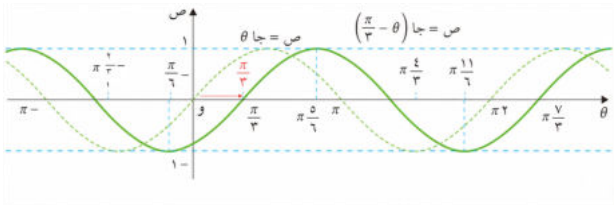
لاحِظ!

منحنى ص = جا(θ – ل).

هو منحنى ص = جا θ مزاحًا أفقيًّا بمقدار ل
(وكذلك ص = جتا(θ – ل)، ص = ظا(θ – ل)).

← درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ ابتداءً من ل.

مثال: منحنى ص = جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٣}\right)$، فدرّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ ابتداءً من $\frac{\pi}{٣}$.



الدورة ٢π
والمدى ١- ≤ ص ≤ ١

استعد

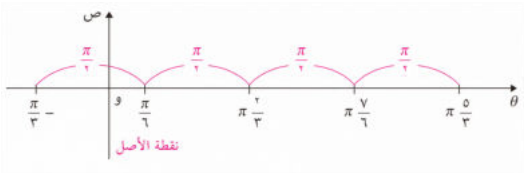
ارسم منحنى الدالة ص = جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$، وأوجد دورتها.

طريقة الحل

ص = جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$ هو منحنى ص = جا θ مزاحًا أفقيًّا بمقدار $\frac{\pi}{٦}$.

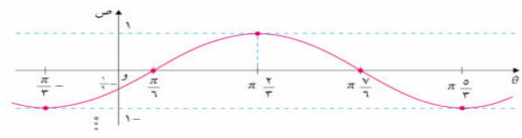
∴ درّج محور θ بخطوة $\frac{\pi}{٢}$ ابتداءً من $\frac{\pi}{٦}$.

إذا تعلّمت فى مدرستك تحديد الجزء المقطوع من محور ص، فاحرص على رسمه. عوّض بـ θ = ٠ فى
ص = جا $\left(\frac{\pi}{٦} - \theta\right)$ فينتج
ص = جا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ = $-\frac{١}{٢}$



ارسم المنحنى القياسى لدورة واحدة ابتداءً من $\frac{\pi}{٦}$، ثم مدّه دوريًّا على باقى المجال.

علّم ٣ خطوات إلى اليمين وخطوة واحدة إلى اليسار ابتداءً من $\frac{\pi}{٦}$.



الدورة ٢π.

حاول

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلٍّ منها.

١ ص = جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$

٢ ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right)$

٣ ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلٍّ منها.

(أ) ص = جا $\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right)$

(ب) ص = جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

(ج) ص = جا $\left(\frac{\pi}{٣} + \theta\right)$

٢ ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلٍّ منها.

(أ) ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$

(ب) ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \theta\right)$

(ج) ص = جتا $\left(\frac{\pi}{٦} + \theta\right)$

٣ ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلٍّ منها.

(أ) ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٦} + \theta\right)$

(ب) ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$

(ج) ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٤} - \theta\right)$

★ التحدّي

ارسم منحنى ص = ٣ جتا $\left|\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right|$، وأوجد دورته.

∵ معامل θ يساوى ١ ∴ الدورة لا تتغيّر.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقِشوا الإجابة.

١٢-٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية (٤)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

الرياضيات

نواتج التعلّم

تحليل الخواص الدورية للدوال المثلثية (المدى، والسعة، والدورة، والإزاحة الأفقية)، وتمثيلها بيانيًّا، وتفسير سلوكها.

أجر التحويلات من الداخل إلى الخارج.

لاحِظ!

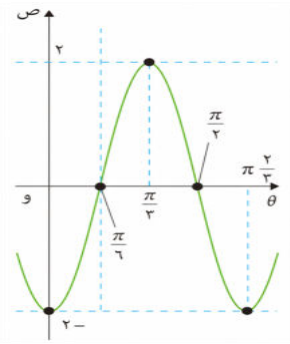
لرسم منحنى ص = أ جا(بθ – ق)، أخرج ب عاملًا مشتركًا من الزاوية، فتصير ص = أ جا ب$\left(\theta - \frac{ق}{ب}\right)$

أجر التحويلات بالترتيب الآتى: إزاحة أفقية بمقدار $\frac{ق}{ب}$، ثم تغيير المقياس الأفقى بمعامل $\frac{١}{ب}$، ثم تغيير المقياس الرأسى بمعامل أ.

مثال: منحنى ص = ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - ٣\theta\right)$

أعد كتابتها ص = ٢ جا ٣$\left(\frac{\pi}{٦} - \theta\right)$

أزح أفقيًّا بمقدار $\frac{\pi}{٦}$، وغيّر المقياس الأفقى بمعامل $\frac{١}{٣}$، والمقياس الرأسى بمعامل ٢



الدورة $\frac{\pi ٢}{٣}$

والمدى ٢– ≤ ص ≤ ٢

استعد

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

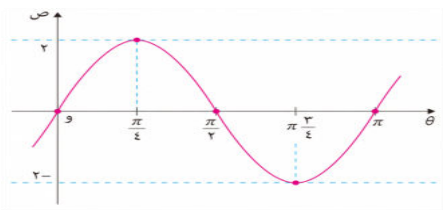
١ ص = ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$

٢ ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٦} - \frac{\theta}{٢}\right)$

طريقة الحل

(١) بإعادة كتابة ص = ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\theta\right)$ نحصل على ص = ٢ جتا ٢$\left(\frac{\pi}{٤} - \theta\right)$

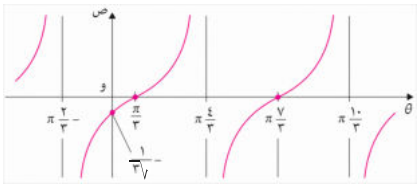
وهو منحنى ص = جتا θ مزاحًا أفقيًّا بمقدار $\frac{\pi}{٤}$، ومتغيّر المقياس أفقيًّا بمعامل $\frac{١}{٢}$، ورأسيًّا بمعامل ٢



الدورة π

(٢) بإعادة كتابة ص = ظا $\left(\frac{\theta}{٢} - \frac{\pi}{٦}\right)$ نحصل على ص = ظا $\frac{١}{٢}\left(\theta - \frac{\pi}{٣}\right)$

وهو منحنى ص = ظا θ مزاحًا أفقيًّا بمقدار $\frac{\pi}{٣}$، ومتغيّر المقياس أفقيًّا بمعامل ٢



الدورة $\pi ٢$

عيّن الجزء المقطوع من محور ص.

حاول

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = ٣ جا $\frac{\theta}{٢}$

(ب) ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta ٢\right)$

(جـ) ص = ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta ٢\right)$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

ارسم منحنيات الدوال الآتية، وأوجد دورة كلّ منها.

(أ) ص = ٢ جتا $\frac{\theta}{٢}$

(ب) ص = ٣ جا $\theta ٢$

(جـ) ص = ٢ جتا $\theta ٢$

(د) ص = ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \theta\right)$

(هـ) ص = ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$

(و) ص = ظا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta ٢\right)$

(ز) ص = ٣ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta ٢\right)$

(ح) ص = ٣ جا $\left(\frac{\pi ٢}{٣} - \theta ٢\right)$

(ط) ص = ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{\theta}{٢}\right)$

★ التحدّي

ارسم منحنى ص = ٣ جا $|٢$س $- \pi|$ وأوجد دورته.

تأمّل

تأمّل الدالة ص = ظا س. منحناها – بخلاف منحنى جا ومنحنى جتا – ليس له سعة معرَّفة، وفيه انقطاعات رأسية (خطوط تقارب) على فترات منتظمة. استعن بفهمك للمتطابقة الحاصلية ظا س = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$، وفسّر رياضيًّا لماذا يتباعد منحنى ص = ظا س إلى ما لا نهاية عند س = $\frac{\pi}{٢}$ وعند س = $\frac{\pi ٣}{٢}$، ولماذا لا تكون له سعة.

١٣-٥
الرياضيات

المعادلات المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

المفهوم ٤ · حلّ المعادلات والمتباينات المثلثية



تعتمد التقنيات الطبية – كأجهزة التنفس الصناعى – اعتمادًا كبيرًا على الرصد الدقيق. يدفع الجهاز الهواء المؤكسج إلى رئتى المريض فى دورات منتظمة، فينظّم ضغط الهواء داخل التجويف الصدرى. فإذا هبط الضغط الداخلى هبوطًا شديدًا، عجزت الرئتان عن امتصاص الأكسجين بكفاءة؛ وإذا بقى مرتفعًا فوق عتبة حرجة زمنًا طويلًا، أصاب نسيج الرئة الرقيق ضرر بالغ.

ولمنع هذا الأذى، يبرمج المهندسون والأطباء أجهزة الإنذار الطبى بدوال موجية. فتحديد اللحظات التى يبلغ عندها متغيّر حيوى دورى عتبةً حرجة، أو حساب المدة التى يقضيها خارج الحدّ الآمن، يقتضى عزل قيم بعينها على موجة متكرّرة.

السؤال الموجّه: كيف تحلّ الطرق الجبرية المعادلات والمتباينات المثلثية على مجال مقيّد؟ وكيف نكتب مجموعة حلول لا نهائية لدالة دورية؟

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات المثلثية.

لاحظ!

- لحلّ المعادلة المثلثية، أعد كتابتها فى الصورة جا θ = أ لإيجاد θ.
  (وكذلك جتا θ وظا θ.)
- لإيجاد الحل العام لـθ، اعتمد على دورة الدالة المثلثية.
  - دورة جا θ وجتا θ هى ٢π ← أضف $٢ن\pi$ إلى الحلّ الموجود فى $٠ \leq \theta < ٢\pi$
  - دورة ظا θ هى π ← أضف $ن\pi$ إلى أحد الحلول الموجودة فى $٠ \leq \theta < \pi$

انظر الدرس ٤-٥

استعد

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $٢ \text{ جتا } \theta = -\sqrt{٢}$ (حيث $٠ \leq \theta \leq ٢\pi$)

(ب) $\text{ظا } \theta + \sqrt{٣} = ٠$ (أوجد الحل العام)

طريقة الحل

(أ) -٢ جتا $\theta = \sqrt{٢}$

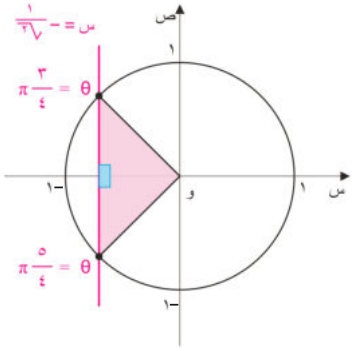
جتا $\theta = -\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

أعد كتابة المعادلة فى الصورة
جتا θ = أ

جتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حوّل إلى $\frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

برسم دائرة الوحدة

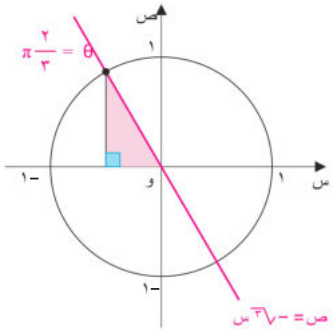


من الشكل السابق: حلول جتا $\theta = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فى المدى $٠ \leq \theta < ٢\pi$ هى:

$\theta = \frac{٣\pi}{٤}$ أو $\frac{٥\pi}{٤}$

(ب) ظا $\theta = -\sqrt{٣}$

برسم دائرة الوحدة فى المدى $٠ \leq \theta < \pi$:



من الشكل السابق: الزاوية التى عندها ظا $\theta = -\sqrt{٣}$ هى $\theta = \frac{٢\pi}{٣}$

لا تنس كتابة (حيث ن عدد صحيح)

$\therefore \theta = \frac{٢\pi}{٣} + ن\pi$ (حيث ن عدد صحيح)

أخطاء شائعة

$\therefore \theta = \frac{٢\pi}{٣} + ٢ن\pi$ (حيث ن عدد صحيح)

أغفلت أن دورة ظا θ هى π، بخلاف جا θ وجتا θ.

حاول

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) ٢ جتا θ – ١ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ب) ظا θ – ١ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(جـ) ٢ جا θ = $\sqrt{٢}$ (أوجد الحل العام)

تدريب

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) ٢ جا θ + ١ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ب) ٢ جا θ = $\sqrt{٣}$ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(جـ) ٣ جا θ + ٣ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(د) $\sqrt{٢}$ جتا θ + ١ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(هـ) ٢ جتا θ = $\sqrt{٣}$ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(و) ٢ جتا θ – $\sqrt{٢}$ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ز) ظا θ + ١ = ٠ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ح) $\sqrt{٣}$ ظا θ = ١ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ط) $\sqrt{٣}$ ظا θ = ٣ (حيث ٠ ≤ θ ≤ ٢π)

(ى) ٢ جا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ (أوجد الحل العام)

(ك) جتا θ + ١ = ٠ (أوجد الحل العام)

(ل) $\sqrt{٣}$ ظا θ + ٣ = ٠ (أوجد الحل العام)

★ التحدّي

حلّ المعادلة الآتية:

$$\text{ظا}^{٢}\theta - (٢ + \sqrt{٣})\text{ظا}\theta + ٢\sqrt{٣} = ٠$$

(أوجد الحل العام)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

١٤-٥
الرياضيات

المتباينات المثلثية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

حلّ المتباينات المثلثية.

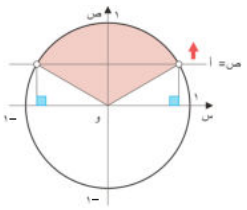
لاحِظ!

خطوات حلّ المتباينة المثلثية.

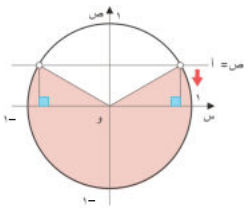
١ استبدل بعلامة المتباينة علامة المساواة، ثم حلّ المعادلة الناتجة.

٢ أوجد مدى θ من دائرة الوحدة التى رسمتها عند حلّ المعادلة.

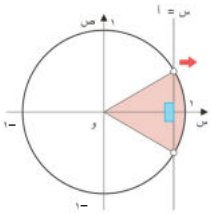
إذا كان جا θ > أ، فالقوس فوق ص = أ



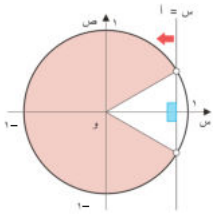
إذا كان جا θ < أ، فالقوس تحت ص = أ



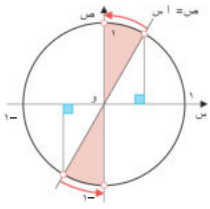
إذا كان جتا θ > أ، فالقوس على يمين س = أ



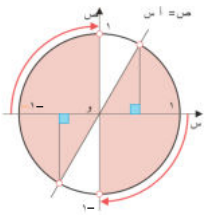
إذا كان جتا θ < أ، فالقوس على يسار س = أ



إذا كان ظا θ > أ، دار الضلع النهائى عكس اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من المستقيم ص = أ س.



إذا كان ظا θ > أ، دار الضلع النهائى فى اتجاه عقارب الساعة ابتداءً من المستقيم ص = أ س.



استعد

حلّ المتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) 2 جتا $\theta > -\sqrt{3}$

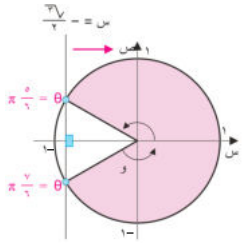
(ب) ظا $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

طريقة الحل

(أ) 2 جتا $\theta > -\sqrt{3}$

جتا $\theta > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

أعد كتابة المتباينة فى الصورة جتا $\theta >$ أ.



ابدأ من $\theta = 0$.

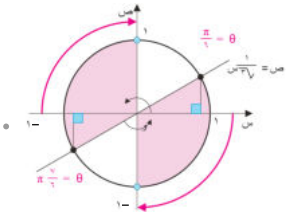
θ تقترب من 2π.

حلول جتا $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ فى المدى $0 \leq \theta < 2\pi$ هى: $\theta = \frac{5\pi}{6}$ أو $\frac{7\pi}{6}$

ومن الشكل السابق يكون حلّ المتباينة:

$$0 \leq \theta < \frac{5\pi}{6} \text{ أو } \frac{7\pi}{6} < \theta < 2\pi$$

(ب) ظا $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$



ظا $\frac{\pi}{2}$ وظا $\frac{3\pi}{2}$ غير معرَّفتين، فلا تدخلان فى الحل.

حلول ظا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فى المدى $0 \leq \theta < 2\pi$ هى: $\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{7\pi}{6}$

ومن الشكل السابق يكون حلّ المتباينة:

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6} \text{ أو } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{6} \text{ أو } \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

حاول

حلّ المتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $2 \text{ جا } \theta \geq -1$

(ب) $\text{جتا } \theta < \frac{1}{2}$

(جـ) $\text{ظا } \theta > 1$

تدريب

حلّ المتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $\text{جا } \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) $\text{جا } \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

(جـ) $2 \text{ جا } \theta + \sqrt{3} \geq 0$

(د) $\text{جتا } \theta > 0$

(هـ) $\text{جتا } \theta - \frac{1}{2} \geq 0$

(و) $2 \text{ جتا } \theta + \sqrt{2} \geq 0$

(ز) $\text{ظا } \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ح) $\text{ظا } \theta + \sqrt{3} < 0$

(ط) $\text{ظا } \theta + 1 \leq 0$

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$:

$2 \text{ جا}^2 \theta - \text{جتا } \theta - 1 < 0$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

١-٥ المعادلات والمتباينات المثلثية (١)

الرياضيات

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات المثلثية، البسيطة والمركّبة، وإيجاد حلولها العامة فى فترات محدّدة.

لاحِظ!

- إذا اجتمعت جا θ وجتا θ فى مقدار واحد، مثل ٢ جتا$^{٢}\theta$ – ٣ جا θ = ٠، فحوّله إلى مقدار بدلالة دالة مثلثية واحدة باستخدام جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١
- حلّ المعادلة أو المتباينة التربيعية فى جا θ بمعاملة جا θ متغيّرًا واحدًا (وكذلك جتا θ).

• وانتبه إلى أن جا θ يحقّق –١ ≤ جا θ ≤ ١

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π.

(أ) ٢ جتا$^{٢}\theta$ – ٣ جا θ = ٠

(ب) ٢ جا$^{٢}\theta$ – ٣ جتا θ – ٣ ≥ ٠

طريقة الحل

(أ) ٢ جتا$^{٢}\theta$ – ٣ جا θ = ٠

حوّله إلى مقدار بدلالة جا θ وحدها.

٢(١ – جا$^{٢}\theta$) – ٣ جا θ = ٠

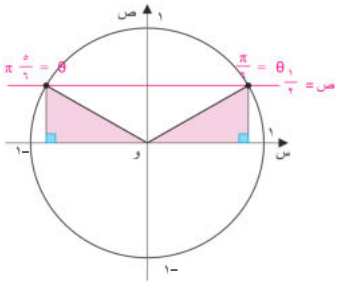
وبالتبسيط: ٢ جا$^{٢}\theta$ + ٣ جا θ – ٢ = ٠

حلّها كما تحلّ المعادلة التربيعية ٢س^{٢} + ٣س – ٢ = ٠.

وبالحل: جا θ = $\frac{١}{٢}$ أو جا θ = –٢

∵ –١ ≤ جا θ ≤ ١ ∴ جا θ = –٢ مرفوضة.

ومن ثمّ جا θ = $\frac{١}{٢}$



ومن الشكل السابق، يكون الحل فى المدى ٠ ≤ θ < ٢π هو

$\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \frac{\pi ٥}{٦}$

طريقة الحل

(ب) ٢ جا$^{٢}\theta$ – ٣ جتا θ – ٣ ≥ ٠

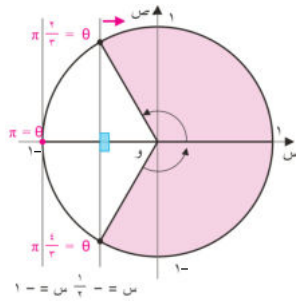
٢(١ – جتا$^{٢}\theta$) – ٣ جتا θ – ٣ ≥ ٠ • حوّله إلى مقدار بدلالة جتا θ وحدها.

وبالتبسيط: ٢ جتا$^{٢}\theta$ + ٣ جتا θ + ١ ≤ ٠

وبالحل: جتا θ ≥ –١ أو –$\frac{١}{٢}$ ≥ جتا θ ..... (١) • حلّها كما تحلّ المتباينة التربيعية ٢س^{٢} + ٣س + ١ ≤ ٠.

وأيضًا –١ ≤ جتا θ ≤ ١ ..... (٢)

ومن (١) و(٢): جتا θ = –١ أو –$\frac{١}{٢}$ ≤ جتا θ ≤ ١



ومن الشكل السابق، يكون الحل المطلوب:

$\pi٢ > \theta \geq \frac{\pi٤}{٣}$ أو $\pi = \theta$ أو $\frac{\pi٢}{٣} \geq \theta \geq ٠$

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $\pi٢ > \theta \geq ٠$.

(أ) ٢ جا$^{٢}\theta$ – جا θ = ٠

(ب) ٢ جتا$^{٢}\theta$ – جا θ = ٢

(جـ) ٢ جا$^{٢}\theta$ – ٤ < ٥ جتا θ

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $\pi٢ > \theta \geq ٠$.

(أ) ٢ جا$^{٢}\theta$ + جا θ – ١ = ٠

(ب) ٢ جا$^{٢}\theta$ + ٣ جتا θ = ٠

(جـ) ٢ جا$^{٢}\theta$ – جتا θ = ٢

(د) ٢ جتا$^{٢}\theta$ – ٥ جتا θ – ٣ = ٠

(هـ) ٢ جتا$^{٢}\theta$ + جا θ – ١ = ٠

(و) ٢ جتا$^{٢}\theta$ + ٣ جا θ = ٣

(ز) ٢ جتا$^{٢}\theta$ + ٣ جا θ ≥ ٠

(ح) ٢ جا$^{٢}\theta$ + جتا θ < ١

(ط) ٢ جتا$^{٢}\theta$ – ٤ ≥ ٥ جا θ

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية فى θ، حيث $\pi٢ > \theta \geq ٠$:

$$\frac{١ - ٢\text{جا}^{٢}\theta + \text{جا}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} \leq ١$$

٥-١٦ المعادلات والمتباينات المثلثية (٢)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

الرياضيات

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات المثلثية، البسيطة والمركّبة، وإيجاد حلولها العامة فى فترات محدّدة.

لاحِظ!

- إذا لم يكن مدخل الدالة θ وحده، فعوّض عن المقدار كلّه بـ ت.
- وعند التعويض بـ ت، أوجد **مدى** ت دائمًا، وحلّ المعادلة أو المتباينة داخل هذا المدى.

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \frac{1}{2}$

(ب) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) < -\frac{1}{2}$

طريقة الحل

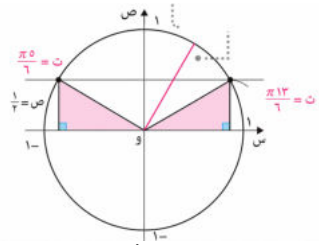
(أ) بفرض $\frac{\pi}{3} + \theta =$ ت، يكون مدى ت هو:

$\frac{\pi}{3} \leq$ ت $< \frac{7\pi}{3}$ ..... (١)

بما أن $\frac{\pi}{3} \leq$ ت $< \frac{7\pi}{3}$، فتأمّل دورة كاملة ابتداءً من هنا.

جا ت $= \frac{1}{2}$ فى المدى (١)، ومن الشكل المجاور (أ):

ت $= \frac{5\pi}{6}$ أو $\frac{13\pi}{6}$



شكل (أ)

أضف $\frac{\pi}{3}$ إلى كل طرف من أطراف المتباينة $0 \leq \theta < 2\pi$.

$\therefore \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$، $\frac{13\pi}{6}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{11\pi}{6}$

بعد حلّ المعادلة فى ت، عوّض عن ت بالمقدار الأصلى.

(ب) بفرض $\frac{\pi}{6} + \theta =$ ت، يكون مدى ت هو:

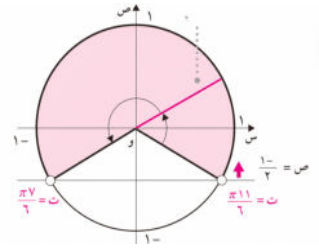
$\frac{\pi}{6} \leq$ ت $< \frac{13\pi}{6}$ ..... (١)

اطرح $\frac{\pi}{3}$ من كل طرف.

بحلّ جا ت $< -\frac{1}{2}$ فى المدى (١)، ومن الشكل المجاور (ب):

$\frac{\pi}{2} <$ ت $\leq \frac{7\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6} <$ ت $< \frac{13\pi}{6}$

بما أن $\frac{\pi}{6} \leq$ ت $< \frac{13\pi}{6}$، فتأمّل دورة كاملة ابتداءً من هنا.



شكل (ب)

$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$

أو $\frac{11\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}$

$0 \leq \theta < \pi$ أو $\frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $\text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

(ب) $\text{ظا}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

(ج) $\text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $\text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ب) $\text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

(ج) $\text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(د) $\text{ظا}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

(هـ) $\text{ظا}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(و) $\text{ظا}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

(ز) $\text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ح) $\text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ط) $\text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$4\,\text{جا}^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

تأمّل

حاول طالب حلّ المعادلة ظا س × جتا س = $\frac{1}{2}$ فى المجال $0° \leq$ س $< 360°$، فبدأ بقسمة طرفَى المعادلة على جتا س، فحصل على ظا س = $\frac{1}{2\,\text{جتا س}}$. قوّم هذه الخطة. هل سهّلت هذه الخطوة الأولى حلّ المعادلة أم صعّبته؟ ثم اقترح تعويضًا جبريًّا بديلًا يعتمد على العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية، ويبسّط المقدار دون فصل الحدّين المتفاعلين.

تعاون مع زميل

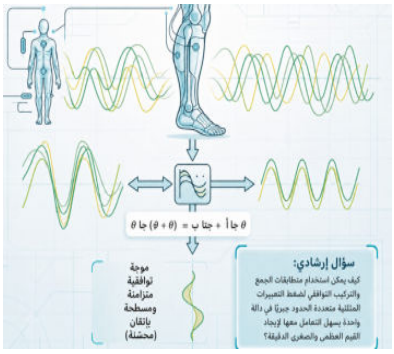
تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٥-١٧
الرياضيات

القيمتان العظمى والصغرى للدوال المثلثية (١)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

المفهوم ٥ · النظريات المتقدمة وتطبيقاتها



تحليل الترددات المركّبة أساسٌ فى الهندسة الكهربية وفى الميكانيكا الحيوية للمنشآت. فحين يسرى التيار المتردّد فى شبكة الكهرباء، أو يبثّ جهازٌ طبى لاسلكى بياناتٍ من غرسةٍ داخل الجسم، تتولّد إشارةٌ إلكترونية نادرًا ما تكون موجةً واحدةً بسيطةً معزولة. بل تتقاطع تياراتٌ عدّة أو إيقاعاتٌ حيوية، فتتولّد موجاتٌ مركّبة.

ولو حسب المهندسون كلَّ إشارةٍ متداخلةٍ على حدة، لأصاب أنظمةَ الاتصال بطءٌ شديد وفقدٌ كبير فى الطاقة. لكن المتطابقات المثلثية المتقدمة تتيح دمج ترددات توافقيةٍ متداخلة فى دالةٍ موجيةٍ واحدةٍ مثلى. وبمزج المتغيرات رياضيًّا نحدّد بدقّة عتبات الذروة وأصفار الأنظمة الفيزيائية المعقّدة.

السؤال الموجّه: كيف نستخدم نظريات الجمع والصورة التوافقية لضغط المقادير المثلثية متعدّدة الحدود فى دالةٍ واحدة يسهل التعامل معها، فنوجد القيمتين العظمى والصغرى بالضبط؟

نواتج التعلّم

تحديد القيمتين العظمى والصغرى للدوال المثلثية فى فترات مختلفة، واستنتاج سلوكها.

لاحظ!

- لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة مثلثية، افرض جا θ = س أو جتا θ = س، ثم استخدم التمثيل البيانى للدالة فى س.
- وعند التعويض بس، اكتب دائمًا $-١ \leq$ س ≤ ١.

استعد

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = جا^{٢} θ + جتا θ + ١، حيث $٠ \leq \theta < ٢\pi$.

ثم أوجد قيم θ المقابلة.

طريقة الحل

ص = جا^{٢} θ + جتا θ + ١

ص = (١ – جتا^{٢} θ) + جتا θ + ١

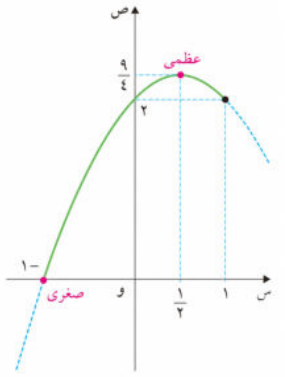
ص = – جتا^{٢} θ + جتا θ + ٢

ليكن جتا θ = س، فيكون –١ ≤ س ≤ ١

ص = – س^{٢} + س + ٢

$= -\left(س - \frac{١}{٢}\right)^{٢} + \frac{٩}{٤}$

وبرسم هذا التمثيل نحصل على الشكل الآتى:



ومن التمثيل البيانى، القيمة العظمى $\frac{٩}{٤}$ عند س = $\frac{١}{٢}$.

إذا كان س = $\frac{١}{٢}$، فإن جتا θ = $\frac{١}{٢}$، ومنه θ = $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{\pi ٥}{٣}$.

وأيضًا القيمة الصغرى صفر عند س = –١.

إذا كان س = –١، فإن جتا θ = –١، ومنه θ = π.

∴ القيمة العظمى $\frac{٩}{٤}$ عند θ = $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{\pi ٥}{٣}$، والقيمة الصغرى صفر عند θ = π

حوّله إلى مقدارٍ بدلالة جتا θ وحدها.

∵ جتا θ = س ∴ اكتب –١ ≤ س ≤ ١

لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة تربيعية، أكمل المربع وارسم التمثيل البيانى.

عوّض بـ جتا عن س.

حاول

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = جتا^{٢} θ – جا θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π. ثم أوجد قيم θ المقابلة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدوال الآتية، حيث ٠ ≤ θ < ٢π. ثم أوجد قيم θ المقابلة.

(أ) ص = جا^{٢} θ + جا θ – ١

(ب) ص = جتا^{٢} θ – جتا θ + ١

(جـ) ص = ٢ جا θ + جتا^{٢} θ – ١

(د) ص = –٢ جا^{٢} θ – ٢ جتا θ + ١

★ التحدّي

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة الآتية، حيث ٠ ≤ θ < ٢π، ثم أوجد قيم θ المقابلة.

ص = جا^{٢} θ – ٤ جتا θ + ٢

١٨-٥ نظريات جمع الدوال المثلثية

الرياضيات

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

استخدام الدوال المثلثية لمجموع قياسى زاويتين وفرقهما فى حساب قيم مثلثية دون استخدام الآلة الحاسبة.

لاحِظ!

نظريات الجمع.

$جا(\alpha + \beta) = جا\ \alpha\ جتا\ \beta + جتا\ \alpha\ جا\ \beta$

$جتا(\alpha + \beta) = جتا\ \alpha\ جتا\ \beta - جا\ \alpha\ جا\ \beta$

$جا(\alpha - \beta) = جا\ \alpha\ جتا\ \beta - جتا\ \alpha\ جا\ \beta$

$جتا(\alpha - \beta) = جتا\ \alpha\ جتا\ \beta + جا\ \alpha\ جا\ \beta$

طريقة حساب القيم المثلثية بنظريات الجمع.

- حوّل من التقدير الدائرى إلى القياس الستينى.
- أعد كتابة الزاوية فى الصورة $٤٥^\circ \pm ٣٠^\circ \times ن$.

إذا علمت قيمة جا θ أو جتا θ فاستخدم $جا^٢\theta + جتا^٢\theta = ١$ لإيجاد الأخرى.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) جا ٧٥° (ب) جتا $\frac{\pi}{١٢}$

٢ إذا كانت جا $\alpha = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وجتا $\beta = -\frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية،
(حيث α فى الربع الثانى وβ فى الربع الثالث).

(أ) جا$(\beta + \alpha)$ (ب) جتا$(\beta - \alpha)$

طريقة الحل

١ **(أ)** $\because ٧٥^\circ = ٤٥^\circ + ٣٠^\circ$ ← أعد الكتابة فى الصورة $٤٥^\circ \pm ٣٠^\circ \times ن$.

جا$(٤٥^\circ + ٣٠^\circ)$

$= جا\ ٤٥^\circ\ جتا\ ٣٠^\circ + جتا\ ٤٥^\circ\ جا\ ٣٠^\circ$ ← جا$(\alpha + \beta) = جا\ \alpha\ جتا\ \beta + جتا\ \alpha\ جا\ \beta$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٢}\ ٢}$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

(ب) ∵ $\frac{\pi}{١٢} = ١٥° = ٤٥° - ٣٠°$ ← حوّل إلى القياس الستينى.

جتا(٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠° ← جتا(α − β) = جتا α جتا β + جا α جا β

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٢}^{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

٢ ∵ نستخدم نظريات جمع الدوال المثلثية لإيجاد قيمتى جا(α + β) وجتا(α − β) ∴ أوجد أولًا جتا α من جا α .

∵ جا $\alpha = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ومن جا^{٢} α + جتا^{٢} α = ١ :

جتا^{٢} $\alpha = ١ - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

و∵ α فى الربع الثانى ∴ جتا $\alpha = -\frac{١}{٢}$

وبالمثل أوجد جا β من جتا β .

∵ جتا $\beta = -\frac{٣}{٥}$ ، ومن جا^{٢} β + جتا^{٢} β = ١ :

جا^{٢} $\beta = ١ - \left(-\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥}$

و∵ β فى الربع الثالث ∴ جا $\beta = -\frac{٤}{٥}$

وبالتعويض:

(أ) جا(α + β) = جا α جتا β + جتا α جا β

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \left(-\frac{٣}{٥}\right) + \left(-\frac{١}{٢}\right) \times \left(-\frac{٤}{٥}\right)$

$= \frac{٣\sqrt{٣} - ٤}{١٠}$

(ب) جتا(α − β) = جتا α جتا β + جا α جا β

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \left(-\frac{٣}{٥}\right) + \left(-\frac{١}{٢}\right) \times \left(-\frac{٤}{٥}\right)$

$= \frac{٤ - ٣\sqrt{٣}}{١٠}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) جا ١٥°　　(ب) جتا $\pi\frac{٧}{١٢}$

٢ إذا كانت جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$ وجتا $\beta = -\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد قيمة المقادير الآتية،
(حيث $٠ < \alpha < \frac{\pi}{٢}$ و $\frac{\pi}{٢} < \beta < \pi$).

(أ) جا(α + β)　　(ب) جتا(α + β)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب أدناه المقادير المناسبة للمقادير من (أ) إلى (د) فيما يأتي.

(أ) جا$(\alpha + \beta) =$ ..... **(ب)** جا$(\alpha - \beta) =$ .....

(جـ) جتا$(\alpha + \beta) =$ ..... **(د)** جتا$(\alpha - \beta) =$ .....

٢ أوجد القيم الآتية.

(أ) جا ١٠٥° (ب) جا $\frac{٧}{١٢}\pi$ (جـ) جا $\frac{١٣}{١٢}\pi$

(د) جتا ١٦٥° (هـ) جتا ١٥° (و) جتا $\frac{١١}{١٢}\pi$

٣ إذا كانت جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$ وجتا $\beta = -\frac{١٢}{١٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية،
(حيث α فى الربع الأول وβ فى الربع الثانى).

(أ) جا$(\beta - \alpha)$ (ب) جتا$(\beta - \alpha)$

٤ إذا كانت جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$ وجتا $\beta = -\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية،
(حيث $\frac{\pi}{٢} < \alpha < \pi$ و$\frac{\pi}{٢} < \beta < \pi$).

(أ) جا$(\beta - \alpha)$ (ب) جتا$(\beta + \alpha)$

٥ إذا كانت جا $\alpha = \frac{٥}{١٣}$ وجتا $\beta = -\frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية،
(حيث $٠ < \alpha < \frac{\pi}{٢}$ و$\pi < \beta < \frac{٣}{٢}\pi$).

(أ) جا$(\beta + \alpha)$ (ب) جتا$(\beta + \alpha)$

★ التحدّي

إذا كانت جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$، جتا $\beta = \frac{٤}{٥}$، ظا $\gamma = \frac{٣}{٤}$، حيث α، β، γ ثلاث زوايا حادة، فأوجد دون استخدام الآلة الحاسبة العلمية:

جا$(\alpha + \beta + \gamma)$

١٩-٥ الزاوية بين مستقيمين

الرياضيات

الفصل الخامس الدوال المثلثية

لاحِظ!

نظرية جمع الدوال المثلثية لظلّ الزاوية.

$$\text{ظا}(\alpha+\beta)=\frac{\text{ظا}\alpha+\text{ظا}\beta}{١-\text{ظا}\alpha\,\text{ظا}\beta} \qquad \text{ظا}(\alpha-\beta)=\frac{\text{ظا}\alpha-\text{ظا}\beta}{١+\text{ظا}\alpha\,\text{ظا}\beta}$$

ليكن α وβ الزاويتين اللتين يصنعهما المستقيمان ص = م$_١$ س + ك$_١$ و ص = م$_٢$ س + ك$_٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، على الترتيب.

ظا α = م$_١$، ظا β = م$_٢$

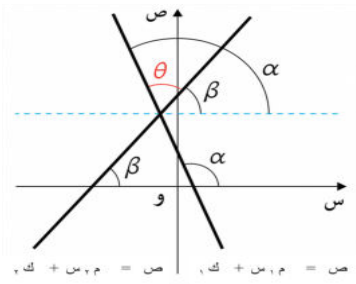
الزاوية θ بين المستقيمين تُكتب $\theta = \alpha - \beta$.

ثم احسب ظا θ لتوجد θ.

وفي مسائل إيجاد الزاوية بين مستقيمين في المدى $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$، إذا كانت الزاوية $\theta_١$ المحسوبة تحقّق $\theta_١ > \frac{\pi}{2}$، فإن $\theta = \pi - \theta_١$.

نواتج التعلّم

حساب الزاوية بين مستقيمين في المستوى الإحداثي باستخدام النسب المثلثية لميلَي المستقيمين.



ظلّ الزاوية بين محور السينات والمستقيم يساوي ميل المستقيم.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قيمة ظا ١٠٥°.

٢ أوجد الزاوية θ بين المستقيمين ص = ٢س + ١ وص = −٣س + ٢ (حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$).

طريقة الحل

(١) ∵ ١٠٥° = ٤٥° + ٦٠°

$$\text{ظا}(٤٥^\circ+٦٠^\circ)=\frac{\text{ظا}٤٥^\circ+\text{ظا}٦٠^\circ}{١-\text{ظا}٤٥^\circ\,\text{ظا}٦٠^\circ}$$

$$=\frac{١+\sqrt{٣}}{١-١\times\sqrt{٣}}=\frac{١+\sqrt{٣}}{١-\sqrt{٣}}$$

$$=\frac{(١+\sqrt{٣})^{٢}}{(١+\sqrt{٣})(١-\sqrt{٣})}=\frac{٤+٢\sqrt{٣}}{-٢}$$

$$=-٢-\sqrt{٣}$$

حوّل إلى صورة مثل ٤٥° ± ٣٠° × ن.

(٢) ليكن α وβ الزاويتين اللتين يصنعهما المستقيمان ص = ٢س + ١ وص = −٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ظا α = ٢، ظا β = −٣

وهما يساويان ميلَي المستقيمين.

ليكن $\theta_١$ الزاوية بين المستقيمين، فيكون $\theta_١ = \alpha - \beta$.

$\therefore$ ظا $\theta_١$ = ظا$(\alpha - \beta)$

ظا$(\alpha - \beta) = \frac{\text{ظا}\alpha - \text{ظا}\beta}{١ + \text{ظا}\alpha\,\text{ظا}\beta}$

$= \frac{٢ - (-٣)}{١ + ٢ \times (-٣)} = \frac{٥}{-٥} = -١$

$\therefore \theta_١ = \frac{٣\pi}{٤}$

$\because \theta_١ > \frac{\pi}{٢} \therefore \theta = \theta_١ - \pi$

$= \frac{٣\pi}{٤} - \pi = \frac{\pi}{٤}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قيمة ظا $\frac{٥\pi}{١٢}$.

٢ أوجد الزاوية θ بين المستقيمين الآتيين (حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$).

(أ) ص = $\frac{١}{٣}$س وص = ٢س

(ب) ٨س + ٢ص − ٣ = ٠ و−٥س + ٣ص + ١ = ٠

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) ظا ٧٥°　　(ب) ظا ١٥°　　(جـ) ظا $\frac{١٣\pi}{١٢}$

٢ أوجد الزاوية θ بين المستقيمين الآتيين (حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$).

(أ) ص = -٤س و ص = $\frac{٥}{٣}$س

(ب) ص = $(٢ + \sqrt{٣})$س و ص = س + ٢

(جـ) ص = ٣س و ص = $\frac{١}{٢}$س + ٣

(د) $-$س + ٣ص = ٠ و $-$س + $\frac{١}{٢}$ص + ٢ = ٠

(هـ) ٣س $-$ ص + ١ = ٠ و س $-$ ٢ص + ٤ = ٠

(و) $\sqrt{٣}$س $-$ ٢ص + ٣ = ٠ و $\sqrt{٣}$س + ص + ٢ = ٠

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

★ التحدّي

مستقيم $ل_١$ يمرّ بالنقطة ب(٣،٢)، ومستقيم ثانٍ $ل_٢$ معادلته س + ٢ص $-$ ٤ = ٠.

١ إذا كانت الزاوية الحادّة θ بين $ل_١$ و$ل_٢$ تحقّق ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$، فأوجد المعادلتين الممكنتين للمستقيم $ل_١$.

٢ احسب لكلّ معادلة ممكنة للمستقيم $ل_١$ مساحة المثلث المحصور بين $ل_١$، $ل_٢$ ومحور الصادات.

٢-٥
الرياضيات

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

استخدام الدوال المثلثية لضعف الزاوية فى حساب قيم مثلثية دون استخدام الآلة الحاسبة.

لاحِظ!

الدوال المثلثية لضعف الزاوية.

جا ٢α = ٢ جا α جتا α

جتا ٢α = جتا^{٢} α – جا^{٢} α

= ١ – ٢ جا^{٢} α

= ٢ جتا^{٢} α – ١

ظا ٢α = $\frac{\text{٢ ظا } \alpha}{\text{١ – ظا}^{٢} \alpha}$

إذا علمت قيمتَى جا ٢α وجتا ٢α فاستخدم ظا ٢α = $\frac{\text{جا ٢}\alpha}{\text{جتا ٢}\alpha}$ لإيجاد ظا ٢α.

استخدمها إذا علمت جا α وحدها.

استخدمها إذا علمت جتا α وحدها.

استعد

إذا كانت جا α = $\frac{١}{٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث α فى الربع الثانى).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

طريقة الحل

∵ جا α = $\frac{١}{٣}$، ومن جا^{٢} α + جتا^{٢} α = ١ :

جتا^{٢} α = ١ – $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ = $\frac{٨}{٩}$

أوجد قيمة جتا α.

و∵ α فى الربع الثانى ∴ جتا α = $-\frac{\sqrt{٢}\sqrt{٣}}{٣}$

(أ) جا ٢α = ٢ جا α جتا α

$= \left(-\frac{\sqrt{٢}\sqrt{٣}}{٣}\right) \times \frac{١}{٣} \times ٢$

$= -\frac{٤\sqrt{٣}}{٩}$

(ب) جتا ٢α = جتا^{٢} α – جا^{٢} α

$= \left(-\frac{\sqrt{٢}\sqrt{٣}}{٣}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

$= \frac{٧}{٩}$

قيمتا جا ٢α وجتا ٢α معلومتان، فاستخدم قسمتَهما.

(جـ) ظا ٢α = $\frac{\text{جا ٢}\alpha}{\text{جتا ٢}\alpha}$

$= -\frac{٤\sqrt{٣}}{٩} \div \frac{٧}{٩}$

$= -\frac{٤\sqrt{٣}}{٧}$

حاول

إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $\pi < \alpha < \frac{٣\pi}{٢}$).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت جا $\alpha = -\frac{١}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $\pi < \alpha < \frac{٣\pi}{٢}$).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

٢ إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{٢}{٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $\pi < \alpha < ٢\pi$).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

٣ إذا كانت جا $\alpha = \frac{٥}{١٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث α زاوية منفرجة).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

٤ إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{١}{٤}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث α فى الربع الثالث).

(أ) جا ٢α (ب) جتا ٢α (جـ) ظا ٢α

★ التحدّي

إذا كانت جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقدار الآتى، (حيث $\pi < \theta < ٢\pi$).

جتا $٣\theta \times$ ظا ٢θ

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٥-٢١
الرياضيات

الدوال المثلثية لنصف الزاوية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

استخدام صيغ نصف الزاوية فى حساب قيم مثلثية دون استخدام الآلة الحاسبة.

لاحِظ!

- لا تحفظ **صيغ نصف الزاوية**، بل استنتجها من صيغة ضعف الزاوية لـجتا α.

$$\text{جتا } \alpha = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{\alpha}{٢}$$

(÷٢) (÷٢)

$$\text{جتا } ٢\alpha = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \alpha$$

$$\text{جتا } \alpha = ٢ \text{ جتا}^{٢} \frac{\alpha}{٢} - ١$$

(÷٢) (÷٢)

$$\text{جتا } ٢\alpha = ٢ \text{ جتا}^{٢} \alpha - ١$$

- لإيجاد جا $\frac{\alpha}{٢}$ من جا$^{٢}\frac{\alpha}{٢}$، حدّد إشارتها حسب الربع الذى تقع فيه الزاوية. (وكذلك جتا $\frac{\alpha}{٢}$)
- لإيجاد قيم الدوال المثلثية للزاوية $\frac{\pi ل}{٨}$، عوّض عن α بـ$\frac{\pi ل}{٤}$ فى صيغة نصف الزاوية.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت جتا $\alpha = \frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $٠ < \alpha < \pi$).

(أ) جا $\frac{\alpha}{٢}$ (ب) جتا $\frac{\alpha}{٢}$ (جـ) ظا $\frac{\alpha}{٢}$

٢ أوجد جتا $\frac{\pi ٥}{٨}$.

طريقة الحل

١ **(أ)** من جتا ٢α = ١ – ٢ جا^{٢} α:

جتا α = ١ – ٢ جا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$

∴ $\frac{٣}{٥}$ = ١ – ٢ جا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$

وبالتبسيط: جا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{١}{٥}$

(ب) من جتا ٢α = ٢ جتا^{٢} α – ١:

جتا α = ٢ جتا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$ – ١

∴ $\frac{٣}{٥}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$ – ١

وبالتبسيط: جتا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{٤}{٥}$

∵ ٠ < α < π ∴ ٠ < $\frac{\alpha}{٢}$ < $\frac{\pi}{٢}$

و∵ $\frac{\alpha}{٢}$ فى الربع الأول ∴ الجذران موجبان:

جا $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$ جتا $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$

(جـ) ∵ قيمتا جا $\frac{\alpha}{٢}$ وجتا $\frac{\alpha}{٢}$ معلومتان ∴ استخدم ظا $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{\text{جا}\frac{\alpha}{٢}}{\text{جتا}\frac{\alpha}{٢}}$

ظا $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{\frac{\sqrt{٥}}{٥}}{\frac{٢\sqrt{٥}}{٥}}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥}}$

ظا $\frac{\alpha}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ ∵ جتا $\frac{٥\pi}{٨}$ دالة مثلثية للزاوية $\frac{٥\pi}{٨}$ ∴ استخدم صيغة نصف الزاوية.

من جتا ٢α = ٢ جتا^{٢} α – ١، ينتج جتا α = ٢ جتا^{٢} $\frac{\alpha}{٢}$ – ١

عوّض بـ α = $\frac{٥\pi}{٤}$ فى هذه المعادلة:

جتا $\frac{٥\pi}{٤}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{٥\pi}{٨}$ – ١

– $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{٥\pi}{٨}$ – ١

وبالتبسيط: جتا^{٢} $\frac{٥\pi}{٨}$ = $\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}$

و∵ $\frac{\pi}{٢}$ < $\frac{٥\pi}{٨}$ < $\frac{٣\pi}{٢}$ ∴ الجذر سالب:

جتا $\frac{٥\pi}{٨}$ = – $\frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$

حدّد الإشارة من الربع الواقعة فيه الزاوية.

$\frac{٥\pi}{٨}$ فى الربع الثانى، وجتا سالبة فيه.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{١}{٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $\pi > \alpha > ٠$).

(أ) جا $\frac{\alpha}{٢}$ (ب) جتا $\frac{\alpha}{٢}$ (جـ) ظا $\frac{\alpha}{٢}$

٢ أوجد قيمة جا $\frac{٣\pi}{٨}$.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت جتا $\alpha = \frac{٥}{٧}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $\pi > \alpha > ٠$).

(أ) جا $\frac{\alpha}{٢}$ (ب) جتا $\frac{\alpha}{٢}$ (جـ) ظا $\frac{\alpha}{٢}$

٢ إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{٣}{٥}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $٢\pi > \alpha > ٣\pi$).

(أ) جا $\frac{\alpha}{٢}$ (ب) جتا $\frac{\alpha}{٢}$ (جـ) ظا $\frac{\alpha}{٢}$

٣ إذا كانت جتا $\alpha = -\frac{٢}{٣}$، فأوجد قيمة المقادير الآتية، (حيث $٣\pi > \alpha > ٤\pi$).

(أ) جا $\frac{\alpha}{٢}$ (ب) جتا $\frac{\alpha}{٢}$ (جـ) ظا $\frac{\alpha}{٢}$

٤ أوجد القيم الآتية.

(أ) جتا $\frac{٣\pi}{٨}$ (ب) جا $\frac{٥\pi}{٨}$ (جـ) جتا $\frac{\pi}{٨}$

★ التحدّي

إذا كانت ظا $\alpha = \frac{١}{٢}\sqrt{٥}$ ، (حيث $٥\pi > \alpha > ٤\pi$)، وجتا $\beta = -\frac{١}{٣}\sqrt{٥}$ ، (حيث $٦\pi > \beta > ٥\pi$)، فأوجد قيمة:

(أ) جتا $\left(\frac{\beta}{٢} - \frac{\alpha}{٢}\right)$ (ب) جا $\frac{\alpha}{٤}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

٢٢-٥
الرياضيات

معادلات ومتباينات ضعف الزاوية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات التى تتضمّن ضعف الزاوية.

لاحِظ!

فى المعادلات والمتباينات التى تحوى 2θ، استخدم الدوال المثلثية لضعف الزاوية لتكتب الدوال المثلثية بدلالة الزاوية نفسها.

• الدوال المثلثية لضعف الزاوية.

$\text{جا } 2\theta = 2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta$

$\text{جتا } 2\theta = 1 - 2 \text{ جا}^2 \theta$

$= 2 \text{ جتا}^2 \theta - 1$

استخدمها لتحويل المقدار إلى مقدار بدلالة جا وحدها.

استخدمها لتحويل المقدار إلى مقدار بدلالة جتا وحدها.

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) $\text{جا } 2\theta + \text{جا } \theta = 0$

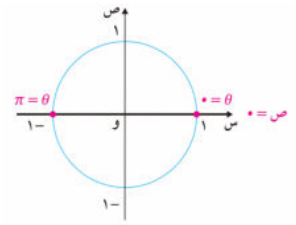
(ب) $\text{جتا } 2\theta - 7 \text{ جتا } \theta + 4 \leq 0$

استخدم الدوال المثلثية لضعف الزاوية لتكتب الدوال المثلثية بدلالة الزاوية نفسها.

إذا كان أ ب = ٠، فإن أ = ٠ أو ب = ٠.

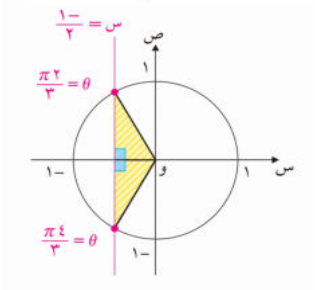
طريقة الحل

(أ) $\text{جا } 2\theta + \text{جا } \theta = 0$



$2 \text{ جا } \theta \text{ جتا } \theta + \text{جا } \theta = 0$

$\text{جا } \theta (2 \text{ جتا } \theta + 1) = 0$



ومن ثمّ $\text{جا } \theta = 0$ أو $2 \text{ جتا } \theta + 1 = 0$

فإذا كانت $\text{جا } \theta = 0$، فإن $\theta = 0$ أو π

وإذا كانت $2 \text{ جتا } \theta + 1 = 0$، أى $\text{جتا } \theta = -\frac{1}{2}$، فإن $\theta = \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = 0$ أو $\frac{2\pi}{3}$ أو π أو $\frac{4\pi}{3}$

(ب) جتا ٢θ – ٧ جتا θ + ٤ ≤ ٠

(٢ جتا^{٢} θ – ١) – ٧ جتا θ + ٤ ≤ ٠

٢ جتا^{٢} θ – ٧ جتا θ + ٣ ≤ ٠

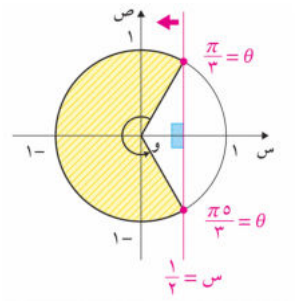
وبالحلّ: جتا θ ≥ $\frac{١}{٢}$ أو جتا θ ≤ ٣ ..... (١)

وأيضًا –١ ≤ جتا θ ≤ ١ ..... (٢)

ومن (١) و(٢): –١ ≤ جتا θ ≤ $\frac{١}{٢}$

ومن الشكل المجاور يكون الحلّ المطلوب:

$$\frac{\pi ٥}{٣} \geq \theta \geq \frac{\pi}{٣}$$



استخدم الدوال المثلثية لضعف الزاوية لتكتب الدوال المثلثية بدلالة الزاوية نفسها.

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π.

١ جا ٢θ + جتا θ = ٠

٢ جتا ٢θ + جا θ = ٠

٣ جتا ٢θ – ٣ جتا θ – ١ ≥ ٠

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π.

١ جا ٢θ = جا θ

٢ جا ٢θ – جتا θ = ٠

٣ جا ٢θ = $\sqrt{٣}$ جا θ

٤ جتا ٢θ = ٣ جتا θ + ١

٥ جتا ٢θ + جتا θ + ١ = ٠

٦ جتا ٢θ = –٥ جتا θ – ٣

٧ جتا ٢θ – جا θ ≤ ٠

٨ ٢ جتا ٢θ + ٤ جتا θ – ١ ≤ ٠

٩ جتا ٢θ < – جا θ

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية فى θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π:

جتا ٢θ ≤ جتا θ

٢٣-٥
الرياضيات

الصورة التوافقية

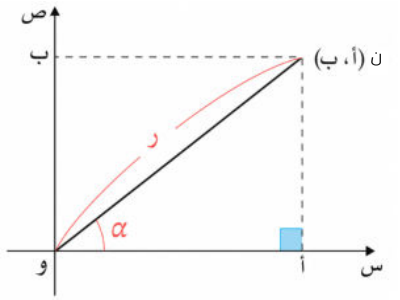
الفصل الخامس الدوال المثلثية

لاحظ!

الصورة التوافقية. المقدار أ جا θ + ب جتا θ يمكن كتابته فى الصورة الآتية:

$$\text{أ جا } \theta + \text{ب جتا } \theta = \text{ر جا}(\alpha + \theta)$$

خطوات التحويل.



١ عيّن النقطة ن(أ،ب) فى المستوى الإحداثى.

٢ أوجد الطول ر للقطعة و ن.

٣ ارسم المثلث القائم المرجعى الذى وتره و ن، وأوجد الزاوية α التى ضلعها النهائى و ن.

٤ عوّض بقيمتى ر ، α فى ر جا$(\alpha + \theta)$.

نواتج التعلّم

استخدام الصورة التوافقية فى تحويل مقدار مكوّن من جا وجتا إلى دالة مثلثية واحدة مكافئة، لحدّين لهما التردد θ نفسه وسعتان مختلفتان أ، ب.

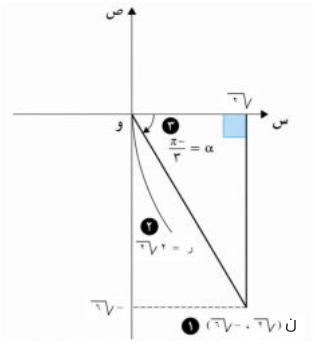
استعد

أعد كتابة المقدار $\sqrt{٢}$ جا θ – $\sqrt{٦}$ جتا θ فى الصورة ر جا$(\alpha + \theta)$،
(حيث ر > ٠، $-\pi < \alpha < \pi$).

طريقة الحل

عيّن النقطة ن(√٢، −√٦) فى المستوى الإحداثى.

عيّن النقطة ن(أ،ب) فى المستوى الإحداثى.



أوجد الطول ر للقطعة و ن.

ليكن ر طول القطعة و ن.

$$ر = \sqrt{(\sqrt{٢})^{٢} + (-\sqrt{٦})^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢}\ ٢$$

ارسم المثلث القائم المرجعى الذى وتره و ن، ثم أوجد α.

ومن الشكل السابق، قيمة α فى المدى $-\pi < \alpha < \pi$ هى:

$$\alpha = -\frac{\pi}{٣}$$

عوّض بقيمتى ر و α فى ر جا$(\theta + \alpha)$.

$$\therefore \sqrt{٢}\ جا\ \theta - \sqrt{٦}\ جتا\ \theta = ٢\sqrt{٢}\ جا\left(\theta - \frac{\pi}{٣}\right)$$

حاول

أعد كتابة المقادير الآتية فى الصورة ر جا$(\theta + \alpha)$، (حيث ر > ٠ و$-\pi < \alpha < \pi$).

(أ) جا θ + √٣ جتا θ

(ب) √٢ جا θ + √٢ جتا θ

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

أعد كتابة المقادير الآتية فى الصورة ر جا$(\theta + \alpha)$، (حيث ر > ٠ و$-\pi < \alpha < \pi$).

(أ) √٣ جا θ − جتا θ

(ب) جا θ + جتا θ

(جـ) √٣ جا θ + جتا θ

(د) √٣ جا θ − √٣ جتا θ

(هـ) √٦ جا θ − √٢ جتا θ

(و) ٢ جا θ + ٢ جتا θ

★ التحدّي

أعد كتابة المقدار الآتى فى الصورة ر جا$(\theta + \alpha)$، (حيث ر > ٠ و$-\pi < \alpha < \pi$).

√٢ جا θ − √٦ جتا θ

٥-٢٤
الرياضيات

المعادلات والمتباينات بالصورة التوافقية

الفصل الخامس الدوال المثلثية

لاحِظ!

- إذا حوت المعادلة أو المتباينة الصورة أ جا θ + ب جتا θ، فأعد كتابتها فى الصورة ر جا ($\theta + \alpha$).
- وعند حلّ معادلة أو متباينة بعد التحويل إلى **الصورة التوافقية**، تحقّق من **مدى الزاوية الجديدة**، وحلّ داخل هذا المدى.

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

(أ) جا θ – جتا θ = ١

(ب) $\sqrt{٣}$ جا θ + جتا θ > $\sqrt{٢}$

طريقة الحل

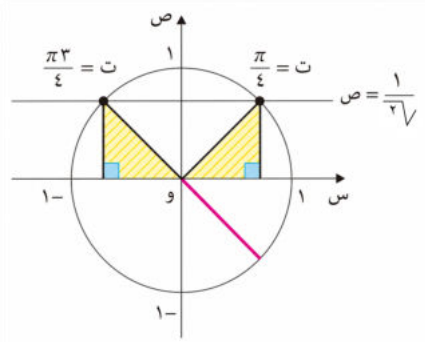
(أ) جا θ – جتا θ = ١

$\sqrt{٢}$ جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٤}\right)$ = ١

جا $\left(\theta - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

بفرض $\theta - \frac{\pi}{٤}$ = ت، يكون مدى ت هو:

$-\frac{\pi}{٤} \leq$ ت $< \frac{٧\pi}{٤}$



ومن الشكل السابق، حلول جا ت = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فى هذا المدى هى:

ت = $\frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{٣\pi}{٤}$

$\therefore \theta - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{٣\pi}{٤}$

$\theta = \frac{\pi}{٢}$ أو π

نواتج التعلّم

استخدام الصورة التوافقية فى تحويل مقدار مكوّن من جا وجتا إلى دالة مثلثية واحدة مكافئة، لحدّين لهما التردد θ نفسه وسعتان مختلفتان أ، ب، ثم حلّ المعادلات والمتباينات بها.

انظر ٥-١٦.

أعد كتابة الطرف الأيمن فى الصورة ر جا ($\theta + \alpha$).

تحقّق من مدى المتغيّر الجديد.

بما أن $-\frac{\pi}{٤} \leq$ ت $< \frac{٧\pi}{٤}$، فتأمّل دورة كاملة ابتداءً من هنا.

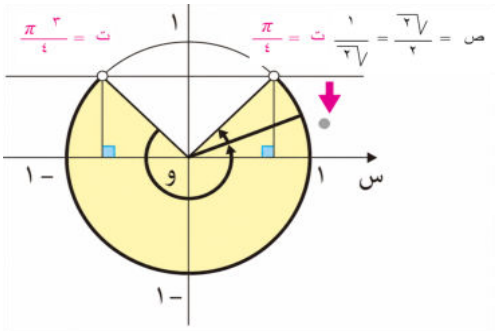
(ب) $\sqrt{٢} > \theta$ جتا $+ \theta$ جا $\sqrt{٣}$

$\sqrt{٣} > \left(\frac{\pi}{٦} + \theta\right)$ جا ٢

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} > \left(\frac{\pi}{٦} + \theta\right)$ جا

بفرض $\frac{\pi}{٦} + \theta$ = ت، يكون مدى ت هو:

$\frac{\pi}{٦} \geq$ ت $< \frac{\pi ١٣}{٦}$



ومن الشكل السابق، حلول جا ت $< \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فى هذا المدى هى:

$\frac{\pi}{٦} \geq$ ت $< \frac{\pi}{٤}$ أو $\frac{\pi ٣}{٤} <$ ت $< \frac{\pi ١٣}{٦}$

$\therefore \frac{\pi}{٦} \geq \frac{\pi}{٦} + \theta < \frac{\pi}{٤}$

أو $\frac{\pi ٣}{٤} < \frac{\pi}{٦} + \theta < \frac{\pi ١٣}{٦}$

وبالحلّ فى θ ينتج:

$٠ \leq \theta < \frac{\pi}{١٢}$ أو $\frac{\pi ٧}{١٢} < \theta < \pi ٢$

أعد كتابة الطرف الأيمن فى الصورة ر جا ($\alpha + \theta$).

بما أن $\frac{\pi}{٦} \geq$ ت $< \frac{\pi ١٣}{٦}$، فتأمّل دورة كاملة ابتداءً من هنا.

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $٠ \leq \theta < \pi ٢$.

(أ) جا θ + جتا θ + ١ = ٠

(ب) جا θ + جتا $\theta \sqrt{٣} = \theta$ جتا $\sqrt{٢}$

(جـ) جا $\theta \sqrt{٣} \geq \theta$ جتا θ

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية فى θ، حيث $٠ \leq \theta < \pi ٢$.

(أ) جا θ – جتا θ = –١

(ب) جا θ + جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(جـ) ٢ (جا θ جتا θ + جتا θ) $= \sqrt{٦}$

(د) جا $\theta \sqrt{٣}$ + جتا $\theta = \sqrt{٢}$

(هـ) جا $\theta \sqrt{٣}$ – جتا $\theta = \sqrt{٦}$

(و) جا $\theta \sqrt{٣}$ – جتا θ = ١

(ز) جا $\theta \sqrt{٣} \leq \theta$ جتا θ

(ح) جا $\theta \sqrt{٣}$ + جتا θ > –١

(ط) جا $\theta \sqrt{٣}$ – جتا θ < ١

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية فى θ، حيث $٠ \leq \theta < \pi ٢$:

$$\frac{٢ - \left(\theta \text{ جتا } \sqrt{٣} - \theta \text{ جا } \sqrt{٦}\right) ٢ - {}^{٢}\left(\theta \text{ جتا } \sqrt{٣} - \theta \text{ جا } \sqrt{٦}\right)}{\sqrt{٣} ٣ + \theta \text{ جتا } \sqrt{٣} - \theta \text{ جا } \sqrt{٦}} \geq ٠$$

٥-٢٥
الرياضيات

القيمتان العظمى والصغرى للدوال المثلثية (٢)

الفصل الخامس الدوال المثلثية

نواتج التعلّم

استخدام الصورة التوافقية فى تحويل مقدارٍ مكوَّن من جا وجتا إلى دالة مثلثية واحدة مكافئة، لحدَّين لهما التردد θ نفسه وسعتان مختلفتان أ، ب، ثم حلّ المعادلات وتحديد القيم العظمى المطلقة فى الأنظمة الموجية.

لاحِظ!

لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى للدوال المثلثية، استخدم التحويلات نفسها المستخدمة فى حلّ المعادلات والمتباينات.

- إذا حوى المقدار الصورة أ جا θ + ب جتا θ، فأعد كتابته فى الصورة ر جا ($\theta + \alpha$) .

انظر ٥-٢٤.

- وإذا تضمّنت الدوال المثلثية ضعف الزاوية، فاستخدم الدوال المثلثية لضعف الزاوية لتكتبها بدلالة الزاوية نفسها.

انظر ٥-٢٢.

ولإيجاد القيمتين العظمى والصغرى، انتبه إلى المديين $-١ \leq$ جا $\theta \leq ١$ و $-١ \leq$ جتا $\theta \leq ١$.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = جا θ − $\sqrt{٣}$ جتا θ.

٢ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = ٢ جتا ٢θ + ٤ جتا θ + ١،
حيث $٠ \leq \theta < ٢\pi$، ثم أوجد قيم θ المقابلة.

طريقة الحل

١ ص = جا θ − $\sqrt{٣}$ جتا θ

أعد كتابة الطرف الأيسر فى الصورة ر جا ($\theta + \alpha$) .

$= ٢$ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$

لإيجاد مدى ص = ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right)$، كوّن المتباينة $-٢ \leq ٢$ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right) \leq ٢$.

$\because -١ \leq$ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right) \leq ١$

$-٢ \leq ٢$ جا $\left(\frac{\pi}{٣} - \theta\right) \leq ٢$

∴ القيمة العظمى ٢، والقيمة الصغرى −٢

٢ ص = ٢ جتا ٢θ + ٤ جتا θ + ١

= ٢ (٢ جتا^{٢} θ – ١) + ٤ جتا θ + ١

استخدم الدوال المثلثية لضعف الزاوية لتكتب الدوال بدلالة الزاوية نفسها.

= ٤ جتا^{٢} θ + ٤ جتا θ – ١

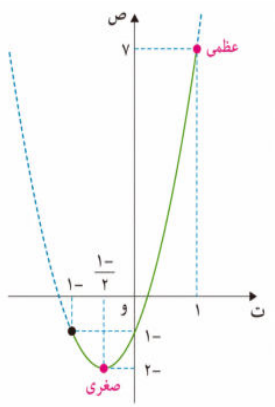
ليكن جتا θ = ت، فيكون –١ ≤ ت ≤ ١

تحقّق من المدى بعد التعويض (انظر ٥-١٧).

ص = ٤ ت^{٢} + ٤ ت – ١

= ٤ $\left(ت + \frac{١}{٢} \right)^{٢}$ – ٢

وبرسم هذا التمثيل نحصل على الشكل الآتى:



ومن التمثيل البيانى، القيمة العظمى ٧ عند ت = ١.

إذا كان ت = ١، فإن جتا θ = ١، ومنه θ = ٠

وأيضًا القيمة الصغرى –٢ عند ت = $-\frac{١}{٢}$.

إذا كان ت = $-\frac{١}{٢}$، فإن جتا θ = $-\frac{١}{٢}$، ومنه θ = $\frac{٢\pi}{٣}$ أو $\frac{٤\pi}{٣}$.

∴ القيمة العظمى ٧ عند θ = ٠، والقيمة الصغرى –٢ عند θ = $\frac{٢\pi}{٣}$ أو $\frac{٤\pi}{٣}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = $-\sqrt{٣}$ جا θ + جتا θ.

٢ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة ص = جتا ٢θ – ٢ جتا θ، حيث ٠ ≤ θ < ٢π، ثم أوجد قيم θ المقابلة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدوال الآتية.

(أ) ص = جا θ – $\sqrt{٣}$ جتا θ – ١

(ب) ص = جا θ + جتا θ

(ج) ص = ٢ جا θ + ٢ جتا θ

٢ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدوال الآتية، حيث ٠ ≤ θ < ٢π. ثم أوجد قيم θ المقابلة.

(أ) ص = ٢ جا θ – جتا ٢θ

(ب) ص = ٢ جتا ٢θ + ٤ جا θ – ١

(ج) ص = جتا ٢θ + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا θ

★ التحدّي

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة الآتية، حيث ٠ ≤ θ < ٢π، ثم أوجد قيم θ المقابلة.

ص = |جا θ – ٢ جتا θ|

تأمّل

إذا واجهت مقدارًا مثلثيًّا مركّبًا يجمع بين الزاوية المفردة θ وضعف الزاوية ٢θ، فكيف تقرّر: أتفكّ ضعف الزاوية إلى الزاوية المفردة، أم تضمّ المفردة إلى ضعفها؟ وما القرائن البنائية التى توجّه اختيارك؟

١-٦
الرياضيات

قوانين الأسس الصحيحة

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

تطبيق قوانين الأسس الصحيحة فى تبسيط المقادير الجبرية المركّبة.

المفهوم ١ · قوانين الأسس والجذور



فى علمَى الأوبئة والأدوية لا غنى عن فهم كيف تتضاعف الكائنات الدقيقة، وكيف يتخلّص الجسم من الدواء. فبكتيريا الإشريكية القولونية مثلًا، إذا دخلت وسطًا غنيًّا بالغذاء، انقسمت انقسامًا ثنائيًّا كل ٢٠ دقيقة.

ومعنى هذا التضاعف السريع أن العشيرة تنمو بعد ن دورة بمعامل يساوى $٢^{ن}$. وعلى العكس، إذا أُعطى المريض مضادًّا حيويًّا، تضاءل تركيزه فى الدم بنسبة كسرية مع الزمن. وضبط هذه المقاييس المتسارعة رياضيًّا – سواء أتتبّعنا بلايين الميكروبات أم مليجرامات دقيقة من دواء منقذ – يقتضى إطارًا محكمًا.

السؤال الموجّه: كيف تتيح قوانين الأسس الكسرية الانتقال السلس من نمذجة النموّ بخطوات منفصلة، مثل $٢^{ن}$، إلى تمثيله على فترات متصلة، مثل $٣\sqrt{}^{ن}$ ؟

لاحِظ!

! فى المقدار $أ^{ن}$، يسمّى أ الأساس، ويسمّى ن الأُسّ.

إذا كان أ ≠ ٠ وكانت ن عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$أ^{٠} = ١$

$أ^{-ن} = \left(\frac{١}{أ}\right)^{ن}$

مثال: $أ^{-٢} = \left(\frac{١}{أ}\right)^{٢}$ مثال: $\left(\frac{١}{أ}\right)^{-٣} = أ^{٣}$

! **قوانين الأسس.** ليكن أ ≠ ٠، ب ≠ ٠، وليكن م، ن عددين صحيحين.

$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ مثال: $أ^{٣} \times أ^{٤} = أ^{٧}$

$أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ مثال: $أ^{٥} \div أ^{٣} = أ^{٢}$

$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ مثال: $(أ^{٣})^{٢} = أ^{٦}$

$(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$ مثال: $(أ^{٢} ب)^{٣} = أ^{٦} ب^{٣}$

القوة التى أسّها صفر تساوى ١ .

القوة ن السالبة تساوى القوة ن للمقلوب.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $١٠^{٠}$ (ب) $٢^{-٣}$ (جـ) $(٠,٢)^{-٢}$

٢ ليكن أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ ثم أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $أ^{-٥} \times أ^{٨}$ (ب) $أ^{٥} \div أ^{-٣}$

(جـ) $(أ^{-١} ب)^{٢}$ (د) $(٢٢)^{٣} \div ٢^{-٢} \times ٢^{-٣}$

طريقة الحل

١ **(أ)** $١٠^{٠} = ١$

(ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٢^{٣}$

$= \frac{١}{٨}$

(ج) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{-٢} = (٠,٢)^{-٢}$

$= ٥^{٢}$

$= ٢٥$

٢ **(أ)** $أ^{-٥} \times أ^{٨} = أ^{-٥+٨}$

$= أ^{٣}$

(ب) $أ^{٥} \div أ^{-٣} = أ^{٥-(-٣)}$

$= أ^{٨}$

(ج) $(أ^{-١} ب)^{٢} = أ^{-٢} ب^{٢}$

$= \left(\frac{١}{أ}\right)^{٢} ب^{٢}$

$= \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$

(د) $(٢^{٢})^{٣} \div ٢^{-٢} \times ٢^{-٣}$

$= ٢^{٦} \div ٢^{-٢} \times ٢^{-٣}$

$= ٢^{٦-(-٢)+(-٣)}$

$= ٢^{٥}$

$= ٣٢$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٥^{٠}$ (ب) $٣^{-٢}$ (ج) $(٠,٢٥)^{-٢}$

٢ ليكن $أ \neq ٠$، $ب \neq ٠$ ثم أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $أ^{٥} \times أ^{٤}$ (ب) $أ^{٣} \div أ^{-٢}$

(ج) $(أ^{-٢} ب^{٤})^{-١}$ (د) $٢^{٣} \times ٢^{-٧}$

(هـ) $٥^{-٤} \div ٥^{-٦}$ (و) $(أ^{٣} ب^{-١})^{٣} \times (أ^{٢} ب^{-٣})^{-٢}$

(ز) $٤^{-٥} \times ٤^{٢} \div ٤^{-٢}$ (ح) $٢^{٤} \div (٢^{-١})^{٣} \times ٢^{-٢}$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٣^{٠}$ (ب) $١١^{٠}$

(ج) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠}$ (د) $٤^{-٣}$

(هـ) $٥^{-٣}$ (و) $٦^{-٢}$

(ز) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-٣}$ (ح) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{-٢}$

(ط) $(٠,٠٤)^{-٢}$

القوة التى أسّها صفر تساوى ١.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ من الفرع (هـ) إلى الفرع (ح) ثم ناقِشوا الإجابة.

القوة – هى مكعّب المقلوب.

حوّل الكسور العشرية إلى كسور اعتيادية قبل الحساب.

اجمع الأُسّين عند الضرب.

اطرح الأُسّين عند القسمة.

٢ ليكن أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ ثم أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $أ^{٢} \times أ^{٤}$

(ب) $أ^{-٢} \times أ^{٥}$

(جـ) $أ^{-٣} \times أ^{-٤}$

(د) $أ^{٣} \div أ^{٥}$

(هـ) $أ^{٨} \div أ^{-٣}$

(و) $أ^{-٦} \div أ^{-٢}$

(ز) $(أ^{-١})^{٣}$

(ح) $(أ^{٣} ب^{٤})^{-٢}$

(ط) $(أ^{-٣} ب^{٢})^{-٣}$

(ي) $٣^{٥} \times ٣^{-٣}$

(ك) $٤^{٤} \times ٤^{-٣}$

(ل) $٥^{٥} \times ٥^{-٥}$

٣ ليكن أ ≠ ٠، ب ≠ ٠ ثم أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $٥^{٤} \div ٥^{٢}$

(ب) $٣^{٢} \div ٣^{-٣}$

(جـ) $٢^{-٤} \div ٢^{-٥}$

(د) $(أ^{-٢} ب)^{٣} \times (أ^{٢} ب^{-١})^{٢}$

(هـ) $(أ^{-٣} ب)^{-٣} \times (أ^{٤} ب^{٢})^{-٢}$

(و) $(٢أ^{٣} ب^{-١})^{٣} \times (-٣أ ب^{-٢})^{-٣}$

(ز) $٣^{٢٣} \times ٣^{-١} \div ٣^{٣}$

(ح) $٥^{-٤} \times ٥^{٥} \div ٥^{-٢}$

(ط) $٢^{٤} \times ٢^{-٨} \div ٢^{-٦}$

(ي) $٥^{٣} \times (٥^{-٢})^{٢} \div ٥^{-٤}$

(ك) $٣^{٥} \div (٣^{-٢})^{-٣} \times ٣$

(ل) $\left(\frac{أ}{٢}\right)^{٣} \times أ^{-٤} \div (٢أ)^{-٢}$

★ التحدّي

ليكن أ ≠ ٠، ب ≠ ٠. بسّط المقدار الآتى تبسيطًا تامًّا، واكتب إجابتك بأسس موجبة فقط:

$$\frac{\left(\frac{٢أ^{٢}}{ب^{-٣}}\right)^{-٢} \times \left(٤أ^{-٣} ب^{٢}\right)^{٣} \div \left(\frac{أ}{٢ب}\right)^{-٤}}{أ^{-٢} ب^{٢}}$$

٦-٢
الرياضيات

الجذور

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

ربط مفهوم الجذر بمفهوم الأُسّ فى المقادير الرياضية.

لاحِظ!

إذا كانت ن عددًا صحيحًا، فالعدد الذى قوّته ن تساوى أ يسمّى **الجذر** ن للعدد أ.

والجذر الثانى والجذر الثالث ... للعدد أ تسمّى جميعها **جذور** أ.

مثال: ∵ $٢^{٣} = ٨$ ∴ العدد ٢ هو الجذر الثالث للعدد ٨.

إذا كان أ > ٠، فإن الجذر النونى الموجب للعدد أ يكتب $\sqrt[ن]{أ}$.
(غير أنه إذا كانت ن = ٢ اختُصرت إلى $\sqrt{أ}$).

برفع الطرفين للقوة ن يزول الجذر.

$$(\sqrt[ن]{أ})^{ن} = أ \quad ، \quad \sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$$

$$\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ ب}$$

خواصّ الجذور: إذا كان أ > ٠، ب > ٠، وليكن م، ن عددين صحيحين موجبين.

$$\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ ب} \quad ، \quad \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$$

$$(\sqrt[ن]{أ})^{م} = \sqrt[ن]{أ^{م}} \quad ، \quad \sqrt[ن]{\sqrt[م]{أ}} = \sqrt[ن م]{أ}$$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $\sqrt[٣]{٦٤}$ (ب) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٢٧}}$

٢ أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $\sqrt[٣]{١٢} \times \sqrt[٣]{١٨}$ (ب) $\frac{\sqrt[٣]{٣٥٠}}{\sqrt[٣]{٣}}$ (جـ) $(\sqrt[٦]{٨})^{٢}$

(د) $\sqrt[٣]{\sqrt{٧٢٩}}$ (هـ) $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢}$

طريقة الحل

١ **(أ)** $\sqrt[٣]{٦٤}$

$= \sqrt[٣]{٦٢}$

$= \sqrt[٣]{٣(٢٢)}$

$= ٢^{٢}$

$= ٤$

حلّل العدد الذى داخل الجذر إلى عوامله الأولية.

(ب) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٢٧}}$

$= \sqrt[٣]{\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣}}$

$= \frac{١}{٣}$

ابحث عن المكعّبات الكاملة.

٢ **(أ)** $\sqrt[٣]{٣٢} \times \sqrt[٣]{٣٢٣}$

$= \sqrt[٣]{٣٣ \times ٣٢}$

$= ٦$

(ب) $\frac{\sqrt[٣]{٣٥٠}}{\sqrt[٣]{٣}}$

$= \sqrt[٣]{\frac{٣٥٠}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{١٢٥}$

$= \sqrt[٣]{٣٥}$

$= ٥$

$\sqrt[ن]{أ^{ن}} = أ$

(جـ) $(\sqrt[٦]{٨})^{٢}$

$= (\sqrt[٦]{٣٢})^{٢}$

$= \sqrt[٦]{٢ \times ٣٢}$

$= \sqrt[٦]{٦٢}$

$= ٢$

(د) $\sqrt[٣]{٧٢٩}$

$= \sqrt[٢ \times ٣]{٧٢٩}$

$= \sqrt[٦]{٧٢٩}$

$= \sqrt[٦]{٦٣}$

$= ٣$

ابحث عن المكعّبات الكاملة.

(هـ) $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢}$

$= \sqrt[٣]{٢ \times ٣٣} - \sqrt[٣]{٢ \times ٣٢} + \sqrt[٣]{٢}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} - ٢\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢}$

$= ٢\sqrt[٣]{٢}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $\sqrt[٤]{٨١}$

(ب) $\sqrt[٤]{\frac{١}{١٦}}$

٢ أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $\sqrt[٤]{٨} \times \sqrt[٤]{٣٢}$

(ب) $\frac{\sqrt[٤]{٤٨}}{\sqrt[٤]{٣}}$

(جـ) $(\sqrt[٦]{١٠٠})^{٣}$

(د) $\sqrt[٣]{\sqrt{٦٤}}$

(هـ) $\sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٢٤}$

استخدم التحليل إلى العوامل الأولية.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (د) و(هـ) من السؤال ٢ ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيم الآتية.

(أ) $\sqrt[٣]{٢١٦}$ (ب) $\sqrt[٤]{٦٢٥}$ (جـ) $\sqrt[٥]{٢٤٣}$

(د) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٦٤}}$ (هـ) $\sqrt[٣]{\frac{١}{١٢٥}}$ (و) $\sqrt[٤]{\frac{١}{٨١}}$

(ز) $\sqrt[٣]{١}$ (ح) $\sqrt[٥]{١٠٠٠٠٠}$ (ط) $\sqrt[٤]{\frac{١}{١٠٠٠٠}}$

٢ أوجد ناتج كلّ مما يأتى.

(أ) $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٤}$ (ب) $\sqrt[٣]{٣٢} \times \sqrt[٣]{٢}$ (جـ) $\sqrt[٤]{٢٧} \times \sqrt[٤]{٢٤٣}$

(د) $\frac{\sqrt[٣]{٨١}}{\sqrt[٣]{٣}}$ (هـ) $\frac{\sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{١٢٨}}$ (و) $\frac{\sqrt[٣]{٥}}{\sqrt[٣]{٦٢٥}}$

(ز) $(\sqrt[٤]{٤٩})^{٢}$ (ح) $(\sqrt[٦]{٣٧})^{٢}$ (ط) $(\sqrt[٨]{١٦})^{٤}$

(ى) $\sqrt[٣]{\sqrt[٣]{١٢٣}}$ (ك) $\sqrt[٥]{١٠٢٤}$ (ل) $\sqrt[٣]{\sqrt[٣]{٧٢٩}}$

(م) $\sqrt[٣]{٣٢} + \sqrt[٣]{٨١} - ٤\sqrt[٣]{٣}$ (ن) $\sqrt[٤]{٣٢} + \sqrt[٤]{٢} - \sqrt[٤]{١٦٢}$

(س) $\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٥٤}$

★ التحدّي

أوجد ناتج ما يأتى:

$$\sqrt[٣]{\sqrt[٤]{٤٠٩٦}} \div \sqrt[٦]{٤٠٩٦}$$

استخدم التحليل إلى العوامل الأولية.

$\sqrt[ن]{أ^{ك} \times ب} = أ\sqrt[ن]{ب}$

الحدود التى لها الجذر نفسه يمكن جمعها.

٦-٣ قوانين الأسس الكسرية (١)

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات

نواتج التعلّم

تطبيق قوانين الأسس الكسرية فى تبسيط المقادير الجبرية المركّبة.

لاحِظ!

إذا كان أ > ٠ وكان م، ن عددين صحيحين موجبين، فإن:

$$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$$ مثال: $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$

$$أ^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م}$$ مثال: $أ^{\frac{٣}{٤}} = \left(\sqrt[٤]{أ}\right)^{٣}$

$$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$$ مثال: $أ^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{أ^{٢}}$

تصحّ قوانين الأسس أيضًا إذا كانت الأسس كسورًا. ليكن أ > ٠، وم، ن كسرين.

$$\left(أ^{م}\right)^{ن} = أ^{مﻥ}$$ مثال: $\left(أ^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{٣}{٥}} = أ^{\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٥}} = أ^{\frac{٣}{١٠}}$

$$\left(\frac{١}{أ}\right)^{ن} = \frac{١}{أ^{ن}} = أ^{-ن}$$ مثال: $\frac{١}{أ^{\frac{١}{٥}}} = أ^{-\frac{١}{٥}}$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب المقادير الآتية فى الصورة $أ^{ل}$

(أ) $\sqrt[٥]{أ}$ (ب) $\sqrt[٤٠]{أ}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt[٣٣٠]{أ}}$

٢ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٢٧^{\frac{٢}{٣}}$ (ب) $٦٤^{-\frac{٣}{٢}}$

(جـ) $\left(\frac{٢٥}{٤}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$ (د) $\left[\left(\frac{١٦}{٩}\right)^{-\frac{٣}{٤}}\right]^{\frac{٢}{٣}}$

طريقة الحل

١ (أ) $\sqrt[٥]{٧}$

$= ٧^{\frac{١}{٥}}$

(ب) $\sqrt[٤٢]{٧^{٥}}$

$= ٧^{\frac{٥}{٤٢}}$

(ج) $\frac{١}{\sqrt[٣٣]{٧^{٥}}}$

$= \frac{١}{٧^{\frac{٥}{٣٣}}}$

$= ٧^{-\frac{٥}{٣٣}}$

٢ (أ) $٢٧^{\frac{٢}{٣}}$

$= (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}}$

$= ٣^{٣\times\frac{٢}{٣}}$

$= ٣^{٢}$

$= ٩$

(ب) $٦٤^{-\frac{٣}{٢}}$

$= (٢^{٦})^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٢^{٦\times(-\frac{٣}{٢})}$

$= ٢^{-٩}$

(ج) $\left(\frac{٢٥}{٤}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

$= \left[\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢}\right]^{-\frac{٣}{٢}}$

$= \left(\frac{٥}{٢}\right)^{-٣}$

$= \frac{٨}{١٢٥}$

(د) $\left[\left(\frac{١٦}{٩}\right)^{-\frac{٣}{٤}}\right]^{\frac{٢}{٣}}$

$= \left[\left[\left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢}\right]^{-\frac{٣}{٤}}\right]^{\frac{٢}{٣}}$

$= \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢\times(-\frac{٣}{٤})\times\frac{٢}{٣}}$

$= \left(\frac{٤}{٣}\right)^{-١}$

$= \frac{٣}{٤}$

$\sqrt[ل]{أ^{٢}} = \sqrt[ل]{أ}^{٢}$

اكتب الجذر فى الصورة $أ^{\frac{١}{ل}}$

$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

حلّل الأساس إلى عوامله الأولية ليصغر.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب المقادير الآتية فى الصورة $أ^{ل}$

(أ) $\sqrt{أ}$ (ب) $\sqrt[٣]{أ^{٥}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt[٣]{أ^{٢}}}$

٢ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٨١^{\frac{٣}{٤}}$ (ب) $١٦^{-\frac{٣}{٤}}$

(جـ) $\left(\frac{٢٥}{٦٤}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$ (د) $\left[\frac{١}{٢}\left(\frac{٢٧}{١٢٥}\right)\right]^{-\frac{٤}{٣}}$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب المقادير الآتية فى الصورة $أ^{ل}$

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٦}$ (جـ) $\sqrt{٧}$

(د) $\sqrt[٤]{أ^{٣}}$ (هـ) $\sqrt[٦]{أ^{٥}}$ (و) $\sqrt[٣]{٢^{٢}}$

(ز) $\frac{١}{\sqrt{أ}}$ (ح) $\frac{١}{\sqrt[٣]{أ^{٢}}}$ (ط) $\frac{١}{\sqrt[٣]{٥^{٢}}}$

٢ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٢٥^{\frac{٣}{٢}}$ (ب) $١٦^{\frac{٣}{٤}}$ (جـ) $٦٤^{\frac{٢}{٣}}$

(د) $٩^{-\frac{٣}{٢}}$ (هـ) $١٢٥^{-\frac{٢}{٣}}$ (و) $٨١^{-\frac{٣}{٤}}$

(ز) $\left(\frac{١}{٨}\right)^{-\frac{١}{٣}}$ (ح) $\left(\frac{١٢٥}{٨}\right)^{-\frac{٢}{٣}}$ (ط) $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{-\frac{٣}{٤}}$

(ي) $\left[\left(\frac{١}{٢٥}\right)^{\frac{٢}{٥}}\right]^{-\frac{٥}{٤}}$ (ك) $\left[\left(\frac{٨١}{١٠٠}\right)^{-\frac{٣}{٤}}\right]^{\frac{٢}{٣}}$ (ل) $\left[\left(\frac{٦٤}{٢٧}\right)^{-\frac{٤}{٣}}\right]^{-\frac{١}{٣}}$

★ التحدّي

بسّط المقدار الآتى تبسيطًا تامًّا، واكتب إجابتك كسرًا فى أبسط صورة:

$$\left(\frac{٧}{١٥}\left(\frac{٢}{٣}^{-}\left(\frac{١٠٠٠}{٢٧}\right)\right)\right)^{-\frac{١٥}{١٤}}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ من «تدريب» ثم ناقِشوا الإجابة.

٦-٤
الرياضيات

قوانين الأسس الكسرية (٢)

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

تطبيق قوانين الأسس الكسرية فى تبسيط المقادير الجبرية المركّبة.

لاحِظ!

تصحّ قوانين الأسس أيضًا إذا كانت الأسس كسورًا.

ليكن أ > ٠، ب > ٠، وليكن م، ن كسرين.

$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ $\quad أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$ $\quad (أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

استعد

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتى.

(أ) $٢^{\frac{٢}{٣}} \times ٢^{\frac{١}{٢}} \div ٢^{\frac{٧}{٦}}$ (ب) $٦^{\frac{١}{٢}} \times ٣٦^{\frac{١}{٤}}$

(جـ) $\sqrt[٣]{٦} \times \sqrt{٦} \times \sqrt[١٠]{٦}$ (د) $\sqrt{٣} \div \sqrt[١٠]{٣٢} \times \sqrt[٣]{١٦}$

طريقة الحل

(أ) $٢^{\frac{٢}{٣}} \times ٢^{\frac{١}{٢}} \div ٢^{\frac{٧}{٦}}$

وحّد الأساسات.

$= ٢^{\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٢}-\frac{٧}{٦}}$

$= ٢^{\frac{٤+٣-٧}{٦}}$

$= ٢^{٠}$

$= ١$

(ب) $٦^{\frac{١}{٢}} \times ٣٦^{\frac{١}{٤}}$

$= ٦^{\frac{١}{٢}} \times (٦^{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$= ٦^{\frac{١}{٢}} \times ٦^{\frac{١}{٢}}$

$= ٦^{١}$

$= ٦$

(جـ) $\sqrt[٣]{٦} \times \sqrt{٦} \times \sqrt[١٠]{٦}$

اكتبه فى الصورة $أ^{ل}$

$= ٦^{\frac{١}{٣}} \times ٦^{\frac{١}{٢}} \times ٦^{\frac{١}{٦}}$

$= ٦^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٢}+\frac{١}{٦}}$

$= ٦^{١}$

$= ٦$

(د) $\sqrt[٣]{\sqrt[٦]{٣٢} \times \sqrt[٢]{١٦}} \div$

$= ٢^{\frac{١}{٣}} \div ٣٢^{\frac{١}{٦}} \times ١٦^{\frac{١}{٣}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}} \div \left(٢^{٥}\right)^{\frac{١}{٦}} \times \left(٢^{٤}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}} \div ٢^{\frac{٥}{٦}} \times ٢^{\frac{٤}{٣}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}-\frac{٥}{٦}+\frac{٤}{٣}}$

$= ٢^{١}$

$= ٢$

اكتبه فى الصورة أ^ر

وحّد الأساسات.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد ناتج كلّ ممّا يأتى.

(أ) $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٣}} \div ٥^{-\frac{١}{٦}}$

(ب) $٢^{\frac{٥}{٦}} \times ٢^{\frac{٤}{٣}}$

(جـ) $\sqrt[٦]{٧} \times \sqrt[٣]{٧} \times \sqrt{٧}$

(د) $\sqrt[٤]{٢٧} \times \sqrt{٢٧} \div \sqrt[٤]{٣}$

٢ ليكن أ > ٠، ب > ٠، ثم أوجد ناتج كلّ ممّا يأتى.

(أ) $\sqrt[٦]{أ^{٥}} \div \sqrt[٣]{أ} \div \sqrt[٣]{أ^{٣}}$

(ب) $\left(أ \sqrt[٣]{أ}\right)^{\frac{١}{٢}} \div \sqrt[٦]{\frac{أ^{٢}}{ب^{٣}}}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ من «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد ناتج كلّ ممّا يأتى.

(أ) $٢^{-\frac{١}{٢}} \times ٢^{\frac{٥}{٦}} \div ٢^{\frac{١}{٣}}$

(ب) $٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٣^{\frac{٤}{٣}} \div ٣^{\frac{٥}{٦}}$

(جـ) $٥^{-\frac{١}{٦}} \times ٥^{\frac{٢}{٣}} \div ٥^{-\frac{١}{٢}}$

(د) $٩^{\frac{١}{٣}} \times ٣^{\frac{٤}{٣}}$

(هـ) $١٢٥^{\frac{١}{٤}} \div ٥^{\frac{١}{٤}}$

(و) $٨^{\frac{١}{٢}} \times ٦٤^{\frac{١}{٦}} \div ١٦^{\frac{١}{٨}}$

(ز) $\sqrt[٦]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٦]{٥}$

(ح) $\sqrt[٣]{٣٣} \times \sqrt{٣} \div \sqrt[٦]{٣}$

(ط) $\sqrt[٣]{٢} \times ٢٢ \div \sqrt[٣]{٣٢} \times \sqrt[٦]{٣}$

(ي) $\sqrt{٢} \times \sqrt[٦]{٢} \div \sqrt[٣]{٤}$

(ك) $\sqrt[٣]{١٦} \times ٤ \div \sqrt[٣]{٢}$

(ل) $\sqrt[٦]{٢٧} \times \sqrt[٨]{٨١} \div \sqrt[٣]{٩}$

٢ ليكن أ > ٠، ب > ٠، ثم أوجد ناتج كلّ ممّا يأتى.

(أ) $\sqrt{أ} \div \sqrt[٣]{أ^{٣}} \times \sqrt[٤]{أ^{٣}}$

(ب) $\sqrt[٦]{أ^{٤}} \times أ^{٢} \div \sqrt[٣]{أ^{٣}}$

(ج) $\sqrt[٣]{أ^{٣}} \div \sqrt[٦]{أ} \times \sqrt{أ^{٧}}$

(د) $\left(\sqrt[٣]{أب}\right)^{٢} \div \left(\sqrt[٦]{أب}\right)^{٢} \times \sqrt{أب}$

(هـ) $\sqrt{أب^{٣}} \times \sqrt[٣]{أب^{٢}} \div \left(\sqrt{أ^{٢}ب^{٤}}\right)^{\frac{١}{٣}}$

(و) $\left(\sqrt[٦]{أ}\right)^{٢} \times \sqrt[٣]{\frac{أ}{ب}} \div \sqrt{\frac{ب}{أ^{٣}}}$

★ التحدّي

بسّط المقدار الآتى تبسيطًا تامًّا، واكتب إجابتك كسرًا فى أبسط صورة:

$$\left(\frac{\left(\frac{٢٤٣}{٣٣}\right)^{-\frac{٢}{٥}} \times \left(\frac{٩}{٤}\right)^{-١}}{\left(\frac{١٢٥}{٦٤}\right)^{\frac{١}{٣}} \times \left(\frac{١}{٢٥٠}\right)^{-\frac{١}{٢}}}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$$

تأمّل

تأمّل العبارة الرياضية الآتية:

لكل عدد حقيقى أ، $\sqrt{أ^{٢}} = أ$.

هل هذه العبارة صحيحة دائمًا، أم أحيانًا، أم لا تصحّ أبدًا؟ ادعم إجابتك بتبرير رياضى محكم أو بمثال مضادّ، مستخدمًا قيمًا موجبة وسالبة للعدد أ.

٦-٥
الرياضيات

الدوال الأسّية

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

تمثيل الدالة الأسّية بيانيًا، واستنتاج خواصها (المجال، والمدى، وخطوط التقارب، والتزايد والتناقص).

المفهوم ٢ · الدوال الأسّية وتطبيقاتها



فى تقنيات المال الحديثة، ترصد خوارزميات آلية نموّ قيم الأصول لحظةً بلحظة. فحين تتراكم أرباح أصل رقمى مرتفع العائد أو محفظة استثمار صغيرة، تُحسب الفائدة على الرصيد كلّه لا على الوديعة الأولى وحدها. وبهذا التراكم يتضخّم رأس المال تضخّمًا سريعًا مع الزمن.

وعلى العكس، حين تنهش الرسوم أو التضخّم القوّة الشرائية لمالٍ محفوظ فى حساب تقليدى، تنقص قيمته بنسبة مئوية ثابتة على فترات منتظمة؛ فالمحفظة لا تفقد مبلغًا ثابتًا كل يوم، بل تفقد كسرًا ثابتًا ممّا بقى منها. ونمذجة هذه الحركات المالية تتجاوز معدّلات التغيّر الخطية إلى عمليات يحدّد فيها المتغيّر المستقلّ معدّل التغيّر نفسه.

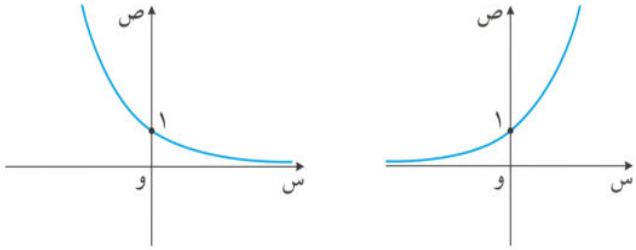
السؤال الموجّه: كيف يحدّد الأساس أ فى الدالة الأسّية ص = أ^س أن المال ينمو بالتراكم (حيث أ > ١) أم يتضاءل (حيث ٠ < أ < ١)؟ وكيف نوجد النقطة التى يتعادل عندها النموّ والتضاؤل؟

لاحظ!

- ص = أ^س (حيث أ > ٠، أ ≠ ١) تسمّى **الدالة الأسّية** فى س التى أساسها أ.
- لمنحنى الدالة ص = أ^س (حيث أ > ٠، أ ≠ ١) شكلان.

· إذا كان أ > ١، فالدالة متزايدة تمامًا.

· إذا كان ٠ < أ < ١، فالدالة متناقصة تمامًا.



- لرسم منحنى الدالة الأسّية، عيّن النقاط الثلاث عند س = −١، ٠، ١ ثم ارسم المنحنى.

وفى الحالتين:

· المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الموجبة.

· محور س خطّ تقارب أفقى.

ص > ٠

استعد

ارسم منحنيات الدوال الآتية.

(أ) ص = ٣^س

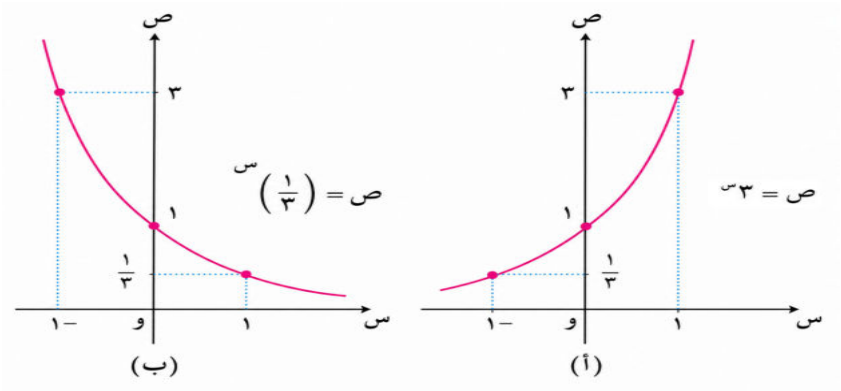
(ب) ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) ثم ناقِشوا الإجابة.

طريقة الحل

نعيّن النقاط الثلاث عند س = –١، ٠، ١ ثم نرسم المنحنى.



حاول

ارسم منحنيات الدوال الآتية.

(أ) ص = ٢^س

(ب) ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

ارسم المنحنى بحيث لا يقطع محور س

تدريب

ارسم منحنيات الدوال الآتية.

(أ) ص = ٤^س

(ب) ص = ١٠^س

(جـ) ص = $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{س}$

(د) ص = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س}$

(هـ) ص = $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{س}$

(و) ص = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

★ التحدّي

ارسم منحنى الدالة الآتية:

ص = $\pi^{س}$، حيث –١ ≤ س ≤ ٢

٦-٦ المقارنة بين القوى والجذور

الرياضيات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

المقارنة بين القوى والجذور بتطبيق قوانين الأسس.

لاحِظ!

المقارنة بين القوى والجذور.

إذا كان أ > ١، ر > س، فإن $أ^{ر} > أ^{س}$

مثال: ∵ ٣ > ٥ ∴ $٢^{٣} > ٢^{٥}$

إذا كان ٠ < أ < ١، ر > س، فإن $أ^{ر} < أ^{س}$

مثال: ∵ ٣ > ٥ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} < \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$

إذا اختلف الأساسان فوحّدهما.

إذا كان الأساس أكبر من ١، فترتيب القوتين **كترتيب** الأسس.

إذا كان الأساس أصغر من ١، فترتيب القوتين **عكس** ترتيب الأسس.

إذا كان الأساس بين ٠، ١، انعكست علامة المتباينة بين الأسين.

إذا كان الأساس أكبر من ١، بقيت علامة المتباينة بين الأسين كما هى.

استعد

رتّب الأعداد الآتية مستخدمًا علامات المتباينة.

(أ) $\left(\frac{٧}{١٠}\right)^{٢}$ ، $\left(\frac{٧}{١٠}\right)^{-٣}$ ، $\left(\frac{٧}{١٠}\right)^{-١}$

(ب) $\sqrt[٥]{٨}$ ، $\sqrt[٨]{٦٤}$ ، $\sqrt[٦]{١٦}$

طريقة الحل

(أ) ∵ الأساس $\frac{٧}{١٠}$ أصغر من ١

وبالنظر فى الأسس، حيث −٣ < −١ < ٢،

$\left(\frac{٧}{١٠}\right)^{-٣} > \left(\frac{٧}{١٠}\right)^{-١} > \left(\frac{٧}{١٠}\right)^{٢}$

(ب) اكتب كل عدد فى الصورة $أ^{ل}$، ثم وحّد الأساس.

$\sqrt[٥]{٨} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢^{\frac{٣}{٥}}$

$\sqrt[٨]{٦٤} = \sqrt[٨]{٦٢} = ٢^{\frac{٣}{٤}}$

$\sqrt[٦]{١٦} = \sqrt[٦]{٤٢} = ٢^{\frac{٢}{٣}}$

∵ الأساس ٢ أكبر من ١

وبالنظر فى الأسس، $\frac{٣}{٥} < \frac{٢}{٣} < \frac{٣}{٤}$

$٢^{\frac{٣}{٥}} < ٢^{\frac{٢}{٣}} < ٢^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $\sqrt[٥]{٨} < \sqrt[٦]{١٦} < \sqrt[٨]{٦٤}$

حاول

رتّب الأعداد الآتية مستخدمًا علامات المتباينة.

(أ) $٥^{\frac{٢}{٣}}$ ، $٥^{-٤}$ ، $٥^{٠}$ (ب) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٧}$ ، $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ ، $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-٥}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$

تدريب

رتّب الأعداد الآتية مستخدمًا علامات المتباينة.

(أ) $٢^{\frac{١}{٢}}$ ، $٢^{٥}$ ، $٢^{-٢}$ (ب) $٣^{\frac{١}{٥}}$ ، $٣^{٢}$ ، $٣^{-\frac{٣}{٥}}$ (جـ) $٧^{\frac{١}{٤}}$ ، $٧^{\frac{٣}{١٠}}$ ، $٧^{-١}$

(د) $\left(\frac{٩}{١٠}\right)^{٣}$ ، $\left(\frac{٩}{١٠}\right)^{-٣}$ ، $\left(\frac{٩}{١٠}\right)^{٢}$ (هـ) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{\frac{١}{١٠}}$ ، $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{٤}$ ، $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{-٣}$ (و) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ ، $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣}$ ، $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

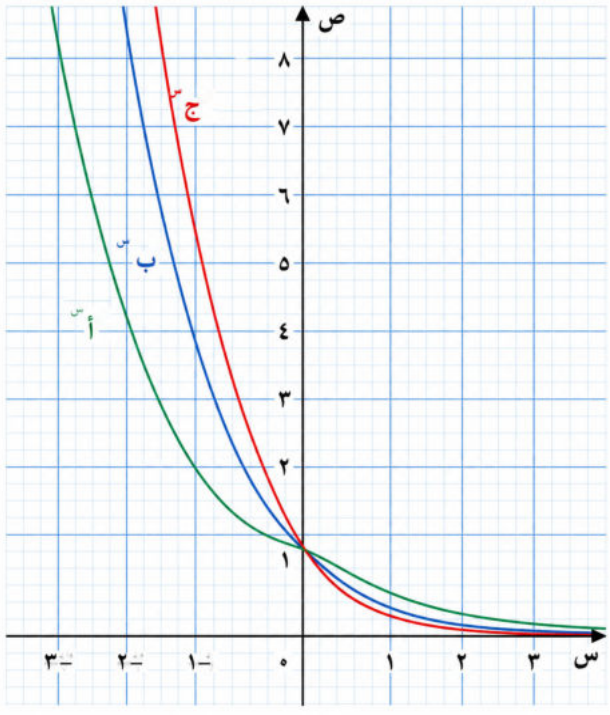
(ز) $\sqrt[٢]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{١٦}$ ، $\sqrt[٧]{١٢٨}$ (ح) $\sqrt[٥]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٥}$ ، $\sqrt[٤]{١٢٥}$ (ط) $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt[٣]{٨١}$ ، $\sqrt[٤]{٢٤٣}$

★ التحدّي

رتّب الأعداد الثلاثة الآتية مستخدمًا علامات المتباينة.

(أ) $\left(\sqrt[٣]{٢}\right)^{٥}$ ، $\left(\sqrt[٣]{٤}\right)^{٣}$ ، $\left(\sqrt[٤]{٨}\right)^{٢}$

(ب) قارن بين أ، ب، جـ من الشكل الآتي.



تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٦-٧ المعادلات والمتباينات الأُسّية (١)

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات

لاحِظ!

خطوات حلّ المعادلات والمتباينات الأُسّية.

١ وحّد الأساس باختيار عدد أكبر من ١.

٢ كوّن معادلة أو متباينة فى الأسس ثم حلّها.

وفى المتباينات، اذكر أولًا أن الأساس أكبر من ١ ثم كوّنها.

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات الأُسّية التى تُردّ إلى أساس واحد أو تحتاج إلى تحليل جبرى.

توحيد الأساس بعدد أكبر من ١ أقلّ عرضة للخطأ.

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٤^{س-١} = ٨^{س+٣}$

(ب) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س} = ٨١$

(جـ) $٧^{س} = \sqrt[٧]{٧}$

(د) $٢^{٢س-١} \leq ١$

(هـ) $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س} > \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

(و) $\left(\sqrt[٢]{٢}\right)^{س} \leq ٨$

طريقة الحل

(أ) $٤^{س-١} = ٨^{س+٣}$

$(٢^{٢})^{س-١} = (٣^{٢})^{س+٣}$

$٢^{٢(س-١)} = ٣^{٢(س+٣)}$

$\therefore ٢(س-١) = ٣(س+٣)$

وبالحلّ نجد س $= -١١$

(جـ) $٧^{س} = \sqrt[٧]{٧}$

$٧^{س} = ٧ \times ٧^{\frac{١}{٢}}$

$٧^{س} = ٧^{١+\frac{١}{٢}}$

$٧^{س} = ٧^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore س = \frac{٣}{٢}$

(ب) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س} = ٨١$

$٣^{-س} = ٣^{٤}$

$\therefore -س = ٤$

وبالحلّ نجد س $= -٤$

(د) $٢^{٢س-١} \leq ١$

$٢^{٢س-١} \leq ٢^{٠}$

∵ الأساس ٢ أكبر من ١

$\therefore ٢س - ١ \leq ٠$

وبالحلّ نجد س $\leq \frac{١}{٢}$

(هـ) $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س} < \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

$\left(\frac{١}{٣٣}\right)^{س} < \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

$٣^{-٣س} < ٣^{-(س+٤)}$

∵ الأساس ٣ أكبر من ١

$\therefore -٣س < -(س + ٤)$

وبالحلّ نجد س > ٢

(و) $\left(\sqrt{٢}\right)^{س} \leq ٨$

$\left(\frac{١}{٢^{٢}}\right)^{س} \leq ٣٢$

$٢^{-\frac{١}{٢}س} \leq ٣٢$

∵ الأساس ٢ أكبر من ١

$\therefore -\frac{١}{٢}س \leq ٣$

وبالحلّ نجد س ≤ ٦

وحّد الأساس باختيار عدد أكبر من ١

كوّن معادلة فى الأسس.

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٩^{س} = ٢٤٣$

(ب) $٥^{٣س+١} = \frac{١}{١٢٥}$

(جـ) $\sqrt{٢}^{١٦} = ٢^{٢-س}$

(د) $٣^{س} \geq ٩^{س+١}$

(هـ) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س} > \frac{١}{٦٤}$

(و) $\left(\frac{١}{٩}\right)^{س} < ٢٧$

(ز) $\sqrt[٣]{٣^{س}} \leq ٣^{س+٢}$

(ح) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س} > \sqrt[٣]{٣}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفروع (هـ) و(و) و(ز) و(ح) ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٢٥^{س} = ٥^{-٢س}$

(ب) $٢٧^{س} = ٨١$

(جـ) $٢ \times ٨^{س} = ٣٢$

(د) $٢^{٢س+٥} = \frac{١}{٦٤}$

(هـ) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س-١} = ٣٢$

(و) $٢٧^{س+١} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{-٥س}$

(ز) $٤^{س} = ٢\sqrt{٢}$

(ح) $٣^{س+١} = \sqrt{٢٧}$

(ط) $٢٥^{س} = \sqrt{٥}٥$

أخطاء شائعة

(هـ) $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س} < \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

$\left(\frac{١}{٣٣}\right)^{س} < \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣س} < \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٤}$

٣س < س + ٤

أغفلت أن الأساس بين ٠ و١،

فتنعكس علامة المتباينة.

(ي) $٤^{س} \geq ٢^{س+١}$ (ك) $٢٧^{س} > ١٩^{-س}$ (ل) $٢٥^{س} > ١٢٥^{س+١}$

(م) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} < \frac{١}{٣٢}$ (ن) $\left(\frac{١}{٩}\right)^{س} \geq \frac{١}{٢٧}$ (س) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س-٢} < \frac{١}{٦٤}$

(ع) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{س} \geq ١٢٥$ (ف) $\left(\frac{١}{٢٧}\right)^{س+١} \leq ٨١$ (ص) $\left(\frac{١}{٨}\right)^{٢س+٣} < ٣٢$

(ق) $\left(\sqrt[٥]{٥}\right)^{س} < ٢٥$ (ر) $\sqrt[س]{٢} > ٢س + ٣$ (ش) $٣^{س-٢} \leq \frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}$

(ت) $\left(\frac{١}{٩}\right)^{س} \leq \sqrt[٣]{٣}^{٢}$ (ث) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٤س+٢} \geq \sqrt[٣]{٢٧}$ (خ) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{س} > ٥^{س} \times \sqrt[٥]{٥}$

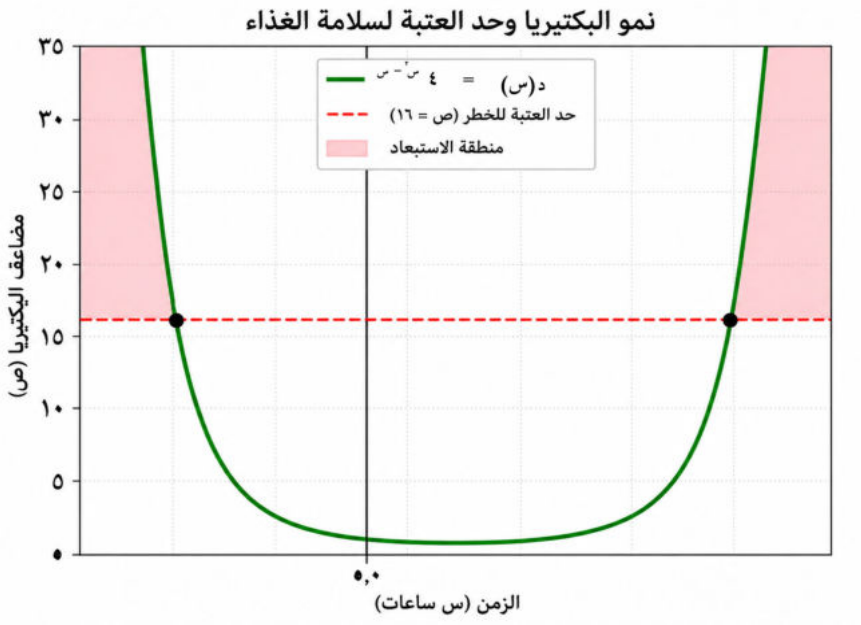
$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

★ التحدّي

يتابع مصنع غذائى آلى سرعة تكاثر البكتيريا الضارّة خارج الثلاجة. ويبدأ العدّ من مليون خلية لكل جرام. ومع مادّة مغذّية بعينها ينمو عدد البكتيريا نموًّا أُسّيًّا أُسّه مقدار تربيعى. وتقضى اشتراطات سلامة الغذاء بإعدام الدفعة إذا بلغت الكثافة ١٦ مليون خلية لكل جرام أو تجاوزتها. ويحقّق معامل النمو المتباينة الآتية

$$٤^{س^{٢}-س} < ١٦$$

(حيث س الزمن بالساعات بعد انقضاء مدّة التبريد الآمن).



كم ساعة تمضى بعد مدّة الأمان حتى يصير الطعام غير آمن فتعدم الدفعة؟

٦-٨ المعادلات والمتباينات الأُسّية (٢)

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات الأُسّية التى تُردّ إلى أساس واحد أو تحتاج إلى تحليل جبرى.

لاحِظ!

- حلّ المعادلات والمتباينات التى تحوى $أ^{٢س}$ ، $أ^{س}$ بفرض $أ^{س} = ت$.
- فيكتب $أ^{٢س}$ فى الصورة $ت^{٢}$.
- اذكر دائمًا شرط ت، فإذا فرضت $أ^{س} = ت$ فلا بدّ أن يكون $ت > ٠$.
- وأخيرًا حدّد مدى ت ثم أوجد س.

$أ^{٢س} = (أ^{س})^{٢}$

استعد

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٤^{س} - ٣ \times ٢^{س+١} - ١٦ = ٠$

(ب) $٣^{٢س+١} - ٨ \times ٣^{س} - ٣ \geq ٠$

طريقة الحل

(أ) $٤^{س} - ٣ \times ٢^{س+١} - ١٦ = ٠$

وحّد الأساس باختيار عدد أكبر من ١

$(٢^{٢})^{س} - ٣ \times (٢^{١} \times ٢^{س}) - ١٦ = ٠$

$٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} - ١٦ = ٠$

عوّض $أ^{س} = ت$

ليكن $٢^{س} = ت$، فإن $ت > ٠$ .....(١)

$ت^{٢} - ٦ت - ١٦ = ٠$

وبالحلّ نجد $ت = -٢$، $ت = ٨$

ومن (١) نجد $ت = ٨$

$\therefore ٢^{س} = ٨$

$٢^{س} = ٢^{٣}$

$\therefore س = ٣$

(ب) $٣^{٢س+١} - ٨ \times ٣^{س} - ٣ \geq ٠$

$(٣^{٢س} \times ٣^{١}) - ٨ \times ٣^{س} - ٣ \geq ٠$

$٣ \times ٣^{٢س} - ٨ \times ٣^{س} - ٣ \geq ٠$

ليكن $٣^{س} = ت$، فإن $ت > ٠$ .....(١)

$٣ت^{٢} - ٨ت - ٣ \geq ٠$

وبالحلّ نجد $-\frac{١}{٣} \geq ت \geq ٣$ .....(٢)

ومن (١) و(٢) نجد $٠ < ت \geq ٣$

∴ بما أن $٠ < ٣^{س} \geq ٣$، يكفى حلّ $٣^{س} > ٠$ و$٣^{س} \geq ٣$

وحلّ $٣^{س} > ٠$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلّها.

وبحلّ $٣^{س} \geq ٣$ نجد $س \geq ١$

∴ $س \geq ١$

وحّد الأساس باختيار عدد أكبر من ١

عوّض $أ^{س} = ت$

$أ^{س} > ٠$ لكل قيم س

حاول

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٤^{س} + ٢ \times ٤^{س} - ٣٢ = ٠$

(ب) $٩^{س} - ٢ \times ٣^{س+١} - ٢٧ = ٠$

(جـ) $٤^{س} - ٢ \times ٧^{س} - ٨ > ٠$

(د) $٤^{س+١} - ٩ \times ٢^{س} + ٢ \leq ٠$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (جـ) و(د) ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات والمتباينات الآتية.

(أ) $٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{س} - ١٨ = ٠$

(ب) $٤^{س} - ٥ \times ٢^{س} + ٤ = ٠$

(جـ) $٩^{س} + ٢ \times ٣^{س} - ١٥ = ٠$

(د) $٤^{س} + ٢^{س+١} - ٢٤ = ٠$

(هـ) $٤^{س+١} + ٧ \times ٢^{س} - ٢ = ٠$

(و) $٣^{٢س+١} - ١٠ \times ٣^{س} + ٣ = ٠$

(ز) $٤^{س} - ٣ \times ٢^{س} - ٤ \leq ٠$

(حـ) $٩^{س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ \leq ٠$

(ط) $٤^{س} - ٢^{س+١} - ٨ \geq ٠$

(ي) $٣^{٢س+١} - ٤ \times ٣^{س} + ١ > ٠$

(ك) $٣ \times ٢^{٢س+١} + ٢^{س} - ٢ < ٠$

(ل) $٩^{س+١} - ١٠ \times ٣^{س} + ١ \leq ٠$

★ التحدّي

حلّ المتباينة الآتية حلًّا كاملًا لكل قيم س الحقيقية، حيث:

$$\left(\frac{١}{٤}\right)^{س^{٢}-٢س} - ٥ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{س^{٢}-٢س} + ٤ \geq ٠$$

٦-٩
الرياضيات

القيمتان العظمى والصغرى للدوال الأسية

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

استنتاج القيمتين العظمى والصغرى للدالة الأسية فى تطبيقات النمو والتضاؤل.

لاحِظ!

- لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة تحوى $أ^{٢س}$ و$أ^{س}$، افرض $أ^{س}$ = ت ثم عاملها معاملة الدالة التربيعية.
- حدّد مدى ت من المجال، واكتبه دائمًا.

مثال: إذا كان $-٢ \leq س \leq ٣$ وفرضت $٣^{س}$ = ت، فإن $٣^{-٢} \leq ت \leq ٣^{٣}$، أى $\frac{١}{٩} \leq ت \leq ٢٧$

استعد

إذا كان $-١ \leq س \leq ٣$، فأوجد القيمتين العظمى والصغرى لـص فى الدالة $ص = ٤^{س} - ٢^{س+٢}$، ثم أوجد قيمة س عند كلٍّ منهما.

طريقة الحل

$ص = ٤^{س} - ٢^{س+٢}$

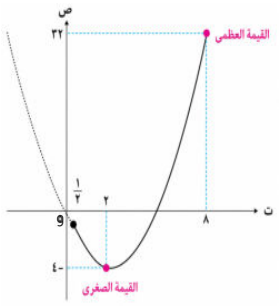
$ص = ٢^{٢س} - ٤ \times ٢^{س}$

ليكن $٢^{س}$ = ت، فيكون

$\because -١ \leq س \leq ٣ \therefore ٢^{-١} \leq ت \leq ٢^{٣}$، أى $\frac{١}{٢} \leq ت \leq ٨$

$ص = ت^{٢} - ٤ ت$

$= (ت - ٢)^{٢} - ٤$



ورأس هذا القطع المكافئ عند ت = ٢، وهو واقع فى مدى ت، فالقيمة الصغرى -٤ عند ت = ٢.

والقيمة العظمى عند طرف المدى الأبعد عن الرأس، وهو ت = ٨، فتكون ص = ٣٢.

إذا كان ت = ٨، فإن $٢^{س}$ = ٨، ومنه س = ٣

إذا كان ت = ٢، فإن $٢^{س}$ = ٢، ومنه س = ١

∴ القيمة العظمى ٣٢ عند س = ٣، والقيمة الصغرى -٤ عند س = ١

حدّد مدى ت من المجال.

لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة تربيعية، أكمل المربع.

القيمة الصغرى عند رأس القطع المكافئ إن وقع فى المدى، والعظمى عند طرف المدى الأبعد عن الرأس.

حاول

إذا كان $-١ \geq$ س ≥ ٢، فأوجد القيمتين العظمى والصغرى لـص فى الدالة
ص $= -٩^{س} + ٢ \times ٣^{س} + ٢$، ثم أوجد قيمة س عند كلٍّ منهما.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $-٣ \geq$ س ≥ ٢، فأوجد القيمتين العظمى والصغرى لـص فى الدالة
ص $= ٢ \times ٩^{س} - ١٢ \times ٣^{س} + ٧$، ثم أوجد قيمة س عند كلٍّ منهما.

٢ إذا كان $-١ \geq$ س ≥ ٣، فأوجد القيمتين العظمى والصغرى لـص فى الدالة
ص $= -٤^{س} + ٢^{س+٢} - ٣$، ثم أوجد قيمة س عند كلٍّ منهما.

٣ إذا كان $-١ \geq$ س ≥ ٢، فأوجد القيمتين العظمى والصغرى لـص فى الدالة
ص $= ٢ \times ٤^{س} - ٢^{س+٢} + ١١$، ثم أوجد قيمة س عند كلٍّ منهما.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّي

يستخدم مركز بيانات صديق للبيئة بنك بطاريات ذكيًّا؛ ليضبط تكلفة الطاقة فى ساعات الذروة. وتؤثر حرارة تشغيل الخوادم فى المقاومة الداخلية للخلايا. وتعطى تكلفة تشغيل نظام التبريد فى الساعة (بالدولار) بالدالة الآتية:

$$ص = ٢ \times (٤)^{س} - ٢^{س+٢} + ١١$$

(حيث س معامل انحراف كفاءة النظام). وتقصر ضوابط الأمان البرمجية انحراف النظام على الفترة $-١ \geq$ س ≥ ٢؛ لحدود الأمان الميكانيكية للعتاد. أوجد التكلفة العظمى المطلقة والتكلفة الصغرى المطلقة فى الساعة داخل فترة التشغيل الآمن، وقيمة س عند كلٍّ منهما.

تأمّل

تأمّل الدالتين الأسيتين الآتيتين:

$$د(س) = أ^{س} \text{ وهـ}(س) = \left(\frac{١}{أ}\right)^{س} \text{ (حيث } أ > ١)$$

فإذا فرضت الدالة ف(س) = د(س) + هـ(س)، فادرس خواصها الجبرية؛ لتبيّن هل هى متزايدة أو متناقصة على مجالها كلّه من الأعداد الحقيقية أم لا. ثم استنتج من سلوكها قيمتها الصغرى المطلقة.

٦-١٠ الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

التعرّف على مفهوم اللوغاريتم.
والتحويل بين الصورة الأسّية
والصورة اللوغاريتمية.

المفهوم ٣ · مقدمة اللوغاريتمات وخواصها



لا يستجيب الإحساس البشرى استجابة خطية. فمضخّم الصوت إذا رفع قدرة الإشارة عشرة أضعاف لم تسمعه الأذن أعلى عشر مرّات، بل خطوة واحدة لطيفة فى شدّة الصوت. وكذلك فى المعمل: محلول تركيز أيونات الهيدروجين فيه عشرة أمثال تركيزها فى محلول آخر لا تزيد شدّة حموضته عشر وحدات.

بل تزيد وحدة واحدة على مقياس الأس الهيدروجينى. فأجسامنا وبيئتنا تضغط تباينًا أسّيًّا هائلًا فى مقاييس مرتّبة يسهل التعامل معها. ولحساب هذه المقاييس المضغوطة والتنقّل فيها نحتاج إلى عكس عملية النمو الأسّى.

السؤال الموجّه: إذا كانت الدالة الأسّية تربط مدخلًا معلومًا بمخرج سريع التزايد $أ^{ص} = س$، فكيف نعرّف عمليتها العكسية — اللوغاريتم $لو_{أ} س = ص$ — تعريفًا يعزل الأسّ ويحوّل الضرب المتراكم إلى جمع بسيط؟

لاحظ!

$لو_{أ} م$ يسمى **لوغاريتم** م للأساس أ، ويسمى م **مدخل اللوغاريتم** $لو_{أ} م$.

$لو_{\text{الأساس}} \text{المدخل}$

إذا كان أ > ٠، أ ≠ ١، م > ٠، فإن:

$أ^{ل} = م \Leftrightarrow لو_{أ} م = ل$

مثال:

$٣^{٢} = ٨$
$لو_{٢} ٨ = ٣$

مثال:

$٣^{٤} = ٨١$
$لو_{٣} ٨١ = ٤$

استعد

اكتب (أ) فى الصورة $أ^{ل} = م$، واكتب (ب) فى الصورة $لو_{أ} م = ل$.

(أ) $لو_{٣} ٩ = ٢$ (ب) $٢^{٥} = ٣٢$

بدّل موضع العددين الأخيرين.

طريقة الحل

(أ)

$$\text{لو}_{٣}\ ٩ = ٢$$
$$٩ = ٣^{٢}$$

(ب)

$$٣٢ = ٢^{٥}$$
$$\text{لو}_{٢}\ ٣٢ = ٥$$

بدّل موضع العددين الأخيرين.

بدّل موضع العددين الأخيرين.

حاول

اكتب (أ) و(ب) فى الصورة $أ^{ل} = م$، واكتب (ج) و(د) فى الصورة $\text{لو}_{أ}\ م = ل$.

(أ) $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$

(ب) $\text{لو}_{\sqrt{٢}}(٣٢) = ١٠$

(ج) $٨^{٢} = ٦٤$

(د) $١٦^{\frac{١}{٢}} = ٤$

تدريب

اكتب من (أ) إلى (و) فى الصورة $أ^{ل} = م$، واكتب من (ز) إلى (ل) فى الصورة $\text{لو}_{أ}\ م = ل$.

(أ) $\text{لو}_{١٠}\ ١٠٠ = ٢$

(ب) $\text{لو}_{٣}\ ٢٧ = ٣$

(ج) $\text{لو}_{٢}\ ١٢٨ = ٧$

(د) $\text{لو}_{٥}\ \frac{١}{٢٥} = -٢$

(هـ) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ \frac{١}{٦٤} = ٦$

(و) $\text{لو}_{\sqrt{٣}}(٢٧) = ٦$

(ز) $٦^{٣} = ٢١٦$

(ح) $٥^{٤} = ٦٢٥$

(ط) $٩^{٠} = ١$

(ى) $٢^{-٣} = \frac{١}{٨}$

(ك) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

(ل) $٣^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّي

إذا كان $\text{لو}_{٥}\ ٢٥ = س$، فأوجد قيمة الآتى بدون استخدام الآلة الحاسبة:

$\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ س$

٦-١١
الرياضيات

قيم اللوغاريتمات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

حساب قيم اللوغاريتمات.

لاحِظ!

قيم اللوغاريتمات

(أ) لو$_{أ}$ ١ = ٠

(ب) لو$_{أ}$ أ = ١

(جـ) لو$_{أ}$ أ^{ل} = ل

∵ أ^{٠} = ١، فقيمته ٠ إذا كان المدخل ١

∵ أ^{١} = أ، فقيمته ١ إذا كان المدخل مساويًا للأساس.

من أ^{ل} = م ⇔ لو$_{أ}$ م = ل، تكون قيمته ل إذا كان المدخل هو الأساس مرفوعًا للقوة ل.

استعد

أوجد القيم الآتية.

(أ) لو$_{١٠}$ ١ (ب) لو$_{٥}$ ٥ (جـ) لو$_{٢}$ ٢^{٨}

(د) لو$_{٢}$ ١٦ (هـ) لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$ (و) لو$_{٧}$ $\sqrt[٣]{٤٩}$

طريقة الحل

(أ) لو$_{١٠}$ ١

= ٠

(ب) لو$_{٥}$ ٥ = ١

(جـ) لو$_{٢}$ ٢^{٨}

= ٨

(د) لو$_{٢}$ ١٦

= لو$_{٢}$ ٢^{٤}

= ٤

(هـ) لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$

= لو$_{٥}$ ٥$^{-١}$

= −١

(و) لو$_{٧}$ $\sqrt[٣]{٤٩}$

= لو$_{٧}$ ٧$^{\frac{٢}{٣}}$

= $\frac{٢}{٣}$

حاول

أوجد القيم الآتية.

(أ) لو$_{٥}$ ١ (ب) لو$_{٣}$ ٣ (جـ) لو$_{٤}$ ٤^{٤}

(د) لو$_{٣}$ ٢٧ (هـ) لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٤}$ (و) لو$_{٥}$ $\sqrt{١٢٥}$

تدريب

أوجد القيم الآتية.

(أ) لو$_{٢}$ ١ (ب) لو$_{٧}$ ٧ (جـ) لو$_{٣}$ ٣$^{\frac{١}{٢}}$

(د) لو$_{٣}$ ١ (هـ) لو$_{٢٥}$ $\sqrt{\sqrt{٢٥}}$ (و) لو$_{١٠}$ ١٠$^{-٢}$

(ز) لو$_{٢}$ $\sqrt{١}$ (ح) لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\frac{١}{٢}$ (ط) لو$_{٤}$ ٤$^{-\frac{٣}{٤}}$

(ي) لو$_{١٠}$ ١٠٠ (ك) لو$_{٥}$ ١٢٥ (ل) لو$_{٢}$ ٦٤

(م) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ (ن) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ (س) لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$

(ع) لو$_{٢}$ $\sqrt{٣٢}$ (ف) لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ (ص) لو$_{٢}$ $\frac{١}{\sqrt[٥]{٤}}$

★ التحدّي

ضع فى أبسط صورة:

$$\text{لو}_{(أ^{٣})}(أ^{٢})$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

القيمة ٠ إذا كان المدخل ١

القيمة ١ إذا تساوى المدخل والأساس.

القيمة ل إذا كان المدخل هو الأساس مرفوعًا للقوة ل.

اكتب المدخل فى صورة قوة للأساس.

القيمة ل إذا كان المدخل هو الأساس مرفوعًا للقوة ل.

١٢-٦
الرياضيات

جمع اللوغاريتمات وطرحها

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

حساب قيم اللوغاريتمات، وتطبيق خواصها (الضرب والقسمة والقوة) فى تبسيط العمليات الحسابية والجبرية.

لاحِظ!

جمع اللوغاريتمات وطرحها

إذا كان م > ٠، ن > ٠، وكان ك عددًا حقيقيًّا، فاستخدم الخواص الآتية.

(١) $\text{ك لو}_{أ} \text{م} = \text{لو}_{أ} \text{م}^{ك}$

(٢) إذا تساوى الأساسان، فإن $\text{لو}_{أ} \text{م} + \text{لو}_{أ} \text{ن} = \text{لو}_{أ} \text{م ن}$.

$\text{لو}_{أ} \text{م} - \text{لو}_{أ} \text{ن} = \text{لو}_{أ} \frac{\text{م}}{\text{ن}}$

مثال: $\text{لو}_{٦} ٢ + \text{لو}_{٦} ٣ = \text{لو}_{٦} (٢ \times ٣) = \text{لو}_{٦} ٦ = ١$

مثال: $\text{لو}_{٢} ٣٠ - \text{لو}_{٢} ٣ - \text{لو}_{٢} ٥$

$= \text{لو}_{٢} \frac{٣٠}{٣ \times ٥}$

$= \text{لو}_{٢} ٢$

$= ١$

عند جمع اللوغاريتمات وطرحها، انقل العدد الذى أمام «لو» ليكون أُسًّا للمدخل، ثم احسب.

مثال: $٢ \text{ لو}_{٣} ١٢ - ٤ \text{ لو}_{٣} ٢$

$= \text{لو}_{٣} ١٢^{٢} - \text{لو}_{٣} ٢^{٤}$

$= \text{لو}_{٣} \frac{١٤٤}{١٦}$

$= \text{لو}_{٣} ٩$

$= ٢$

انقل العدد الذى أمام «لو» ليكون أُسًّا للمدخل.

جمع اللوغاريتمات يقابل ضرب المدخلات.

طرح اللوغاريتمات يقابل قسمة المدخلات.

انقل العدد الذى أمام «لو» ليكون أُسًّا للمدخل.

طرح اللوغاريتمات يقابل قسمة المدخلات.

استعد

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتى.

(أ) $٤ \text{ لو}_{٥} ٣ - ٢ \text{ لو}_{٥} ١٥ - \text{لو}_{٥} ٤٥$

(ب) $٤ \text{ لو}_{٢} \sqrt[٣]{٢} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{٢} ٣ + \text{لو}_{٢} \frac{\sqrt[٣]{٧}}{٢}$

طريقة الحل

(أ) $٤ \text{ لو}_{٥} ٣ - ٢ \text{ لو}_{٥} ١٥ - \text{لو}_{٥} ٤٥$

$= \text{لو}_{٥} ٣^{٤} - \text{لو}_{٥} ١٥^{٢} - \text{لو}_{٥} ٤٥$

$= \text{لو}_{٥} ٨١ - \text{لو}_{٥} ٢٢٥ - \text{لو}_{٥} ٤٥$

$= \text{لو}_{٥} \frac{٨١}{٤٥ \times ٢٢٥}$

$= \text{لو}_{٥} \frac{١}{١٢٥}$

$= \text{لو}_{٥} ٥^{-٣}$

$= -٣$

انقل أولًا العدد الذى أمام «لو» ليكون أُسًّا للمدخل.

بسّط الكسر.

اكتب المدخل فى صورة قوة للأساس.

(ب) $٤ \text{ لو}_{٢} \sqrt[٣]{٧} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{٢} ٣ + \text{لو}_{٢} \frac{\sqrt[٣]{٧}}{٢}$

$= \text{لو}_{٢} \left(\sqrt[٣]{٧}\right)^{٤} - \text{لو}_{٢} ٣^{\frac{١}{٢}} + \text{لو}_{٢} \frac{\sqrt[٣]{٧}}{٢}$

$= \text{لو}_{٢} ٤ - \text{لو}_{٢} \sqrt[٣]{٧} + \text{لو}_{٢} \frac{\sqrt[٣]{٧}}{٢}$

$= \text{لو}_{٢} \frac{٤ \times \sqrt[٣]{٧}}{٢ \times \sqrt[٣]{٧}}$

$= \text{لو}_{٢} ٢$

$= ١$

حاول

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتى.

(أ) $\text{لو}_{٦} ٤ + \text{لو}_{٦} ٩$

(ب) $\text{لو}_{٥} ٧ - \text{لو}_{٥} ٣٥$

(ج) $\text{لو}_{١٠} ٤ - \text{لو}_{١٠} \frac{١}{٢٥}$

(د) $\text{لو}_{٢} ٦ + \text{لو}_{٢} ١٢ - ٢ \text{ لو}_{٢} ٣$

(هـ) $\frac{١}{٢} \text{لو}_{٥} ٣ + ٣ \text{ لو}_{٥} \sqrt[٣]{٢} - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢٤}$

(و) $٤ \text{ لو}_{٣} \sqrt{٣} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ٢ + \text{لو}_{٣} \frac{\sqrt[٣]{٧}}{٣}$

تدريب

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتى.

(أ) $\text{لو}_{١٠} ٤ + \text{لو}_{١٠} ٢٥$

(ب) $\text{لو}_{٨} ٢ + \text{لو}_{٨} ٣٢$

(ج) $\text{لو}_{٦} ١٢ + \text{لو}_{٦} ٣$

(د) $\text{لو}_{٢} ٢٤ - \text{لو}_{٢} ٣$

(هـ) $\text{لو}_{٣} ٧ - \text{لو}_{٣} ٢١$

(و) $\text{لو}_{٥} ٣ - \text{لو}_{٥} ٧٥$

(ز) $\text{لو}_{٦} ٤ - \text{لو}_{٦} \frac{١}{٩}$

(ح) $\text{لو}_{٢} ١٠ - \text{لو}_{٢} \frac{٥}{٢}$

(ط) $\text{لو}_{٢} ٢٤ - \text{لو}_{٢} \frac{٣}{٤}$

(ي) $\text{لو}_{٢} ١٦٠ + \text{لو}_{٢} ٢٠ - ٢ \text{ لو}_{٢} ٥$

(ك) $\text{لو}_{٣} ٥٤ + \text{لو}_{٣} ٦ - ٢ \text{ لو}_{٣} ٢$

(ل) $٢ \text{ لو}_{٥} ١٢ - \text{لو}_{٥} ٣٠٠ - \text{لو}_{٥} ٦٠$

(م) $٣ \text{ لو}_{٣} \sqrt[٣]{٣} + \text{لو}_{٣} (\sqrt[٣]{٢}) - \text{لو}_{٣} ٦$

(ن) $٣ \text{ لو}_{٥} ٣ - ٤ \text{ لو}_{٥} \sqrt{١٥} - \text{لو}_{٥} ١٥$

(س) $\frac{١}{٢} \text{لو}_{٢} ٦ - ٣ \text{ لو}_{٢} \sqrt[٦]{٢} - \text{لو}_{٢} \sqrt[٣]{٧}$

(ع) $\text{لو}_{٥} \frac{٦}{٢٥} - ٣ \text{ لو}_{٥} \sqrt[٦]{٢}$

(ف) $٢ \text{ لو}_{٥} \sqrt[٣]{٣} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{٥} ٦ + \text{لو}_{٥} \frac{\sqrt[٦]{٧}}{٣}$

(ص) $\text{لو}_{٢} ١٢ + ٤ \text{ لو}_{٢} \frac{٢}{٣} + ٦ \text{ لو}_{٢} \sqrt[٣]{٧}$

★ التحدّي

بسّط المقدار اللوغاريتمى الكسرى الآتى تبسيطًا تامًّا إلى كسر واحد فى أبسط صورة:

$$\frac{\text{لو}_{٥} ٧٥ + ٣ \text{ لو}_{٥} \sqrt[٣]{٢} - ٢ \text{ لو}_{٥} \sqrt[٦]{٧}}{\text{لو}_{٢} ١٢ + ٤ \text{ لو}_{٢} \frac{٢}{٣} + ٦ \text{ لو}_{٢} \sqrt[٣]{٧}}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (هـ) و(و) ثم ناقِشوا الإجابة.

٦-١٣ تغيير الأساس (١)

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

الرياضيات

نواتج التعلّم

استخدام خاصية تغيير الأساس فى حلّ المعادلات اللوغاريتمية المختلفة الأساس، وتيسير الحسابات العددية فى النمذجة الرياضية.

لاحِظ!

قانون تغيير الأساس: إذا كانت أ، ب، ج أعدادًا موجبة، حيث أ ≠ ١، ج ≠ ١

$$\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{ب} = \frac{\text{لو}_{\text{ج}}\ \text{ب}}{\text{لو}_{\text{ج}}\ \text{أ}}$$

إذا تعذّر كتابة المدخل فى صورة قوة للأساس عند إيجاد قيمة لوغاريتم، فغيّر الأساس.

إذا كان الأساس أو المدخل قوة للعدد ٢ (مثل ٤، ٨، ١٦، ...)، فحوّل إلى الأساس ٢

إذا كان الأساس أو المدخل قوة للعدد ٣ (مثل ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)، فحوّل إلى الأساس ٣

إذا كان الأساس أو المدخل قوة للعدد ٥ (مثل ٢٥، ١٢٥، ...)، فحوّل إلى الأساس ٥

استعد

أوجد القيم الآتية.

(أ) $\text{لو}_{١٦}\ ٦٤$ (ب) $\text{لو}_{\sqrt[٥]{\ }}(١٢٥)$

طريقة الحل

(أ) $\text{لو}_{١٦}\ ٦٤$

∵ العددان ١٦ و٦٤، فغيّر الأساس إلى ٢

$$= \frac{\text{لو}_{٢}\ ٦٤}{\text{لو}_{٢}\ ١٦}$$

$$= \frac{\text{لو}_{٢}\ ٢^{٦}}{\text{لو}_{٢}\ ٢^{٤}}$$

$$= \frac{٦}{٤}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

(ب) $\text{لو}_{\sqrt[٥]{\ }}(١٢٥)$

∵ العددان ٥ و١٢٥، فغيّر الأساس إلى ٥

$$= \frac{\text{لو}_{٥}\ ١٢٥}{\text{لو}_{٥}\ \sqrt[٥]{\ }}$$

$$= \frac{\text{لو}_{٥}(٥)^{٣}}{\text{لو}_{٥}(٥)^{\frac{١}{٢}}}$$

اضرب البسط والمقام فى ٢

$$= \frac{٣}{\frac{١}{٢}}$$

$$= ٦$$

حاول

أوجد القيم الآتية.

(أ) لو$_{٤}$ ٨ (ب) لو$_{٩}$ ٣ (جـ) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٦

(د) لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٣}$ (هـ) لو$_{٤}$ $\sqrt[٣]{٢}$

تدريب

أوجد القيم الآتية.

(أ) لو$_{٨}$ ٤ (ب) لو$_{٤}$ ٦٤ (جـ) لو$_{٨}$ ٣٢

(د) لو$_{٢٧}$ ٣ (هـ) لو$_{١٢٥}$ ٥ (و) لو$_{٢٥}$ ١٢٥

(ز) لو$_{\frac{١}{٤}}$ ٣٢ (ح) لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢٤٣ (ط) لو$_{\frac{١}{٥}}$ ١٢٥

(ي) لو$_{\sqrt{٢}}$ (١٦) (ك) لو$_{\sqrt[٣]{٣}}$ (٨١) (ل) لو$_{\sqrt[٣]{٣}}$ $\left(\frac{١}{٢٧}\right)$

(م) لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٩}$ (ن) لو$_{\frac{١}{٤}}$ $\sqrt[٣]{٢}$ (س) لو$_{\frac{١}{٥}}$ $\sqrt[٣]{٥}$

★ التحدّي

أوجد قيمة

$$\text{لو}_{\frac{\sqrt[٣]{٩}}{\sqrt[٣]{٤}}} \left(\frac{٢٧}{٨}\right)$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

٦-١٤ تغيير الأساس (٢)

الرياضيات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

لاحِظ!

عند حساب لوغاريتمات مختلفة الأساس، وحّد الأساس أولًا.

إذا أمكن كتابة المدخل فى صورة قوة، فطبّق الخاصية $\log_{أ} م^{ك} = ك \log_{أ} م$.

يمكن معاملة $\log_{أ} ب$ معاملة متغيّر واحد.

مثال: $\log_{٢} ٣ + ٢ \log_{٢} ٣ = ٣ \log_{٢} ٣$

مثال: $\frac{\log_{٥} ٣}{\log_{٥} ٢} \times \frac{٤}{٣ \log_{٥} ٣} = \frac{٢}{٣}$

نواتج التعلّم

كتابة اللوغاريتمات بدلالة لوغاريتمات أخرى بخواص الجبر وقانون تغيير الأساس.

$أ + ٢أ = ٣أ$

$\frac{أ}{٢} \times \frac{٤}{٢أ} = \frac{٢}{٣}$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

(أ) $\log_{٢} ٢٤ - \log_{٤} ٣٦$

(ب) $\log_{٩} ١٦ \times \log_{٨} ٣$

(جـ) $(\log_{٢} ٥ + \log_{٨} ٥)(\log_{٥} ٢ + \log_{٢٥} ٢)$

طريقة الحل

(أ) $\log_{٢} ٢٤ - \log_{٤} ٣٦$

$= \log_{٢} ٢٤ - \frac{\log_{٢} ٣٦}{\log_{٢} ٤}$

$= \log_{٢} ٢٤ - \frac{\log_{٢} ٢^{٦}}{\log_{٢} ٢^{٢}}$

$= \log_{٢} ٢٤ - \frac{٢ \log_{٢} ٦}{٢}$

$= \log_{٢} ٢٤ - \log_{٢} ٦$

$= \log_{٢} \frac{٢٤}{٦}$

$= \log_{٢} ٤$

$= \log_{٢} ٢^{٢}$

$= ٢$

(ب) $\log_{٩} ١٦ \times \log_{٨} ٣$

$= \frac{\log_{٢} ١٦}{\log_{٢} ٩} \times \frac{\log_{٢} ٣}{\log_{٢} ٨}$

$= \frac{\log_{٢} ٢^{٤}}{\log_{٢} ٣^{٢}} \times \frac{\log_{٢} ٣}{\log_{٢} ٢^{٣}}$

$= \frac{٤ \log_{٢} ٢}{٢ \log_{٢} ٣} \times \frac{\log_{٢} ٣}{٣}$

$= \frac{٢}{٣}$

(ج) $(\text{لو}_{٢} ٥ + \text{لو}_{٨} ٥)(\text{لو}_{٥} ٢ + \text{لو}_{٢٥} ٢)$

$$= \left(\text{لو}_{٢} ٥ + \frac{\text{لو}_{٢} ٥}{\text{لو}_{٢} ٨}\right)\left(\frac{\text{لو}_{٢} ٢}{\text{لو}_{٢} ٥} + \frac{\text{لو}_{٢} ٢}{\text{لو}_{٢} ٢٥}\right)$$

$$= \left(\text{لو}_{٢} ٥ + \frac{\text{لو}_{٢} ٥}{\text{لو}_{٢} ٢^{٣}}\right)\left(\frac{١}{\text{لو}_{٢} ٥} + \frac{١}{\text{لو}_{٢} ٥^{٢}}\right)$$

$$= \left(\text{لو}_{٢} ٥ + \frac{\text{لو}_{٢} ٥}{٣}\right)\left(\frac{١}{\text{لو}_{٢} ٥} + \frac{١}{٢\ \text{لو}_{٢} ٥}\right)$$

$$= \left(\frac{٣\ \text{لو}_{٢} ٥}{٣} + \frac{\text{لو}_{٢} ٥}{٣}\right)\left(\frac{٢}{٢\ \text{لو}_{٢} ٥} + \frac{١}{٢\ \text{لو}_{٢} ٥}\right)$$

$$= \frac{٤\ \text{لو}_{٢} ٥}{٣} \times \frac{٣}{٢\ \text{لو}_{٢} ٥}$$

$$= ٢$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

(أ) $\text{لو}_{٢} ٢٨ - \text{لو}_{٤} ٤٩$

(ب) $\text{لو}_{٣} ٥ \times \text{لو}_{٥} ٢٧$

(ج) $\text{لو}_{٢٧} ٤ \times \text{لو}_{١٦} ٨١$

(د) $\text{لو}_{٢} ٩ \times \text{لو}_{٣} ٥ \times \text{لو}_{٢٥} ٨$

(هـ) $(\text{لو}_{٢} ٣ + \text{لو}_{٤} ٩)(\text{لو}_{٣} ٤ + \text{لو}_{٩} ٢)$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

(أ) $\text{لو}_{٩} ٤ - \text{لو}_{٣} ٦$

(ب) $\text{لو}_{٢} ٢٠ - ٣\ \text{لو}_{٨} ٥$

(ج) $\text{لو}_{٢٧} ٨ - \text{لو}_{٣} ١٨$

(د) $\text{لو}_{٢} ٣ \times \text{لو}_{٣} ٤$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

وحّد الأساس.

$\text{لو}_{أ} م^{ك} = ك\ \text{لو}_{أ} م$

اجعل الأساس ٢ (ويمكن جعله ٣).

اجعل الأساس ٢ (ويمكن جعله ٥).

وحّد المقامات داخل القوسين ثم بسّط.

(هـ) $\text{لو}_{٤}\ ٣ \times \text{لو}_{٣}\ ٨$

(و) $\text{لو}_{٣}\ ٤ \times \text{لو}_{٢}\ ٩$

(ز) $\text{لو}_{٨}\ ٣ \times \text{لو}_{٩}\ ٤$

(ح) $\text{لو}_{٩}\ ١٦ \times \text{لو}_{٤}\ ٣$

(ط) $\text{لو}_{٤}\ ٩ \times \text{لو}_{٩}\ ٦٤$

(ى) $\text{لو}_{٢}\ ٣ \times \text{لو}_{٣}\ ٥ \times \text{لو}_{٥}\ ١٦$

(ك) $\text{لو}_{٢}\ ٣ \times \text{لو}_{٣}\ ٤ \times \text{لو}_{٤}\ ٢$

(ل) $\text{لو}_{٣}\ ١٦ \times \text{لو}_{٢}\ ٥ \times \text{لو}_{١٢٥}\ ٩$

(م) $(\text{لو}_{٢}\ ٩ + \text{لو}_{٨}\ ٣)(\text{لو}_{٣}\ ٢ + \text{لو}_{٩}\ ٤)$

(ن) $(\text{لو}_{٣}\ ٤ + \text{لو}_{٩}\ ١٦)(\text{لو}_{٤}\ ٩ + \text{لو}_{١٦}\ ٣)$

(س) $(\text{لو}_{٥}\ ٢ + \text{لو}_{٢٥}\ ٢)(\text{لو}_{٢}\ ٥ + \text{لو}_{٤}\ ١٢٥)$

★ التحدّي

بسّط حاصل ضرب اللوغاريتمات الآتي تبسيطًا كاملًا، حيث $س > ١$

$$\text{لو}_{س}\left(\sqrt{ص}\right) \times \text{لو}_{ص^{٢}}\left(ع^{٣}\right) \times \text{لو}_{\sqrt[٤]{}}\left(س^{٤}\right)$$

تأمّل

تأمّل الدالتين اللوغاريتميتين الآتيتين:

$$د(س) = \text{لو}_{٤}\left(س^{٢}\right) \text{ وهـ}(س) = ٢\ \text{لو}_{٤}\ س$$

هل الدالتان متطابقتان على المستوى الإحداثي كله؟ ادرس مجال كلٍّ منهما وخواصهما؛ لتبرهن هل ينطبق منحنياهما تمامًا أم يفترقان على فترات بعينها من الأعداد الحقيقية.

٦-١٥
الرياضيات

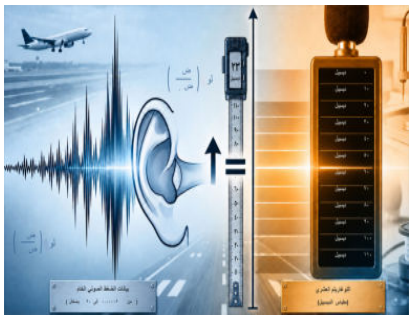
التعبير عن لوغاريتم بدلالة لوغاريتمات أخرى

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

كتابة اللوغاريتمات بدلالة لوغاريتمات أخرى بخواص الجبر وقانون تغيير الأساس.

المفهوم ٤ · تطبيقات اللوغاريتمات



تعتمد المراقبة البيئية والتشخيص الحاسوبى على بيانات تمتدّ عبر رتب قياس متباعدة. فعند دراسة التلوث الضوضائى حول أحد المطارات، يتراوح ضغط الموجات الصوتية التى تبلغ أذن العامل بين ٠٫٠٠٠٢ باسكال عند عتبة السمع البشرى، وأكثر من ٢٠ باسكال قرب المدرج. وتخزين هذه القيم الخام أو حسابها مباشرةً يستلزم التعامل مع مديات هائلة.

لذلك تستخدم علوم الصوتيات ومنصّات البرمجيات مقياس الديسيبل اللوغاريتمى لضبط تباين البيانات. والانتقال من العمليات الجبرية المجردة إلى الأدوات العملية يقتضى تحليل المقادير اللوغاريتمية بوصفها دوالّ. وتفرض هذه الدوالّ شروطًا حدّية صارمة، وتضبط قيود الخوارزميات، وتعيّن الفترات التى تتجاوز فيها القوى التشغيلية عتبات الأمان أو الأداء.

السؤال الموجّه: كيف يؤثّر شرط المجال (حيث س > ٠)، واطّراد الدالة اللوغاريتمية تزايدًا أو تناقصًا بحسب الأساس، فى حلول المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية ومسائل القيم المثلى؟

لاحظ!

مسائل التعبير عن لوغاريتمات أخرى بدلالة لو ١٠ ٢ ولو ١٠ ٣:

- حلّل **مدخل اللوغاريتم** إلى عوامله الأولية، ثم اكتبه حاصل ضرب أو خارج قسمة لـ٢، ٣، ١٠.
- إذا ظهر العامل ٥ فاستخدم ٥ = $\frac{١٠}{٢}$.
- استخدم الخواص الآتية:

لو$_{أ}$ م ن = لو$_{أ}$ م + لو$_{أ}$ ن

لو$_{أ}$ $\frac{م}{ن}$ = لو$_{أ}$ م − لو$_{أ}$ ن

لو$_{أ}$ م^{ك} = ك لو$_{أ}$ م

استعد

إذا كان لو ١٠ ٢ = أ، لو ١٠ ٣ = ب، فعبّر عمّا يأتى بدلالة أ، ب.

(أ) لو ١٠ ٢٤

(ب) لو ١٠ $\frac{٤}{٢٧}$

(جـ) لو ١٠ ٤٥

(د) لو ٧٥ ٢٤

طريقة الحل

(أ) $\log_{١٠} ٢٤$

$= \log_{١٠} (٣ \times ٣^{٢})$

$= \log_{١٠} ٣^{٢} + \log_{١٠} ٣$

$= ٣ \log_{١٠} ٢ + \log_{١٠} ٣$

$= ٣أ + ب$

(ب) $\log_{١٠} \frac{٤}{٢٧}$

$= \log_{١٠} \frac{٢^{٢}}{٣^{٣}}$

$= \log_{١٠} ٢^{٢} - \log_{١٠} ٣^{٣}$

$= ٢ \log_{١٠} ٢ - ٣ \log_{١٠} ٣$

$= ٢أ - ٣ب$

(ج) $\log_{١٠} ٤٥$

$= \log_{١٠} (٥ \times ٣^{٢})$

$= \log_{١٠} \left(\frac{١٠}{٢} \times ٣^{٢}\right)$

$= \log_{١٠} ٣^{٢} + \log_{١٠} \frac{١٠}{٢}$

$= ٢ \log_{١٠} ٣ + \log_{١٠} ١٠ - \log_{١٠} ٢$

$= ٢ب + ١ - أ$

(د) $\log_{٧٥} ٢٤$

$= \frac{\log_{١٠} ٢٤}{\log_{١٠} ٧٥}$

$= \frac{\log_{١٠} (٣ \times ٣^{٢})}{\log_{١٠} \left(٣ \times \left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢}\right)}$

$= \frac{\log_{١٠} (٣ \times ٣^{٢})}{\log_{١٠} \left(٣ \times \frac{٢١٠}{٢٢}\right)}$

$= \frac{٣ \log_{١٠} ٢ + \log_{١٠} ٣}{\log_{١٠} ٣ + ٢ \log_{١٠} ١٠ - ٢ \log_{١٠} ٢}$

$= \frac{٣أ + ب}{ب + ٢ - ٢أ}$

حلّل مدخل اللوغاريتم إلى عوامله الأولية.

$\log_{أ} م ن = \log_{أ} م + \log_{أ} ن$

$\log_{أ} م^{ك} = ك \log_{أ} م$

$\log_{أ} \frac{م}{ن} = \log_{أ} م - \log_{أ} ن$

$٥ = \frac{١٠}{٢}$

غيّر الأساس إلى ١٠ لتعوّض عن أ، ب.

حاول

إذا كان لو$_{١٠}$ ٢ = أ، لو$_{١٠}$ ٣ = ب، فعبّر عمّا يأتى بدلالة أ، ب.

(أ) لو$_{١٠}$ ٧٢ (ب) لو$_{١٠}$ $\frac{٨}{٣}$

(جـ) لو$_{١٠}$ ١٥ (د) لو$_{٥}$ ١٢

تدريب

إذا كان لو$_{١٠}$ ٢ = أ، لو$_{١٠}$ ٣ = ب، فعبّر عمّا يأتى بدلالة أ، ب.

(أ) لو$_{١٠}$ ١٨ (ب) لو$_{١٠}$ ١٢

(جـ) لو$_{١٠}$ ٥٤ (د) لو$_{١٠}$ $\frac{١٦}{٩}$

(هـ) لو$_{١٠}$ $\frac{٨١}{٨}$ (و) لو$_{١٠}$ $\frac{١}{١٢}$

(ز) لو$_{١٠}$ ٥ (ح) لو$_{١٠}$ ٢٥

(ط) لو$_{١٠}$ $\frac{١}{٥}$ (ى) لو$_{١٢}$ ١٨

(ك) لو$_{١٨}$ ٥ (ل) لو$_{٥٠}$ ٦٠

★ التحدّي

إذا كان لو$_{ج}$ ٣ = س، لو$_{ج}$ ٢ = ص، فاكتب كلًّا مما يأتى بدلالة س، ص:

١) لو$_{ج}$ ١٢

٢) لو$_{ج}$ $\frac{٣}{٨}$

٣) لو$_{ج}$ $\left(\sqrt[٦]{٧}\right)$

٤) لو$_{٢}$ ٣

٥) لو$_{٣ب}$ (٢ب ج)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٦-١٦ الدوال اللوغاريتمية

الرياضيات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

لاحِظ!

الدالة ص = لو$_{أ}$ س (أ > ٠، أ ≠ ١) تسمى **دالة لوغاريتمية** فى س أساسها أ.

ولمنحنى الدالة اللوغاريتمية ص = لو$_{أ}$ س نوعان، يفرّق بينهما موضعُ الأساس أ من الواحد:

- إذا كان أ > ١ صعد المنحنى نحو اليمين، فالدالة متزايدة على مجالها كلِّه، ومنحناها يقطع محور السينات عند س = ١ ثم يرتفع حتى يبلغ ص = ١ عند س = أ.
- إذا كان ٠ < أ < ١ هبط المنحنى نحو اليمين، فالدالة متناقصة على مجالها كلِّه، ويقطع منحناها محور السينات عند س = ١ كذلك، لكنه يبلغ ص = ١ عند س = أ قبله.

وفى الحالتين:

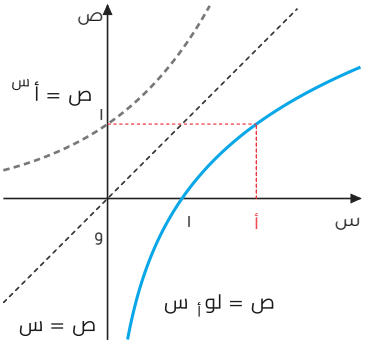
- المجال جميع الأعداد الموجبة، والمدى مجموعة الأعداد الحقيقية.
- محور ص خطّ تقارب للمنحنى.
- يتماثل حول المستقيم ص = س مع منحنى ص = أ^{س}.

نواتج التعلّم

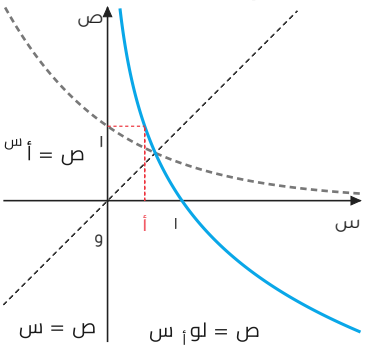
تمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًا، واستنتاج خواصها الأساسية: المجال، والمدى، والتزايد والتناقص، وسلوكها بوصفها الدالة العكسية للدالة الأسّية.

أى س > ٠ دائمًا، فلا لوغاريتم لعددٍ سالب ولا للصفر.

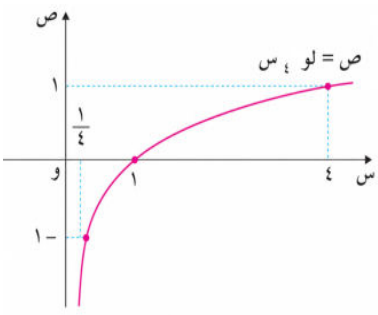
إذا كان أ > ١



إذا كان ٠ < أ < ١



ارسم المنحنى بحيث لا يقطع محور ص.



استعد

حلّ المسائل الآتية.

(أ) ارسم منحنى ص = لو$_{٤}$ س، ثم بيّن وضعه بالنسبة إلى منحنى ص = ٤^{س}.

(ب) ارسم منحنى ص = لو$_{\frac{١}{٤}}$ س.

طريقة الحل

عيّن النقاط التى عندها ص = −١ وص = ٠ وص = ١ ثم ارسم المنحنى.

(أ) ∵ ٤$^{-١}$ = $\frac{١}{٤}$ و٤^{٠} = ١ و٤^{١} = ٤

∴ نقاط منحنى ص = لو$_{٤}$ س الثلاث هى

س	$\frac{١}{٤}$	١	٤
ص	−١	٠	١

∵ الأساس ٤ أكبر من ١ ∴ المنحنى يصعد نحو اليمين، ويقطع محور السينات عند س = ١، ومحور ص خطّ تقارب له فلا يقطعه.

∴ منحنى ص = لو$_{٤}$ س يتماثل حول المستقيم ص = س مع منحنى ص = ٤^{س}.

(ب) ∵ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{١} = \frac{١}{٤}$ و $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٠} = ١$ و $\left(\frac{١}{٤}\right)^{-١} = ٤$

∴ نقاط منحنى ص = لو$_{\frac{١}{٤}}$ س الثلاث هى

س	$\frac{١}{٤}$	١	٤
ص	١	٠	−١

∵ الأساس $\frac{١}{٤}$ بين ٠ و١ ∴ المنحنى يهبط نحو اليمين، ويقطع محور السينات عند س = ١،
ومحور ص خطّ تقارب له فلا يقطعه.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

(أ) بيّن الوضع النسبى لمنحنيى ص = لو$_{٢}$ س وص = ٢^{س}.

(ب) ارسم منحنى ص = لو$_{٢}$ س.

(جـ) ارسم منحنى ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المسائل الآتية.

(أ) بيّن الوضع النسبى لمنحنيى ص = لو$_{٥}$ س وص = ٥^{س}.

(ب) ارسم منحنى ص = لو$_{٥}$ س.

(جـ) ارسم منحنى ص = لو$_{\frac{١}{٥}}$ س.

٢ حلّ المسائل الآتية.

(أ) بيّن الوضع النسبى لمنحنيى ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س وص = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$.

(ب) ارسم منحنى ص = لو$_{٣}$ س.

(جـ) ارسم منحنى ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س.

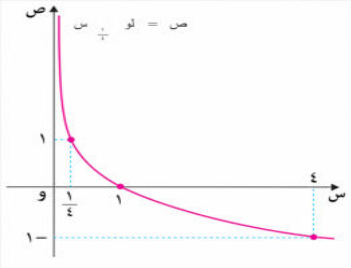
★ التحدّي

تأمّل الدالتين الآتيتين بعد التحويل:

د(س) = لو$_{٥}$(س − ٢) + ١ ، هـ(س) = ٥$^{س-١}$ + ٢

(أ) بيّن الوضع الهندسى الدقيق لمنحنيى ص = د(س)، ص = هـ(س) أحدهما بالنسبة إلى الآخر.

(ب) اكتب معادلة محور التماثل بين المنحنيين.



المنحنيان فى (أ) و(ب) متماثلان حول محور السينات، لأن
لو$_{\frac{١}{٤}}$ س = −لو$_{٤}$ س.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (جـ) ثم ناقِشوا الإجابة.

٦-١٧
الرياضيات

المقارنة بين اللوغاريتمات

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

المقارنة بين قيم لوغاريتمية مختلفة، جبريًّا وبيانيًّا، باستخدام خاصيتى تزايد الدالة اللوغاريتمية وتناقصها.

لاحِظ!

المقارنة بين اللوغاريتمات

إذا كان أ > ١، م > ن، فإن لو$_{أ}$ م > لو$_{أ}$ ن.

فمتى كان الأساس أ > ١ بقيت إشارة المتباينة كإشارتها بين المدخلين.

مثال: ∵ ٣ > ٥، لو$_{٢}$ ٣ > لو$_{٢}$ ٥

إذا كان ٠ < أ < ١، م > ن، فإن لو$_{أ}$ م < لو$_{أ}$ ن.

فمتى كان ٠ < أ < ١ انعكست إشارة المتباينة عن إشارتها بين المدخلين.

مثال: ∵ ٣ > ٥، لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣ < لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٥

خطوات المقارنة بين اللوغاريتمات:

- إذا اختلفت الأسس فوحّدها.
- اكتب المقادير جميعها فى الصورة لو$_{أ}$.

المعامل السابق للو يصير أسًّا للمدخل.

ك لو$_{أ}$ م = لو$_{أ}$ م^{ك}

اكتب الأعداد الصحيحة أيضًا فى صورة لوغاريتمية.

ل = لو$_{أ}$ أ^{ل}

استعد

عبّر عن العلاقة بين الأعداد الآتية مستخدمًا إشارات المتباينة.

(أ) لو$_{٢}$ ٣، $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ٥، ٢

(ب) لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣، لو$_{\frac{١}{٤}}$ ٥، −١

طريقة الحل

(أ) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ٥ = لو$_{٢}$ $\sqrt[٥]{٧}$

٢ = لو$_{٢}$ ٢^{٢} = لو$_{٢}$ ٤

∴ قارن بين لو$_{٢}$ ٣، لو$_{٢}$ $\sqrt[٥]{٧}$ ، لو$_{٢}$ ٤

بمقارنة المدخلات، $\sqrt[٥]{٧}$ < ٣ < ٤

∵ الأساس ٢ أكبر من ١

∴ لو$_{٢}$ $\sqrt[٥]{٧}$ < لو$_{٢}$ ٣ < لو$_{٢}$ ٤

∴ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ٥ < لو$_{٢}$ ٣ < ٢

(ب) لو$_{\frac{١}{٤}}$ ٥ = $\frac{\text{لو}_{\frac{١}{٣}}\ ٥}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٥

= لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\sqrt[٥]{٧}$

= ١− لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-١}$

= لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢

∴ قارن بين لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣، لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\sqrt[٥]{٧}$ ، لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢

بمقارنة المدخلات، ٢ < $\sqrt[٥]{٧}$ < ٣

∵ الأساس $\frac{١}{٢}$ أصغر من ١

∴ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣ < لو$_{\frac{١}{٢}}$ $\sqrt[٥]{٧}$ < لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢

∴ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣ < لو$_{\frac{١}{٤}}$ ٥ < ١−

إذا كان للوغاريتم معامل فاستخدم ك لو$_{أ}$ م = لو$_{أ}$ م^{ك}.

حوّل العدد الصحيح ل إلى لو$_{أ}$ أ^{ل}

فإذا كان الأساس أكبر من ١ كانت العلاقة كالعلاقة بين المدخلات.

أجب بالعودة إلى الصورة الأصلية.

اجعل الأساس $\frac{١}{٢}$

فإذا كان الأساس أصغر من ١ انعكست العلاقة عن العلاقة بين المدخلات.

أجب بالعودة إلى الصورة الأصلية.

حاول

عبّر عن العلاقة بين الأعداد الآتية مستخدمًا إشارات المتباينة.

(أ) لو٣ ٥، لو٣ ٧، ٢ لو٣ ٢

(ب) ٣ لو$\frac{١}{٢}$ ٣، –٢ لو$\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٥}$، $\frac{٥}{٢}$لو$\frac{١}{٢}$ ٤

(جـ) لو٢ ٥، لو٤ ٣، ١

(د) لو$\frac{١}{٢}$ ٣، لو$\frac{١}{٤}$ ٥، –٢

تدريب

عبّر عن العلاقة بين الأعداد الآتية مستخدمًا إشارات المتباينة.

(أ) لو٢ ٠.٥، لو٢ ٣، لو٢ ٥

(ب) لو٣ ٧، ٣ لو٣ ٢، لو٣ ١٠

(جـ) لو٢ ٣، لو٢ ٨، ٥

(د) لو$\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٢}$، لو$\frac{١}{٣}$ ٣، ١

(هـ) لو$\frac{١}{٣}$ ٤، –لو$\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٥}$، –٢

(و) –لو$\frac{١}{٢}$ ٣، $\frac{١}{٢}$لو$\frac{١}{٣}$ ٥، –١

(ز) لو٢ ٥، لو٤ ٩، لو٨ ٦٤

(ح) لو٤ ٥، لو٢ ٥، لو٨ ٥

(ط) لو٣ ٢، لو٩ ٧، ٢

(ي) لو$\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٢}$، لو$\frac{١}{٤}$ ٣، –١

(ك) لو$\frac{١}{٣}$ $\sqrt{٥}$، –لو$\frac{١}{٩}$ $\frac{١}{٤}$، –١

(ل) $\frac{١}{٢}$لو٢ ٥، لو$\sqrt{٢}$ $\left(\sqrt{٥}\right)$، ٢

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (جـ) و(د) ثم ناقِشوا الإجابة.

★ التحدّي

إذا كان لو$_{أ}$ $٣^{٢^{٣}}$ = س، لو$_{أ}$ $٩^{٩}$ = ص، فاكتب العلاقة بين س، ص فى الحالتين الآتيتين:

(أ) ٠ < أ < ١

(ب) أ > ١

١٨-٦
الرياضيات

المعادلات اللوغاريتمية

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

لاحِظ!

! لحلّ **المعادلات اللوغاريتمية**، اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه، ثم ساو بين المدخلين.

مثال: لو$_{٤}$ س = ٢

لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ ٤^{٢}

س = ٤^{٢}

وفى المعادلات اللوغاريتمية تحقّق من الشرط (المدخل) > ٠ وهو **شرط المدخل**.

مثال: شرط المدخل للوغاريتم لو$_{٥}$(٣س – ٢) هو ٣س – ٢ > ٠ ∴ س > $\frac{٢}{٣}$

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات اللوغاريتمية، والأنظمة التى تحتاج إلى تعويض جبرى لتغيير المتغيّر، مع التحقّق من شرط قبول الحلّ (مجال اللوغاريتم).

اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه.

ساو بين المدخلين.

استعد

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) لو$_{٣}$(٢س – ١) = ٢

(ب) لو$_{٣}$(س – ٧) + لو$_{٣}$(س – ٥) = ١

طريقة الحل

اكتب شرط المدخل، وحلّ المتباينة.

(أ) ∵ المدخل موجب، ٢س – ١ > ٠ أى س > $\frac{١}{٢}$ .....(١)

اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه.

ساو بين المدخلين.

لو$_{٣}$(٢س – ١) = ٢

لو$_{٣}$(٢س – ١) = لو$_{٣}$ ٣^{٢}

∴ ٢س – ١ = ٣^{٢}

س = ٥

∵ هذا يحقّق (١) ∴ س = ٥

(ب) ∵ المدخلان موجبان، س – ٧ > ٠ وس – ٥ > ٠ أى س > ٧.....(١)

لو٣(س – ٧) + لو٣(س – ٥) = ١

لو٣(س – ٧)(س – ٥) = ٣ لو٣

∴ (س – ٧)(س – ٥) = ٣

س٢ – ١٢ س + ٣٢ = ٠

وبالحلّ نجد س = ٤ أو س = ٨

من (١) نجد س = ٤ لا يصلح حلًّا.

∴ س = ٨

اكتب شرط المدخل، وحلّ المتباينتين معًا.

اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه.

ساو بين المدخلين.

حاول

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) لو٥ س = –١

(ب) لو٣(٤ س – ١) = ٣

(جـ) لو٣ س + لو٣(س + ٢) = ١

(د) لو٢(س + ١) + لو٢(س – ٢) = ٢

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) لو٣ س = ٤

(ب) لو٤ س = –٢

(جـ) لو٣ س = $\frac{١}{٣}$

(د) لو٥(س – ١) = ٢

(هـ) لو٢(س + ١) = –١

(و) لو٤(س + ٣) = $\frac{١}{٢}$

(ز) لو٦ س + لو٦(س – ١) = ١

(ح) لو٢ س + لو٢(س – ٧) = ٣

(ط) لو٣ س + لو٣(س + ٨) = ٢

(ي) لو٢(س + ٥) + لو٢(س – ٢) = ٣

(ك) لو٣(س + ٥) + لو٣(س + ٧) = ١

(ل) لو٣(س – ٢) + لو٣(٢س – ٧) = ٢

★ التحدّي

حلّ المعادلة اللوغاريتمية الآتية حلًّا كاملًا لجميع القيم الحقيقية لـ س:

لو٣(س + ٢) – لو٩ (س – ٢)٢ = ١

٦-١٩
الرياضيات

المتباينات اللوغاريتمية

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

حلّ المتباينات اللوغاريتمية، والأنظمة التى تحتاج إلى تعويض جبرى لتغيير المتغيّر، مع التحقّق من شرط قبول الحلّ (مجال اللوغاريتم).

لاحِظ!

عند حلّ **المتباينات اللوغاريتمية** انتبه إلى قيمة **الأساس**.

من المتباينة لو$_{أ}$ م > لو$_{أ}$ ن:

إذا كان أ > ١ فإن م > ن.

وإذا كان ٠ < أ < ١ فإن م < ن.

وفى المتباينات اللوغاريتمية تحقّق من **شرط المدخل** قبل إيجاد مجموعة الحلّ.

استعد

حلّ المتباينات الآتية.

(أ) لو$_{٣}$ س > ٤

(ب) لو$_{\frac{١}{٢}}$(س + ٢) + لو$_{\frac{١}{٢}}$(س − ٥) < −٣

طريقة الحل

(أ) ∵ المدخل موجب، س > ٠ .....(١)

لو$_{٣}$ س > ٤

لو$_{٣}$ س > لو$_{٣}$ ٣^{٤}

∵ الأساس ٣ أكبر من ١

س > ٣^{٤}

س > ٨١ .....(٢)

من (١) و(٢)، ٠ < س > ٨١

(ب) ∵ المدخلان موجبان، س + ٢ > ٠ وس − ٥ > ٠

أى، س > ٥ .....(١)

لو$_{\frac{١}{٢}}$(س + ٢) + لو$_{\frac{١}{٢}}$(س − ٥) < −٣

لو$_{\frac{١}{٢}}$(س + ٢)(س − ٥) < لو$_{\frac{١}{٢}}\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣}$

∵ الأساس $\frac{١}{٢}$ أصغر من ١

(س + ٢)(س − ٥) > $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣}$

س^{٢} − ٣س − ١٨ > ٠

وبالحلّ، −٣ > س > ٦ .....(٢)

من (١) و(٢)، ٥ > س > ٦

كترتيب المدخلين نفسه.

عكس ترتيب المدخلين.

اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه.

كوّن متباينة بين المدخلين. فإذا كان الأساس أكبر من ١ بقيت إشارة المتباينة كما هى.

مجموعة الحلّ هى الفترة التى تحقّق شرط المدخل.

اكتب الطرفين لوغاريتمين لهما الأساس نفسه.

كوّن متباينة بين المدخلين. فإذا كان الأساس أصغر من ١ انعكست إشارة المتباينة.

مجموعة الحلّ هى الفترة التى تحقّق شرط المدخل.

حاول

حلّ المتباينات الآتية.

(أ) $\log_{٣} س > ٢$

(ب) $\log_{\frac{١}{٢}} س > ٥$

(ج) $\log_{٢}(س - ٣) > ٣$

(د) $\log_{\frac{١}{٣}}(س - ٥) > -١$

(هـ) $\log_{٢}(س - ٢) + \log_{٢}(س - ٣) > ١$

(و) $\log_{٢}(س - ١)(س - ٣) \geq ٣$

تدريب

حلّ المتباينات الآتية.

(أ) $\log_{١٠} س > ٣$

(ب) $\log_{٢} س > ٥$

(جـ) $\log_{٤} س > -٣$

(د) $\log_{\frac{١}{٣}} س \geq ١$

(هـ) $\log_{\frac{١}{٢}} س \leq ٣$

(و) $\log_{\frac{١}{٤}} س \leq -٢$

(ز) $\log_{٣}(س - ٢) < ٤$

(ح) $\log_{١٠}(س - ٥) \geq ١$

(ط) $\log_{٥}(س - ٢) > -١$

(ي) $\log_{\frac{١}{٢}}(س + ١) > -١$

(ك) $\log_{\frac{١}{٣}}(س + ٢) \leq -٢$

(ل) $\log_{\frac{١}{٥}}(س - ٣) \geq -١$

(م) $\log_{\frac{١}{٣}}(٤ - س) > \log_{\frac{١}{٣}} ٣س$

(ن) $٢ \log_{\frac{١}{٢}} س > \log_{\frac{١}{٢}}(٢س + ٣)$

(س) $٢ \log_{\frac{١}{١٠}}(س - ١) > \log_{\frac{١}{١٠}}(٧ - س)$

(ع) $\log_{٢}(س + ١) + \log_{٢}(س - ٢) < \log_{٢} ١٠$

(ف) $\log_{٦}(س + ١) + \log_{٦}(س + ٢) \geq ١$

(ص) $\log_{\frac{١}{٢}} س + \log_{\frac{١}{٢}}(س + ١) \leq -١$

(ق) $\log_{٣}(س + ٢) < ١ + \log_{٣} س$

(ر) $\log_{٤}(٢ - س) \geq \log_{٤}(س + ١) + ١$

(ش) $\log_{\frac{١}{٢}}(س - ١) \leq \log_{\frac{١}{٢}}(س + ٣) + ١$

(ت) $\log_{٢} س(س - ٢) > ٣$

(ث) $\log_{١٠}(س + ٢)(س + ٥) \geq ١$

(خ) $\log_{\frac{١}{٢}}(س + ٤)(س - ١) < \log_{\frac{١}{٢}} ٦$

★ التحدّي

يراقب نظامُ أمانٍ فى مزرعةٍ حيوية هامشَ استقرار الإنزيم، ويطلق إيقافًا طارئًا متى تحقّقت المتباينة الآتية

$$\log_{\frac{١}{٢}}(س - ٢) + \log_{\frac{١}{٢}}(س - ٤) \leq -٣$$

(حيث س درجة تشغيل النظام بعشرات الدرجات المئوية).

ولبقاء المزرعة حيّة يجب أن يبقى مدخلا اللوغاريتم موجبين تمامًا. عيّن مدى درجات الحرارة الذى يطلق عنده النظام إيقافه الطارئ.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (هـ) و(و) من قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٢٠٦
الرياضيات

المعادلات والمتباينات بالتعويض

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

لاحِظ!

- فى المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية المركّبة، عوّض $\log_{أ} س = ت$.
- وتحقّق دائمًا من شرط المدخل.

نواتج التعلّم

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية، والأنظمة التى تحتاج إلى تعويض جبرى لتغيير المتغيّر، مع التحقّق من شرط قبول الحلّ (مجال اللوغاريتم).

استعد

حلّ المسائل الآتية.

(أ) حلّ المعادلة $(\log_{٢} س)^{٢} - \log_{٢} س^{٢} - ٨ = ٠$

(ب) حلّ المتباينة $٥ (\log_{٢} س)^{٢} - ٨ \log_{٢} س^{٢} + ٣ > ٠$

(جـ) أوجد قيمة $٨^{\log_{٢} ٥}$

طريقة الحل

(أ) ∵ المدخل موجب، $س > ٠$ .....(١)

$(\log_{٢} س)^{٢} - \log_{٢} س^{٢} - ٨ = ٠$

$(\log_{٢} س)^{٢} - ٢ \log_{٢} س - ٨ = ٠$

ليكن $\log_{٢} س = ت$ (حيث ت أى عدد حقيقى)

$ت^{٢} - ٢ت - ٨ = ٠$

وبالحلّ نجد $ت = ٤، ت = -٢$

إذا كان $ت = ٤$ فإن $\log_{٢} س = ٤$، وبالحلّ $س = ١٦$

وإذا كان $ت = -٢$ فإن $\log_{٢} س = -٢$، وبالحلّ $س = \frac{١}{٤}$

∵ يحقّق كلاهما (١) ∴ $س = \frac{١}{٤}$، $س = ١٦$

$\log_{أ} م^{ن} = ن \log_{أ} م$

عوّض $\log_{أ} س = ت$

(ب) ∵ المدخل موجب، س > ٠ .....(١)

٥ (لو٢ س)٢ – ٨ لو٢ س٢ + ٣ < ٠

٥ (لو٢ س)٢ – ١٦ لو٢ س + ٣ < ٠

ليكن لو٢ س = ت (حيث ت أى عدد حقيقى)

٥ ت٢ – ١٦ ت + ٣ < ٠

وبالحلّ نجد $\frac{١}{٥}$ < ت < ٣

∴ $\frac{١}{٥}$ < لو٢ س < ٣

لو٢ $٢^{\frac{١}{٥}}$ < لو٢ س < لو٢ $٢^{٣}$

∵ الأساس ٢ أكبر من ١ ∴ $\sqrt[٥]{٢}$ < س < ٨ .....(٢)

ومن (١) و(٢) نجد $\sqrt[٥]{٢}$ < س < ٨

(جـ) ليكن ٨$^{\text{لو}_{٢}\, ٥}$ = ت (حيث ت > ٠) .....(١)

∵ أ$^{\text{ل}}$ = م تكتب لو$_{\text{أ}}$ م = ل

∴ لو$_{٨}$ ت = لو$_{٢}$ ٥

وبالحلّ نجد ت = ١٢٥، وهو يحقّق (١) ∴ ٨$^{\text{لو}_{٢}\, ٥}$ = ١٢٥

لو$_{\text{أ}}$ م$^{\text{ن}}$ = ن لو$_{\text{أ}}$ م

الأساس أكبر من ١ فلا تنعكس المتباينة.

خُذ لوغاريتم الطرفين للأساس ٨.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

(أ) حلّ المعادلة (لو٢ س)٢ – لو٢ س٢ – ٣ = ٠

(ب) حلّ المتباينة (لو٣ س)٢ – لو٣ س – ٢ ≥ ٠

(جـ) أوجد قيمة ١٠$^{\text{لو}_{١٠}\, ٣}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $(\text{لو}_{٢}\ س)^{٢} - \text{لو}_{٢}\ س - ٦ = ٠$

(ب) $(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} = \text{لو}_{٣}\ س^{٢}$

(جـ) $٢(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - ٥\ \text{لو}_{٣}\ س + ٢ = ٠$

٢ حلّ المتباينات الآتية.

(أ) $(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - \text{لو}_{٣}\ س - ٦ > ٠$

(ب) $٣(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - \frac{٤}{٣}\text{لو}_{٣}\ س^{٣} + ١ \geq ٠$

(جـ) $٤\left(\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ س\right)^{٢} - ٣\ \text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ س - ١ \geq ٠$

٣ أوجد القيم الآتية.

(أ) $٣^{\text{لو}_{٣}\ ٤}$

(ب) $١٦^{\text{لو}_{٤}\ ٣}$

(جـ) $٣^{\text{لو}_{٢٧}\ ٧}$

لو$_{أ}$ م^{ن} = ن لو$_{أ}$ م

★ التحدّي

يرصد معمل لبحوث الزلازل الموجات الصوتية منخفضة التردّد داخل الصدوع التكتونية العميقة للتنبّؤ بالنشاط الزلزالى. ويتوقّف تقدير الخطورة الإنشائية خ لخطّ الصدع على شدّة الموجة المقيسة س، وفق مقياس لوغاريتمى تربيعى

$(\text{لو}_{٣}\ س)^{٢} - \text{لو}_{٣}\ س - ٦ > ٠$

(حيث س معامل طاقة الموجة الصوتية)، وهو موجب تمامًا أى س > ٠.

وتقضى إجراءات الأمان بأن خطّ الصدع مستقرّ ما دام تقدير الخطورة أصغر من الصفر. أوجد المدى الدقيق لشدّة الموجة س الذى يبقى خطّ الصدع فى هذه المنطقة الآمنة.

٦-٢١
الرياضيات

القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدوال اللوغاريتمية

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

نواتج التعلّم

تعيين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدوال المتضمّنة مقادير لوغاريتمية، واستنتاج سلوكها.

لاحِظ!

في الدوال المتضمّنة لوغاريتمات، عوّض لو$_{أ}$ س = ت.

وبعد التعويض، أوجد مدى ت من المجال، واكتبه دائمًا.

مثال: إذا كان ١ ≤ س ≤ ٨ وفرضت لو$_{٢}$ س = ت، فإن لو$_{٢}$ ١ ≤ ت ≤ لو$_{٢}$ ٨، أي ٠ ≤ ت ≤ ٣

حدّد مدى ت من المجال، واكتبه دائمًا.

استعد

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الآتية:

ص = – (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ٤ لو$_{٣}$ س + ٣ (حيث ١ ≤ س ≤ ٢٧)

ثم أوجد قيم س المناظرة.

طريقة الحل

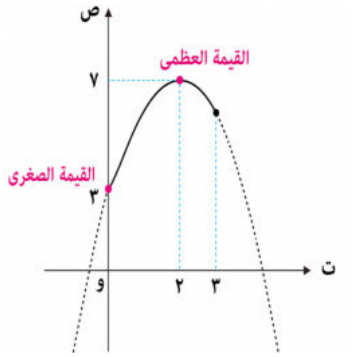
ليكن لو$_{٣}$ س = ت

∵ ١ ≤ س ≤ ٢٧ ∴ لو$_{٣}$ ١ ≤ لو$_{٣}$ س ≤ لو$_{٣}$ ٢٧

∴ ٠ ≤ ت ≤ ٣ .....(١)

ص = – (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ٤ لو$_{٣}$ س + ٣

ص = –ت^{٢} + ٤ت + ٣



= – (ت – ٢)^{٢} + ٧

لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة تربيعية، أكمل المربع.

ومعامل ت^{٢} سالب، فالقطع المكافئ مفتوح إلى أسفل ورأسه عند ت = ٢، وهو واقع في المدى (١)، فالقيمة العظمى ٧ عند ت = ٢

القيمة العظمى عند رأس القطع المكافئ المفتوح إلى أسفل إن وقع الرأس في المدى، والقيمة الصغرى عند طرف المدى الأبعد عن الرأس.

والقيمة الصغرى عند طرف المدى الأبعد عن الرأس، وهو ت = ٠، فتكون ص = ٣

إذا كان ت = ٢، فإن لو$_{٣}$ س = ٢، وبالحلّ س = ٩

إذا كان ت = ٠، فإن لو$_{٣}$ س = ٠، وبالحلّ س = ١

∴ القيمة العظمى ٧ عند س = ٩، والقيمة الصغرى ٣ عند س = ١

حاول

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الآتية:

ص = – (لو$_{٢}$ س)^{٢} + لو$_{٢}$ س^{٢} + ٣ (حيث ١ ≤ س ≤ ١٦)

ثم أوجد قيم س المناظرة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س
(حيث ن عدد صحيح)

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الآتية:

ص = (لو$_{٢}$ س)^{٢} – لو$_{٢}$ س^{٦} + ٧ (حيث ١ ≤ س ≤ ١٦)

ثم أوجد قيم س المناظرة.

٢ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الآتية:

ص = (لو$_{٣}$ س)^{٢} – ٢ لو$_{٣}$ س^{٣} + ٣ (حيث ١ ≤ س ≤ ٢٧)

ثم أوجد قيم س المناظرة.

٣ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة الآتية:

ص = – (لو$_{٢}$ س)^{٢} + لو$_{٢}$ س^{٤} + ١ (حيث ١ ≤ س ≤ ٣٢)

ثم أوجد قيم س المناظرة.

★ التحدّي

يراقب فنّيُّ معالجة المياه حوضًا بيئيًّا. ويتوقّف تقدير الصحّة العامّة ص للموطن المائى على تركيز مركّب ذائب معيّن س، وفق الدالة الآتية:

ص = – (لو$_{٢}$ س)^{٢} + ٢ لو$_{٢}$ س + ٤

ولقيود نظام المضخّات، ينحصر تركيز المركّب فى الفترة ١ ≤ س ≤ ٨. أوجد أكبر تقدير للصحّة وأصغره فى هذا المدى، مع قيمتى التركيز س اللتين يتحقّقان عندهما.

٦-٢٢
الرياضيات

اللوغاريتمات المعتادة

الفصل السادس الأسس واللوغاريتمات

لاحِظ!

اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ يسمى **اللوغاريتم المعتاد**.

الاستراتيجية: لإيجاد عدد الأرقام، استخدم اللوغاريتم المعتاد.

خذ اللوغاريتم المعتاد للعدد $٢^{٤٠}$ ⇐ $لو_{١٠} ٢^{٤٠}$

للعدد الصحيح ن: إذا كان $١٠^{ك-١} < ن < ١٠^{ك}$، فإن ن عدد أرقامه ك بالضبط.

مثال: ∵ $١٠^{٨} < ن < ١٠^{٩}$ ∴ عدد أرقام ن هو ٩.

وللكسر ن: إذا كان $١٠^{-ك} < ن < ١٠^{-ك+١}$، فإن أول رقم غير صفرى يقع فى المرتبة العشرية ك.

مثال: ∵ $١٠^{-٤} < ن < ١٠^{-٣}$ ∴ أول رقم غير صفرى يقع فى المرتبة العشرية الرابعة.

نواتج التعلّم

توظيف اللوغاريتمات المعتادة، ذات الأساس ١٠، فى الحسابات الكقية وتطبيقات النمذجة الرياضية.

تنبيه: أخذ اللوغاريتم يغيّر القيمة
$٢^{٤٠} \neq لو_{١٠} ٢^{٤٠}$.

استعد

باستخدام $لو_{١٠} ٢ = ٠٫٣٠١٠$ و$لو_{١٠} ٣ = ٠٫٤٧٧١$، حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن عدد أرقام العدد الصحيح $٣٠^{٦}$.

٢ عيّن المرتبة العشرية التى يظهر عندها أول رقم غير صفرى فى $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠}$.

طريقة الحل

١ بأخذ اللوغاريتم المعتاد للعدد $٣٠^{٦}$،

$لو_{١٠} ٣٠^{٦} = ٣٠ لو_{١٠} (٢ \times ٣)$

$= ٣٠(لو_{١٠} ٢ + لو_{١٠} ٣)$

$= ٣٠ \times (٠٫٣٠١٠ + ٠٫٤٧٧١)$

$= ٢٣٫٣٤٣$

∵ $٢٣ < لو_{١٠} ٣٠^{٦} < ٢٤$

∴ $لو_{١٠} ١٠^{٢٣} < لو_{١٠} ٣٠^{٦} < لو_{١٠} ١٠^{٢٤}$

∵ الأساس ١٠ أكبر من ١ ∴ $١٠^{٢٣} < ٣٠^{٦} < ١٠^{٢٤}$

∴ العدد $٣٠^{٦}$ عدد صحيح من ٢٤ رقمًا.

خذ الأس الأكبر فى القيمة المطلقة إجابةً.

٢ اتّبع الطريقة نفسها المستخدمة فى إيجاد عدد الأرقام.

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للعدد $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠}$،

$$\text{لو}_{١٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠} = ٥٠\ \text{لو}_{١٠}\left(٢ \times \frac{١}{٣}\right)$$

$$= ٥٠\left(\text{لو}_{١٠}٢ + \text{لو}_{١٠}\frac{١}{٣}\right)$$

$$= ٥٠(\text{لو}_{١٠}٢ - \text{لو}_{١٠}٣)$$

$$= ٥٠ \times (٠٫٣٠١٠ - ٠٫٤٧٧١)$$

$$= -٨٫٨٠٥$$

$\because -٩ < \text{لو}_{١٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠} < -٨$

$\therefore \text{لو}_{١٠}١٠^{-٩} < \text{لو}_{١٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠} < \text{لو}_{١٠}١٠^{-٨}$

$\because$ الأساس ١٠ أكبر من ١ $\therefore ١٠^{-٩} < \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠} < ١٠^{-٨}$

$\therefore$ أول رقم غير صفرى فى $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥٠}$ يقع فى المرتبة العشرية التاسعة.

حاول

باستخدام $\text{لو}_{١٠}٢ = ٠٫٣٠١٠$ و$\text{لو}_{١٠}٣ = ٠٫٤٧٧١$، حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن عدد أرقام العدد الصحيح $٨^{٠١٢}$.

٢ عيّن المرتبة العشرية التى يظهر عندها أول رقم غير صفرى فى $\left(\frac{١}{٦}\right)^{٤٠}$.

تدريب

باستخدام $\text{لو}_{١٠}٢ = ٠٫٣٠١٠$ و$\text{لو}_{١٠}٣ = ٠٫٤٧٧١$، حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن عدد أرقام كلٍّ من الأعداد الصحيحة الآتية.

(أ) $٢^{٣٠}$ (ب) $٢^{٨٠}$ (جـ) $٣^{١٠٠}$

(د) $٦^{٥٠}$ (هـ) $٨^{١٠٠}$ (و) $١٥^{٧٠}$

٢ عيّن المرتبة العشرية التى يظهر عندها أول رقم غير صفرى فى كلٍّ من الأعداد الآتية.

(أ) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢٠}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤٠}$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠٠}$

(د) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠٠}$ (هـ) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٨٠}$ (و) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣٠}$

★ التحدّي

باستخدام $\text{لو}_{١٠}٢ = ٠٫٣٠١٠$ و$\text{لو}_{١٠}٣ = ٠٫٤٧٧١$:

١ عيّن عدد أرقام العدد الصحيح $١٢^{٥٠}$.

٢ أوجد الرقم الأول من العدد $١٢^{٥٠}$.

تأمّل

تأمّل المتباينة اللوغاريتمية الآتية، وأساسها متغيّر:

$$\text{لو}_{س}(س + ٢) \geq \text{لو}_{س}(٤ - س)$$

حلّ المسألة تحليلًا كاملًا. بيّن كيف يفرض الأساس المتغيّر س تقسيمها إلى حالات منفصلة تبعًا لبنية المتباينة، ثم أوجد مجموعة الحلّ الحقيقية كاملة.

خذ الأس الأكبر فى القيمة المطلقة إجابةً.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

١-٧
الرياضيات

متوسط التغير

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

التمييز بين المفهوم الهندسى والمفهوم الجبرى لمتوسط التغير.

المفهوم ١ · أساسيات التفاضل والتكامل (النهايات والمشتقات)

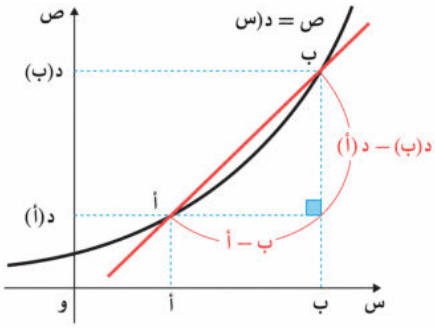


تأمّل ورمًا ينمو فى رئة مريض، أو فيروسًا ينتشر بين السكان. يتابع الأطباء هذه التغيرات لحظةً بلحظة، لكن سؤالًا دقيقًا يفرض نفسه: كيف نحسب معدل النمو أو الاضمحلال فى لحظة واحدة بعينها؟ قوانين السرعة المتوسطة تحتاج إلى فترة زمنية، والطبّ يحتاج إلى دقّة اللحظة الواحدة.

السؤال الموجّه: كيف نوجد رياضيًّا قيمة دالة أو معدل تغيرها عند نقطة تعطى عندها الصيغة المعتادة كميةً غير معيَّنة مثل ٠ ÷ ٠؟

لاحِظ!

للدالة ص = د(س)، إذا تغيرت س من أ إلى ب، فإن



متوسط التغير = $\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$

متوسط التغير يمثّل ميل المستقيم أ ب.

استعد

للدالة د(س) = س^{٢} + ٢س، أوجد متوسط التغير عندما تتغير س كما يأتى.

١ عند التغير من –١ إلى ٣

٢ عند التغير من ٣ إلى ٣ + هـ

هـ مقدار الزيادة فى س، وهو لا يساوى صفرًا.

طريقة الحل

١ $\frac{د(٣) - د(-١)}{٣ - (-١)}$

$= \frac{(٣^{٢} + ٢ \times ٣) - \{(-١)^{٢} + ٢ \times (-١)\}}{٤}$

$= \frac{١٥ - (-١)}{٤}$

$= \frac{١٦}{٤} = ٤$

٢ $\frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{(٣ + هـ) - ٣}$

$= \frac{\{(٣ + هـ)^{٢} + ٢(٣ + هـ)\} - (٣^{٢} + ٢ \times ٣)}{هـ}$

$= \frac{(١٥ + ٨هـ + هـ^{٢}) - ١٥}{هـ}$

$= \frac{٨هـ + هـ^{٢}}{هـ} = ٨ + هـ$

حاول

أوجد متوسط التغير فى الحالات الآتية.

١ للدالة د(س) = ٢س + ٣، عندما تتغير س من −٢ إلى ١

٢ للدالة د(س) = −س^{٢} + ٢س + ٣، عندما تتغير س من ٢ إلى ٥

٣ للدالة د(س) = س^{٢} − ٢س + ١، عندما تتغير س من −٢ إلى −٢ + هـ

تدريب

أوجد متوسط التغير فى الحالات الآتية.

١ للدالة د(س) = ٣س − ١، عندما تتغير س من ١ إلى ٣

٢ للدالة د(س) = ٢س − ٣، عندما تتغير س من ١ إلى ٤

٣ للدالة د(س) = ٥س + ٢، عندما تتغير س من −١ إلى ١

٤ للدالة د(س) = ٢س^{٢}، عندما تتغير س من ١ إلى ٣

٥ للدالة د(س) = س^{٢} + ٣، عندما تتغير س من ١ إلى ٤

٦ للدالة د(س) = −س^{٢} + ٣س − ٢، عندما تتغير س من −٢ إلى ٠

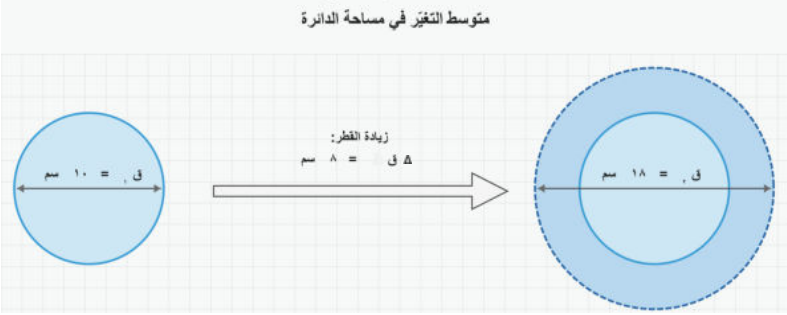
٧ للدالة د(س) = ٣س^{٢}، عندما تتغير س من ١ إلى ١ + هـ

٨ للدالة د(س) = س^{٢} + ٢س، عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ

٩ للدالة د(س) = −س^{٢} + س + ١، عندما تتغير س من ٣ إلى ٣ + هـ

★ التحدّي

أوجد متوسط التغير فى مساحة دائرة عندما يتغير طول قطرها من ١٠ سم إلى ١٨ سم.



تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقشوا الإجابة.

ق طول القطر، ومساحة الدائرة بدلالة قطرها $\frac{\pi ق^{٢}}{٤}$.

٢-٧
الرياضيات

قيمة النهاية

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

للدالة د(س)، إذا اقتربت س من أ، واقتربت د(س) من قيمة ثابتة α، فإننا نكتب:

$$\text{نها}_{س \leftarrow أ} \; د(س) = \alpha$$

، وتسمّى α **قيمة النهاية** عندما تقترب س من أ

وفى نطاق مقرّرنا، تأمّل الآتى:

$$\text{نها}_{س \leftarrow أ} \; د(س) = د(أ)$$

نواتج التعلّم

التمييز بين المفهوم الهندسى والمفهوم الجبرى لمتوسط التغير، وربطه بقيمة النهاية.

استعد

أوجد قيم النهايات الآتية.

(أ) $\text{نها}_{س \leftarrow -١} (س^{٢} - ١)$

(ب) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{٦هـ + ٢هـ^{٢}}{هـ}$

طريقة الحل

(أ) $\text{نها}_{س \leftarrow -١} (س^{٢} - ١)$

أوجدها بالتعويض بـس = −١

$= (-١)^{٢} - ١$

$= ٠$

(ب) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{٦هـ + ٢هـ^{٢}}{هـ}$

التعويض المباشر يجعل المقام صفرًا، فاختصر الكسر أولًا.

$= \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} (٦ + ٢هـ)$

أوجدها بالتعويض بـهـ = ٠

$= ٦ + ٢ \times ٠$

$= ٦$

أخطاء شائعة

$\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{٦هـ + ٢هـ^{٢}}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{٦ \times ٠ + ٢ \times ٠^{٢}}{٠}$

عوّضت بـهـ = ٠ مباشرة من البداية، فنتجت صورة غير معيَّنة مثل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

حاول

أوجد قيم النهايات الآتية.

(أ) $\lim_{هـ \to 0} (٣ - هـ)$

(ب) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٤س)$

(جـ) $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٣} - ٦هـ^{٢} + ١٢هـ}{هـ}$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد قيم النهايات الآتية.

(أ) $\lim_{هـ \to 0} (٤ + هـ)$

(ب) $\lim_{هـ \to 0} (هـ - ٥)$

(جـ) $\lim_{هـ \to 0} (٣ + ٤هـ)$

(د) $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - س)$

(هـ) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} + ٢س)$

(و) $\lim_{س \to -٢} (س^{٢} + ٣س)$

(ز) $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٢} - ٢هـ}{هـ}$

(ح) $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٣} + ٢هـ^{٢} + ٩هـ}{هـ}$

(ط) $\lim_{هـ \to 0} \frac{(٣ + هـ)^{٢} - ٣^{٢}}{هـ}$

★ التحدّي

إذا كانت

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٥س + ك}{س - ٣} = ل$$

(حيث ل عدد حقيقى)، فأوجد قيمة ل × ك.

٣-٧
الرياضيات

تعريف المعامل التفاضلى

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

تعريف المعامل التفاضلى دَ(أ)

للدالة د(س) قيمةُ نهاية متوسط التغيّر من س = أ إلى س = أ + هـ، وهى

$$\frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{هـ} \quad \text{(متوسط التغيّر)}$$

عندما تقترب هـ من الصفر، تُسمَّى **المعامل التفاضلى** للدالة د(س) عند س = أ، ويُرمز له بالرمز دَ(أ).

$$دَ(أ) = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{هـ}$$

نواتج التعلّم

التمييز بين المفهوم الهندسى والمفهوم الجبرى لمتوسط التغيّر. وربطه بقيمة النهاية للوصول إلى تعريف المعامل التفاضلى (المشتقة الأولى).

$\frac{د(أ+هـ)-د(أ)}{(أ+هـ)-أ}$

استعد

أوجد المعامل التفاضلى للدالة د(س) = ٣س^{٢} عند س = −٢ باستخدام التعريف.

طريقة الحل

عوّض بـ−٢ عن أ فى التعريف.

$$دَ(-٢) = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{د(-٢+هـ)-د(-٢)}{هـ}$$

$$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{٣(-٢+هـ)^{٢}-٣\times(-٢)^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{-١٢هـ+٣هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(-١٢+٣هـ)}{هـ}$$

$$= \text{نها}_{هـ \to ٠} (-١٢+٣هـ)$$

$$= -١٢$$

حاول

أوجد المعامل التفاضلى لكلّ من الدوال الآتية عند قيم س المعطاة، باستخدام التعريف.

(أ) د(س) = ٢س^{٢} [س = −١]

(ب) د(س) = −٢س^{٢} + ٣س + ١ [س = ٢]

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

المعاملُ التفاضليُّ عند نقطةٍ عددٌ لا دالّة.

تدريب

أوجد المعامل التفاضلى لكلّ من الدوال الآتية عند قيم س المعطاة، باستخدام التعريف.

(أ) د(س) = س^{٢} [س = −٢]

(ب) د(س) = −س^{٢} [س = −٢]

(جـ) د(س) = −٢س^{٢} [س = −٣]

(د) د(س) = ٢س^{٢} − ٣س [س = ٢]

(هـ) د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ [س = ٣]

(و) د(س) = ٢س^{٢} + س − ١ [س = −٢]

★ التحدّي

أوجد سرعة حجر ساقط. فى الفيزياء، تُنمذَج الإزاحة ف بالمتر التى يقطعها جسم ساقط تحت تأثير الجاذبية بعد ن ثانية بالدالة الآتية

ف(ن) = ٤٫٩ن^{٢}

أوجد سرعته اللحظية، أى المعامل التفاضلى للإزاحة بالنسبة إلى الزمن، عند ن = ١٠ ثوانٍ.

٤-٧
الرياضيات

تعريف المشتقة

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

تعريف المشتقة باستخدام النهايات، والتمييز بين متوسط معدل التغير ومعدل التغير اللحظي.

لاحِظ!

تعريف المشتقة دَ(س)

للدالة د(س)، إقران المعامل التفاضلي دَ(أ) بكل قيمة أ للمتغير س يعطى دالة جديدة.

تسمّى هذه الدالة الجديدة **مشتقة** الدالة المعطاة، ويرمز لها بالرمز دَ(س).

$$\text{دَ}(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

هذه صيغة تعريف المعامل التفاضلي مع استبدال أ بـ س.

تسمّى عملية إيجاد المشتقة دَ(س) **بالاشتقاق**.

استعد

اشتقّ الدالة د(س) = س^{٢} + ٣س باستخدام التعريف.

طريقة الحل

$$\text{دَ}(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\{(س + هـ)^{٢} + ٣(س + هـ)\} - (س^{٢} + ٣س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{٢هـس + هـ^{٢} + ٣هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} (٢س + هـ + ٣)$$

$$= ٢س + ٣$$

حاول

اشتقّ الدوال الآتية باستخدام التعريف.

(أ) د(س) = ٣س^{٢}

(ب) د(س) = س^{٢} + ٢س

(جـ) د(س) = ٢س^{٣} + ٣س – ١

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (جـ) ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

اشتقّ الدوال الآتية باستخدام التعريف.

(أ) د(س) = س^{٢}

(ب) د(س) = ٢س^{٢}

(جـ) د(س) = –٣س^{٢}

(د) د(س) = س^{٢} – ٤س

(هـ) د(س) = س^{٢} + ٣س + ٤

(و) د(س) = –٢س^{٢} – ٣س + ٢

(ز) د(س) = س^{٣}

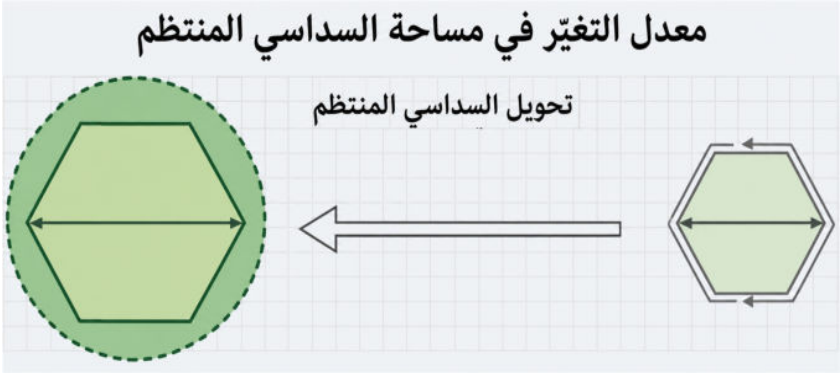
(ح) د(س) = ٢س^{٣} + س

(ط) د(س) = –س^{٣} + ٢س

عوّض عن د(س + هـ) أولًا، ثم اطرح د(س) واختصر هـ قبل أخذ النهاية.

★ التحدّي

صفيحة على شكل مسدس منتظم يزداد طول ضلعها س بانتظام. اكتب قاعدة مساحتها بدلالة س، ثم اشتقّ دالة المساحة باستخدام التعريف.



تأمّل

دالة د(س) معرَّفة بحيث د(س) = ٥ لكل قيم س عدا س = ٢، فهى غير معرَّفة عندها. هل النهاية نها$_{س \to ٢}$ د(س) موجودة؟ وما قيمتها؟ ووضّح لماذا لا يلزم أن تكون الدالة معرَّفة عند نقطة حتى تكون لها نهاية عندها.

٥-٧
الرياضيات

الاشتقاق باستخدام القوانين

الفصل السابع التفاضل والتكامل

المفهوم ٢ · التفاضل: أساليبه وتطبيقاته



يرصد باحثو البيئة فى محمية للحياة البرية أعداد نوع مهدّد بالانقراض على مدى الزمن. ولا يكفى لإنقاذه أن نعرف عدده الكلى فى آخر العام، بل لا بدّ من تحديد المعدل الدقيق لتزايد أعداده أو تناقصها فى أسبوع بعينه، حتى نكشف خطرًا بيئيًّا مفاجئًا.

وفى الفيزياء والهندسة، يقتضى رصد هذه التغيرات السريعة تتبع ميل المنحنى عند نقطة واحدة. وينتقل هذا الدرس من حساب النهايات إلى قوانين جبرية سريعة دقيقة، تعيد بناء الدوال كاملة، وترسم مسارات هذه الأنظمة المتغيرة.

السؤال الموجّه: كيف نستخدم مشتقة الدالة عند نقطة بعينها (س١، ص١) فى كتابة معادلة المستقيم الذى يمسّ المنحنى عند تلك النقطة وحدها؟ وكيف نعكس معدل التغير لنسترد الدالة نفسها؟

نواتج التعلّم

استنتاج قواعد الاشتقاق الأساسية، وتطبيق القوانين الرياضية لإيجاد مشتقات الدوال كثيرة الحدود والدوال المركّبة.

لاحظ!

مشتقة الدالة ص = د(س)، وهى دَ(س)، يُرمز لها أيضًا بالرمزين صَ و $\frac{ص}{س}$.

$\frac{ص}{س}$ تعنى اشتقاق ص بالنسبة إلى س

الاشتقاق باستخدام القوانين

فيما عدا المسائل التى تطلب الاشتقاق «بالتعريف»، اشتقّ باستخدام القانون $\frac{ك(س^{ن})}{ك س} = ن\,س^{ن-١}$.

مثال:

$\frac{ك}{ك س}(س^{٣}) = ٣س^{٢}$ $\quad$ $\frac{ك}{ك س}(س) = ١$ $\quad$ $\frac{ك}{ك س}(١) = ٠$

اطرح ١ من الأس، ثم أنزل الأس. وباعتبار ١ على الصورة س^{٠}، يكون الأس ٠.

$\frac{ك}{ك س}(٤س^{٣}) = ٤ \times ٣س^{٢}$

$= ١٢س^{٢}$

المعامل ٤ يبقى كما هو.

$\frac{ك}{ك س}(٢س^{٣} + ٥س + ٤)$

$= ٢ \times ٣س^{٢} + ١ \times ٥ + ٠$

$= ٦س^{٢} + ٥$

اشتقاق الحدّ الثابت يعطى ٠

فى الدوال كثيرة الحدود، اشتقّ كل حدّ على حدة.

الاشتقاق بالنسبة إلى متغيرات غير س

٠ استخدم الصورة $\frac{ك○}{ك○}$ حتى يتضح المتغير الذى جرى الاشتقاق بالنسبة إليه.

٠ عامل المتغيرات الأخرى معاملة الثوابت.

مثال: اشتقّ م = ٥هـ ت^{٢} بالنسبة إلى ت.

الرمز $\frac{م}{ك ت}$ يعنى اشتقاق م بالنسبة إلى ت

$\frac{م}{ك ت} = ٥هـ \times ٢ت$

$= ١٠هـ ت$

ويوجد المعامل التفاضلى دَ(أ) بالتعويض بـ س = أ فى دَ(س).

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ اشتقّ الدوال الآتية.

(أ) ص = س^{٢} – ٣س + ٢ (ب) ص = (٢س + ١)^{٣}

٢ اشتقّ ح = πنق^{٢} هـ بالنسبة إلى نق

٣ للدالة د(س) = س^{٣} – ٣س + ١، أوجد قيمة دَ(–١)

طريقة الحل

(أ) ص = س^{٢} – ٣س + ٢

صَ = ٢س – ٣

(ب) ص = (٢س + ١)^{٣}

ص = ٨س^{٣} + ١٢س^{٢} + ٦س + ١

صَ = ٢٤س^{٢} + ٢٤س + ٦

٢ ح = πنق^{٢} هـ

$\frac{\text{د ح}}{\text{د نق}}$ = π هـ × (٢نق)

= ٢π هـ نق

٣ د(س) = س^{٣} – ٣س + ١

دَ(س) = ٣س^{٢} – ٣

دَ(–١) = ٣(–١)^{٢} – ٣

= ٠

عامل المتغيرات غيرنقمعاملة الثوابت.

فكّ الأقواس أولًا.

أوجد أولًا دَ(س)

عوّض بـ–١ عن س فى دَ(س)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اشتقّ الدوال الآتية.

(أ) ص = ٣س – ٢ (ب) ص = –٣س^{٢} + ٨س – ٥

(جـ) ص = (س + ١)(س + ٢) (د) ص = ٢س^{٣} – ٤س^{٢} + ٦س – ٧

(هـ) ص = (٢س – ٣)^{٣} (و) ص = $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س^{٢} – س + ٤

٢ اشتقّ الدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير الموضّح بين القوسين [ ].

(أ) م = πنق^{٢}[نق] (ب) ع = ز ت – $\frac{١}{٢}$ هـ ت^{٢} [ت]

٣ للدالة د(س) = ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ٢، أوجد القيم الآتية.

(أ) دَ(٢) (ب) دَ(–٣)

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اشتقّ الدوال الآتية.

(أ) ص = ١٦

(ب) ص = −٢س

(جـ) ص = −٤س − ١

(د) ص = س^{٢} − ٣س + ٥

(هـ) ص = ٣س^{٢} − ٤س + ١

(و) ص = −٤س^{٢} − ٢س − ١

(ز) ص = (٢س + ٣)^{٢}

(ح) ص = (س + ١)(س − ١)

(ط) ص = (٢س − ١)(س + ٤)

(ي) ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢

(ك) ص = −٢س^{٣} + ٧س^{٢} − ٣س + ١

(ل) ص = ٣س^{٣} − ٥س^{٢} + ٤س − ١

(م) ص = (٣س + ١)^{٣}

(ن) ص = (س + ١)(س − ١)(٣ − س)

(س) ص = (س + ٢)(س + ١)(س − ٢)

(ع) ص = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٣س + ١

(ف) ص = $\frac{٢}{٣}$س^{٣} − $\frac{٥}{٢}$س^{٢} + ٢س − ٥

(ص) ص = $\frac{٥}{٦}$س^{٣} + $\frac{١}{٨}$س^{٢} − س + ٦

٢ اشتقّ الدوال الآتية بالنسبة إلى المتغير الموضّح بين القوسين [ ].

(أ) م = ٤π نق^{٢} [نق]

(ب) ح = $\frac{١}{٣}$π نق^{٣} [نق]

(جـ) ح = $\frac{٤}{٣}$π نق^{٣} [نق]

(د) ز = هـ ت [ت]

(هـ) ص = أ ت^{٢} − ب ت [ت]

(و) س = $\frac{١}{٢}$هـ ت^{٢} − ٣ت + ٤ [ت]

٣ للدالة د(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٣، أوجد القيم الآتية.

(أ) دَ(٣)

(ب) دَ(−٥)

٤ للدالة د(س) = −س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢، أوجد القيم الآتية.

(أ) دَ(٢)

(ب) دَ(−١)

٥ للدالة د(س) = $\frac{٢}{٣}$س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$س^{٢} + س − ٤، أوجد القيم الآتية.

(أ) دَ(٢)

(ب) دَ(−٣)

★ التحدّي

للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ + $\frac{١}{س^{٢}}$، أوجد قيمة دَ(١) + دَ(−١).

٦-٧
الرياضيات

تعيين الدالة

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

اشتقاق الدالة التربيعية د(س) = أس^{٢} + ب س + ج يعطى

دَ(س) = ٢أ س + ب

استعد

أوجد الدالة التربيعية د(س) التى تحقّق الشروط الآتية جميعها.

دَ(٠) = −٢، دَ(٢) = ٢، د(١) = ٢

طريقة الحل

لتكن الدالة التربيعية المطلوبة د(س) = أس^{٢} + ب س + ج، ومنها:

دَ(س) = ٢أ س + ب

∵ دَ(٠) = −٢، ب = −٢ .....(١)

∵ دَ(٢) = ٢، ٤ أ + ب = ٢ .....(٢)

∵ د(١) = ٢، أ + ب + ج = ٢ .....(٣)

بحلّ المعادلات الآنية (١) و(٢) و(٣) نحصل على أ = ١، ب = −٢، ج = ٣

∴ د(س) = س^{٢} − ٢ س + ٣

حاول

أوجد الدالة التربيعية د(س) التى تحقّق الشروط الآتية جميعها.

دَ(٠) = ٢، دَ(١) = ٤، د(٢) = ٦

تدريب

أوجد الدالة التربيعية د(س) التى تحقّق الشروط الآتية جميعها.

١ دَ(٠) = −٤، دَ(٢) = ٠، د(٠) = ٨

٢ دَ(٠) = ٣، دَ(−١) = ٨، د(٣) = −٦

٣ دَ(٢) = ٦، دَ(١) = ١٦، د(١) = ٧

٤ دَ(١) = −٤، دَ(−١) = ٨، د(٣) = −٦

★ التحدّي

أوجد الدالة التربيعية د(س) التى تحقّق الشروط الآتية جميعها:

دَ(٢) + دَ(٤) = ٠، د(٣) = ٠ ود(١) = ١٢

نواتج التعلّم

تعيين الدالة إذا أعطيت خواصّ تفاضلية لها (مثل مشتقتها) أو شروط عند نقاط بعينها.

أوجد أولًا دَ(س) لاستخدام دَ(٠) و دَ(٢)

عوّض بـ٠ عن س فى دَ(س)

عوّض بـ٢ عن س فى دَ(س)

عوّض بـ١ عن س فى د(س)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

٧-٧
الرياضيات

المماس (١)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

تطبيق المشتقة الأولى فى إيجاد معادلة المماس عند نقطة معلومة على منحنى، وتحليل الخواص الهندسية المرتبطة به.

لاحِظ!

معادلة المستقيم الذى ميله م ويمرّ بالنقطة (س١، ص١) هى

ص – ص١ = م(س – س١)

توجد معادلة المماس من **إحداثيى نقطة التماس**.

إذا كان إحداثيا نقطة التماس للمنحنى ص = د(س) هما (أ، د(أ))، فإن

- ميل المماس ← دَ(أ)
- إحداثيا النقطة المعطاة ← (أ، د(أ))

استعد

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} – ٤س + ١ عند النقطة (٣، – ٢)

طريقة الحل

من المناسب أن تضعها فى صورة د(س) لإيجاد دَ(أ).

ليكن د(س) = س^{٢} – ٤س + ١

دَ(س) = ٢س – ٤

∴ دَ(٣) = ٢ × ٣ – ٤ = ٢

∴ المستقيم المطلوب ميله ٢ ويمرّ بالنقطة (٣، – ٢)، ومنه:

ص + ٢ = ٢(س – ٣)

وبالترتيب نحصل على ص = ٢س – ٨

حاول

أوجد معادلة المماس لمنحنى كلّ من الدوال الآتية عند النقطة المعطاة.

(أ) ص = س^{٢} + ٣ (٢،–٧)

(ب) ص = س^{٢} – ٣س + ٢ (١،٠)

(ج) ص = –س^{٣} + ٢س + ٤ (٢،–٨)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد معادلة المماس لمنحنى كلّ من الدوال الآتية عند النقطة المعطاة.

(أ) ص = س^{٢} – ١ (٣،٢)

(ب) ص = س^{٢} + ٢س (٣،١)

(جـ) ص = س^{٢} – ٣س (٢ – ،٢)

(د) ص = س^{٢} + ٣س – ٦ (٨ – ،١–)

(هـ) ص = ٢س^{٢} – ٤س + ٣ (٣،٠)

(و) ص = ٢س^{٢} + ٣س – ١ (٤،١)

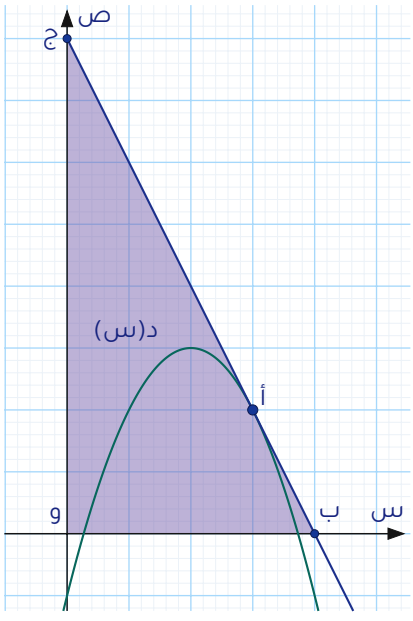
(ز) ص = س^{٣} – ٣س (٢،٢)

(ح) ص = س^{٣} – ٤س (٣ – ،١)

(ط) ص = س^{٣} + ٦س^{٢} + س + ١ (١،٠)

★ التحدّي

مماس منحنى الدالة د(س) = – س^{٢} + ٤س – ١ عند النقطة التى إحداثيها السينى ٣ يقطع محورى السينات والصادات فى النقطتين ب، ج على الترتيب. أوجد مساحة المثلث و ب ج.



٨-٧
الرياضيات

المماس (٢)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحظ!

لإيجاد معادلة مماس دون معرفة نقطة التماس، **افرض أن نقطة التماس هى (أ ، د(أ))**

نواتج التعلّم

تطبيق المشتقة الأولى فى إيجاد معادلة المماس عند نقطة معلومة على منحنى، وتحليل الخواصّ الهندسية المرتبطة به.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة جـ(٠ ، ٢) لمنحنى الدالة
ص = س^{٢} – ٣س + ٦

٢ لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + ٤س^{٢} – ٣، أوجد معادلة المماس الذى ميله ٣

طريقة الحل

١ ليكن د(س) = س^{٢} – ٣س + ٦

افرض أن نقطة تماس المماس المطلوب هى (أ ، أ^{٢} – ٣أ + ٦)

∵ دَ(س) = ٢س – ٣،

∴ ميل المماس دَ(أ) = ٢أ – ٣

∴ المماس المطلوب ميله ٢أ – ٣ ويمرّ بالنقطة (أ ، أ^{٢} – ٣أ + ٦)، ومنه:

ص – (أ^{٢} – ٣أ + ٦) = (٢أ – ٣)(س – أ) .....(١)

∵ المستقيم (١) يمرّ بالنقطة جـ(٠ ، ٢):

٢ – (أ^{٢} – ٣أ + ٦) = (٢أ – ٣)(٠ – أ)

وبالترتيب نحصل على أ^{٢} – ٤ = ٠

وبالحلّ نحصل على أ = –٢ أو ٢

∴ معادلتا المماسين المطلوبين هما:

بالتعويض بـ–٢ عن أ فى (١):

ص – {(–٢)^{٢} – ٣ × (–٢) + ٦} = {٣ – (–٢) × ٢}{س – (–٢)}

وبالترتيب نحصل على ص = –٧س + ٢

بالتعويض بـ٢ عن أ فى (١):

ص – (٢^{٢} – ٣ × ٢ + ٦) = (٣ – ٢ × ٢)(س – ٢)

وبالترتيب نحصل على ص = س + ٢

∴ ص = –٧س + ٢ أو ص = س + ٢

من المناسب أن تضعها فى صورة د(س).

افرض أن نقطة التماس هى (أ ، د(أ)).

٢ ليكن د(س) = س^{٣} + ٤ س^{٢} – ٣

من المناسب أن تضعها فى صورة د(س).

افرض أن نقطة التماس هى (أ ، أ^{٣} + ٤ أ^{٢} – ٣) .....(١)

افرض أن نقطة التماس هى (أ ، د(أ)).

∵ دَ(س) = ٣ س^{٢} + ٨ س،

دَ(أ) = ٣ أ^{٢} + ٨ أ

ميل المماس ٣.

∵ دَ(أ) هو ميل المماس، ٣ أ^{٢} + ٨ أ = ٣

وبالحلّ نحصل على أ = –٣ أو $\frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١)، تكون نقطتا التماس (–٣ ، ٦) أو ($\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٦٨}{٢٧}$)

∴ معادلتا المماسين المطلوبين هما:

إذا كانت نقطة التماس (–٣ ، ٦)، ص – ٦ = ٣{س – (–٣)}

وبالترتيب نحصل على ص = ٣ س + ١٥

وإذا كانت نقطة التماس ($\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٦٨}{٢٧}$)

$$ص + \frac{٦٨}{٢٧} = ٣\left(س - \frac{١}{٣}\right)$$

وبالترتيب نحصل على ص = ٣ س – $\frac{٩٥}{٢٧}$

∴ ص = ٣ س + ١٥ أو ص = ٣ س – $\frac{٩٥}{٢٧}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة جـ(١ ، –١) لمنحنى الدالة
ص = س^{٢} – س + ٣

٢ لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + ٢ س – ٣، أوجد معادلة المماس الذى ميله ٥

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة جـ(١ ، –٢) لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + ١

٢ أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة جـ(٣ ، ٤) لمنحنى الدالة
ص = – س^{٢} + ٣ س

٣ أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة جـ(١ ، ١) لمنحنى الدالة
ص = – س^{٢} + س – ٣

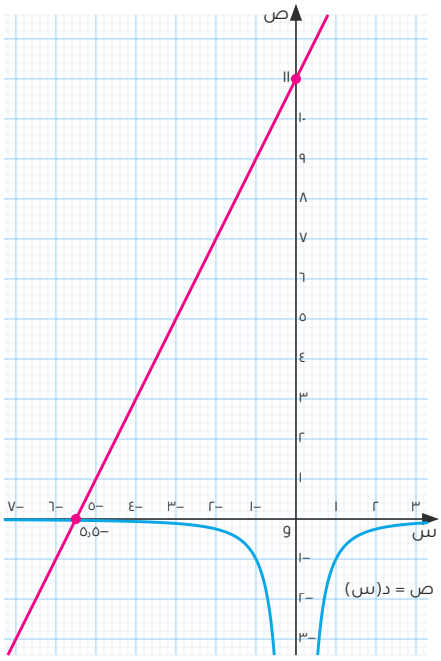
٤ لمنحنى الدالة ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٦، أوجد معادلة المماس الذى ميله ٩

٥ لمنحنى الدالة ص = س^{٣} – س، أوجد معادلة المماس الذى ميله –١

٦ لمنحنى الدالة ص = – س^{٣} + ١٠ س، أوجد معادلة المماس الذى ميله –٢

★ التحدّي

لمنحنى الدالة د(س) = $-\frac{١}{س^{٢}}$، أوجد معادلة المماس الموازى للمستقيم الذى معادلته: ٢ س – ص + ١١ = ٠



المماسان المتوازيان لهما الميل نفسه، فميل المماس المطلوب هو ميل المستقيم المعطى.

تأمّل
كيف يساعدنا استخدام المماس فى تقريب المنحنى عند نقطة واحدة على التنبؤ بأنماط واقعية مركّبة وفهمها، مثل تغيرات الطقس أو تحولات الأسواق، حتى حين تبدو تلك الأنظمة غير قابلة للتنبؤ؟

٩-٧
الرياضيات

منحنى الدوال التكعيبية وقيمها العظمى

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

تحليل منحنيات الدوال التكعيبية والدوال من الدرجة الرابعة، وتعيين نقطها الحرجة، وتحديد فترات التزايد والتناقص، وتصنيف القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة.

المفهوم ٣ · تطبيقات التفاضل: الدوال كثيرة الحدود

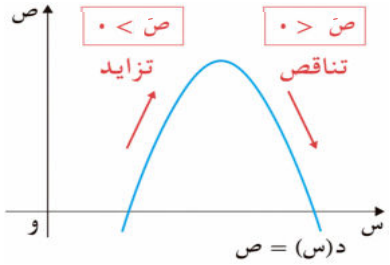


مهندسو الطيران والفضاء الذين يصمّمون الأفعوانية أو يتتبّعون مسار إطلاق صاروخ متعدّد المراحل لا يكفيهم خطّ مستقيم ولا قطع مكافئ بسيط. يتغير استهلاك الصاروخ للوقود وتسارعه ومقاومة الهواء له تغيرًا حادًّا كلما ارتفع، فينشأ منحنى معقّد له قمم وقيعان ونقاط انقلاب. ولضمان سلامة البناء واقتصاد الوقود، يلزم المهندس أن يعرف مواضع هذه القمم بالضبط، وأن يحدّد هل يتجاوز المسار حدود الأمان. وبتحليل مشتقات الدوال كثيرة الحدود من الدرجتين الثالثة والرابعة نملك الأدوات اللازمة لرسم هذه المسارات، ونحلّ معادلات الدرجات العليا، ونثبت حدود الأمان قبل تصنيع أي قطعة.

السؤال الموجّه: كيف نتتبّع نقاط تحوّل دالة كثيرة الحدود من درجة عليا بمشتقتها الأولى؟ وكيف نعيّن عدد الجذور الحقيقية لمعادلتها بالمميِّز، ونبني براهين دقيقة لمتباينات كثيرات الحدود؟

لاحظ!

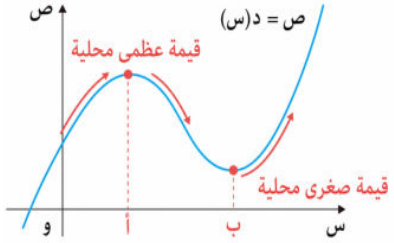
يعرف تزايد الدالة ص = د(س) أو تناقصها بتحديد إشارة صَ



في مدى س حيث صَ > ٠ تكون ص = د(س) متزايدة.

في مدى س حيث صَ < ٠ تكون ص = د(س) متناقصة.

إذا تغيرت إشارة صَ من الموجب إلى السالب حول س = أ، فإن د(أ) تسمّى قيمة



إذا تغيرت إشارة صَ من السالب إلى الموجب حول س = ب، فإن د(ب) تسمّى قيمة صغرى محلية.

تسمّى القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية معًا القيم القصوى.

لرسم منحنى دالة تكعيبية ص = د(س)، ارسم دائمًا منحنى صَ وكوّن جدول الإشارة.

استعد

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٦

(ب) ص = – س^{٣} + ٣س^{٢} – ٥

(جـ) ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٢س

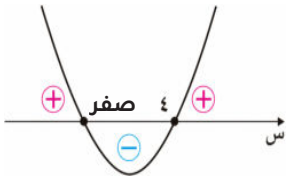
طريقة الحل

(أ) أوجد المشتقة.

ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٦ ⇐ صَ = ٣س^{٢} – ١٢س

أوجد قيم س التى تجعل صَ = ٠، وارسم الشكل العام لمنحنى صَ

بحلّ ٣س^{٢} – ١٢س = ٠ نحصل على س = ٠ أو ٤



كوّن جدول الإشارة.

س	.....	٤	.....	٠	.....
صَ	+	٠	–	٠	+
ص	↗	قيمة صغرى محلية	↘	قيمة عظمى محلية	↗

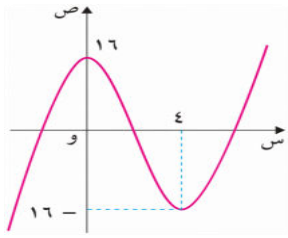
لها قيمة عظمى محلية عند س = ٠، عوّض بـ٠ عن س فى ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٦ للحصول على القيمة العظمى المحلية ١٦

لها قيمة صغرى محلية عند س = ٤، عوّض بـ٤ عن س فى ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ١٦ للحصول على القيمة الصغرى المحلية –١٦

∴ جدول الإشارة كما يأتى.

س	.....	٤	.....	٠	.....
صَ	+	٠	–	٠	+
ص	↗	قيمة صغرى محلية –١٦	↘	قيمة عظمى محلية ١٦	↗

ارسم المنحنى بالاعتماد على جدول الإشارة، ويكون المنحنى كما فى الشكل الآتى.



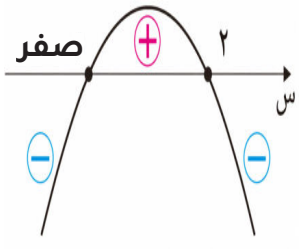
قيمة عظمى محلية ١٦ عند س = ٠، وقيمة صغرى محلية –١٦ عند س = ٤

اقرأ الإشارات من اليسار إلى اليمين: موجب، ثم صفر عند س = ٠، ثم سالب، ثم صفر عند س = ٤، ثم موجب.

املأ هذا الصف أولًا، وحدّد الإشارات من منحنى صَ.

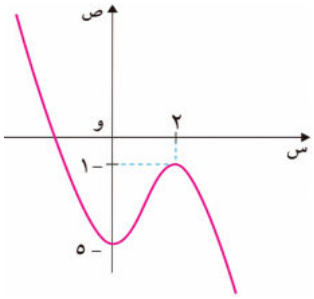
صَ > ٠ متزايدة، وصَ < ٠ متناقصة.

(ب) ص = $-س^{٣} + ٣س^{٢} - ٥ \Leftarrow$ صَ = $-٣س^{٢} + ٦س$



س	.....	٢	.....	٠	.....
صَ	−	٠	+	٠	−
ص	↘	قيمة عظمى محلية −١	↗	قيمة صغرى محلية −٥	↘

قيمة صغرى محلية −٥ عند س = ٠، وقيمة عظمى محلية −١ عند س = ٢



(جـ) ص = $س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٢س$

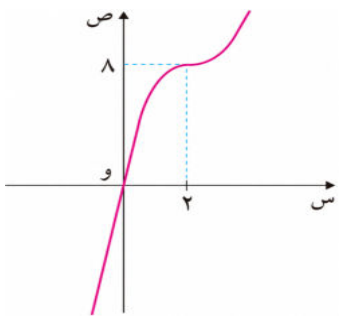
صَ = $٣س^{٢} - ١٢س + ١٢$



س	.....	٢	.....
صَ	+	٠	+
ص	↗	٨	↗

∵ إشارة صَ لا تتغير حول س = ٢ ∴ العدد ٨ ليس قيمة قصوى، وعند س = ٢ يكون صَ = ٠ أى أن الميل يساوى صفرًا.

لا توجد قيم قصوى.



حاول

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = س^{٣} – ٣س^{٢} + ١

(ب) ص = – س^{٣} + ٣س + ٢

(جـ) ص = س^{٣} + ٦س^{٢} + ١٢س

تدريب

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = س^{٣} – ٣س

(ب) ص = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٢

(جـ) ص = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س – ٤

(د) ص = – س^{٣} + ٣س

(هـ) ص = –٢س^{٣} + ٦س^{٢} – ٨

(و) ص = – س^{٣} + ٦س^{٢} – ٩س + ١

(ز) ص = س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س + ١

(ح) ص = س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٧س + ٢٥

(ط) ص = – س^{٣} + ٦س^{٢} – ١٢س + ١

★ التحدّي

يصمّم فريق هندسى توربينًا مائيًّا متغير الريش لسدّ كهرومائى جديد. تتذبذب كفاءة التوربين تبعًا لمعدل تدفّق الماء. ليكن س معدل التدفّق الداخل إلى الحجرة (بآلاف اللترات فى الثانية). وتنمذج كفاءة القدرة الناتجة (بالميجاوات) بالدالة التكعيبية الآتية

ل(س) = س^{٣} – ٣أس^{٢} + (٣أ^{٢} – ٣)س + ٤

حيث أ (أ > ٠) وسيط فيزيائى قابل للضبط، يقابل زاوية ميل ريش التوربين الداخلية.

مهمّة المهندسين: أوجد معدل التدفّق س الذى يحقّق أعلى كفاءة للقدرة، ومعدل التدفّق الذى يهبط بالكفاءة إلى أدنى قيمة، بدلالة وسيط زاوية الريش أ.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (جـ) ثم ناقشوا الإجابة.

١-٧
الرياضيات

القيم العظمى والصغرى للدوال التكعيبية

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

تطبيق اختبار المشتقة الأولى فى تعيين القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التكعيبية.

لاحظ!

لإيجاد القيمتين العظمى والصغرى لدالة تكعيبية، كوّن **جدول الإشارة**، ثم قارن القيم القصوى بالقيمتين عند طرفى المجال.

استعد

أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة الآتية
ص = −س^{٣} + ١٢س + ٥ (−٣ ≤ س ≤ ٤).

طريقة الحل

ص = −س^{٣} + ١٢س + ٥

صَ = −٣س^{٢} + ١٢

إذا كان صَ = ٠، فإن −٣س^{٢} + ١٢ = ٠

∴ س = ±٢

∴ جدول الإشارة فى −٣ ≤ س ≤ ٤ كما يأتى.

س	٤	.....	٢	.....	−٢	.....	−٣
صَ		−	٠	+	٠	−	
ص	−١١	↘	قيمة عظمى محلية ٢١	↗	قيمة صغرى محلية −١١	↘	−٤

∴ هذه الدالة

لها قيمة عظمى ٢١ عند س = ٢، ولها قيمة صغرى −١١ عند س = −٢ أو ٤

قارن بين القيم القصوى والقيمتين عند الطرفين.

حاول

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لكلّ من الدوال الآتية.

(أ) ص = $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢$ $(-١ \leq س \leq ٢)$

(ب) ص = $-٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ٣$ $(-١ \leq س \leq ٢)$

تدريب

أوجد القيمتين العظمى والصغرى لكلّ من الدوال الآتية.

(أ) ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥$ $(-١ \leq س \leq ٣)$

(ب) ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ١١$ $(-٢ \leq س \leq ٣)$

(جـ) ص = $٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٢س + ١٣$ $(-٣ \leq س \leq ٣)$

(د) ص = $-س^{٣} + ٣س + ٣$ $(-٢ \leq س \leq ٢)$

(هـ) ص = $-س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤$ $(-٢ \leq س \leq ٤)$

(و) ص = $-٢س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س + ٣$ $(-١ \leq س \leq ٤)$

★ التحدّي

يختبر فريق هندسة بحرية غوّاصة بحثية ذاتية القيادة للأعماق فى حوض لمحاكاة الأمواج، ويرصد عمق الغوّاصة منسوبًا إلى طبقة تيار ثابتة خلال نافذة اختبار مدّتها ٦ ساعات بالضبط.

ليكن ن الزمن بالساعات منسوبًا إلى نقطة منتصف الاختبار، يمتدّ من ٣ ساعات قبلها (ن = −٣) إلى ٣ ساعات بعدها (ن = ٣)، أى $-٣ \leq ن \leq ٣$. وينمذج الموضع الرأسى للغوّاصة د(ن) بالمتر منسوبًا إلى الطبقة المرجعية بالدالة الآتية

$$د(ن) = ن^{٣} - ٦ن$$

مهمّة المهندسين: أوجد أعمق غوص (القيمة الصغرى المطلقة) وأعلى صعود (القيمة العظمى المطلقة) تبلغهما الغوّاصة خلال نافذة الاختبار كلها.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

١١-٧
الرياضيات

تعيين الدالة من قيمها العظمى

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

ربط المميّز بجذور المعادلات التكعيبية؛ لحلّ هذه المعادلات واستنتاج حلولها هندسيًّا وجبريًّا.

لاحِظ!

إذا كان للدالة د(س) قيمة قصوى م عند س = أ، فإن د(أ) = م ودَ(أ) = ٠

استعد

إذا كان للدالة د(س) = –س^{٣} + أ س + ب قيمة عظمى محلية ٩ عند س = ٢، فأوجد قيمتى الثابتين أ، ب. ثم أوجد القيمة الصغرى المحلية.

طريقة الحل

د(س) = –س^{٣} + أ س + ب

دَ(س) = –٣س^{٢} + أ

وبما أن لها قيمة عظمى محلية ٩ عند س = ٢، فإن د(٢) = ٩ ودَ(٢) = ٠

من د(٢) = ٩ نجد أن –٢^{٣} + أ × ٢ + ب = ٩، وبإعادة الترتيب ينتج ٢أ + ب = ١٧ ..... (١)

ومن دَ(٢) = ٠ نجد أن –٣ × ٢^{٢} + أ = ٠، وبإعادة الترتيب ينتج أ = ١٢ ..... (٢)

وبحلّ المعادلتين (١) و(٢) معًا ينتج أ = ١٢، ب = –٧

ولإيجاد القيمة الصغرى المحلية عوّض بـ٢ بدلًا من أ وبـ–٧ عن ب فى د(س) ودَ(س):

د(س) = –س^{٣} + ١٢ س – ٧

دَ(س) = –٣س^{٢} + ١٢

وإذا كان دَ(س) = ٠، فإن –٣س^{٢} + ١٢ = ٠، أى س = ±٢

ومن ثمّ نحصل على جدول الإشارة الآتى

س	.....	٢	.....	–٢	.....
دَ(س)	–	٠	+	٠	–
د(س)	↘	قيمة عظمى محلية ٩	↗	قيمة صغرى محلية	↘

وبما أن لها قيمة صغرى محلية عند س = –٢، فإن

د(–٢) = –(–٢)^{٣} + ١٢ × (–٢) – ٧ = –٢٣

أ = ١٢، ب = –٧، والقيمة الصغرى المحلية –٢٣ عند س = –٢

ولها قيمة عظمى محلية عند س = ٢.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} + أ س + ب قيمة صغرى محلية ٤ عند س = ٣،
فأوجد قيمتى الثابتين أ، ب. ثم أوجد القيمة العظمى المحلية.

٢ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ج قيمة عظمى محلية ٧
عند س = –١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣، فأوجد قيم الثوابت أ، ب، ج

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان للدالة د(س) = –س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ٢ قيمة عظمى محلية ٢
عند س = ٣، فأوجد قيمتى الثابتين أ، ب. ثم أوجد القيمة الصغرى المحلية.

٢ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ١٠ قيمة صغرى محلية –٧٠
عند س = ٤، فأوجد قيمتى الثابتين أ، ب. ثم أوجد القيمة العظمى المحلية.

٣ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ١ قيم قصوى عند س = –٣
وعند س = ١، فأوجد قيمتى الثابتين أ، ب

٤ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ج قيمة عظمى محلية ٢
عند س = ٠، وقيمة صغرى محلية عند س = ٢، فأوجد قيم الثوابت أ، ب، ج

٥ إذا كان للدالة د(س) = ٢س^{٣} + ٣أ س^{٢} + ب س + ج قيمة عظمى محلية ٩
عند س = –١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٢، فأوجد قيم الثوابت أ، ب، ج

٦ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ج قيمة عظمى محلية ٣٤
عند س = –١، وقيمة صغرى محلية عند س = ٥، فأوجد قيم الثوابت أ، ب، ج

★ التحدّي

تبنى شركةُ هندسةٍ زراعيةٍ قناةَ مياهٍ تجرى بالجاذبية عبر وادٍ صحراوى. ولمنع الفيضان، يتبع مقطعُ عمقِ قاعِ القناة الخرسانية مسارًا تكعيبيًّا دقيقًا

د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س + ج

حيث س المسافة الأفقية (بالكيلومترات) من بوابة الخزان الرئيسة، ود(س) منسوب البناء (بالأمتار) فوق مستوى مرجعى.

قيود التصميم: ١ قمة الأمان: عند س = –٢ كيلومتر، يبلغ ارتفاع القناة قيمة عظمى محلية مقدارها ١٧٨ مترًا؛ لتتفادى تكوينًا صخريًّا تحت الأرض. ٢ منخفض المحبس: عند س = ٤ كيلومترات، يمرّ ارتفاع القناة بقيمة صغرى محلية؛ لتجميع الطمى قبل مركز التوزيع الرئيس.

المطلوب: أوجد القيم المضبوطة لثوابت التصميم أ، ب، ج

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

كلُّ قيمة قصوى تعطى معادلتين:
موضعُها يعطى د`(س) = ٠،
ومقدارُها يعطى قيمة د(س) عنده.

١٢-٧ الدوال التكعيبية والمميِّز (١)

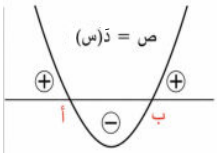
الرياضيات

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

عند وجود شرط على **القيم القصوى** لدالة تكعيبية ص = د(س)، افحص إشارة **المميِّز** Δ للمعادلة د'(س) = ٠

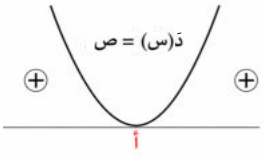
• إذا كان للدالة ص = د(س) قيم قصوى، فإن Δ > ٠



س	.....	أ	.....	ب	.....
د'(س)	+	٠	−	٠	+
د(س)	↗	قيمة عظمى محلية	↘	قيمة صغرى محلية	↗

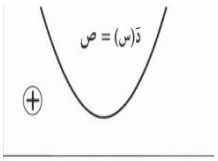
• إذا لم يكن للدالة ص = د(س) قيم قصوى، فإن Δ ≥ ٠

Δ = ٠



س	.....	أ	.....
د'(س)	+	٠	+
د(س)	↗		↗

Δ < ٠



س	.....
د'(س)	+
د(س)	↗

استعد

إذا لم يكن للدالة د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + ك س + ٢ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

طريقة الحل

د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + ك س + ٢

د'(س) = ٣س^{٢} – ٦ك س + ك

∵ الدالة د(س) ليس لها قيم قصوى ∴ المميِّز Δ للمعادلة ٣س^{٢} – ٦ك س + ك = ٠ يحقّق Δ ≥ ٠، أى أن:

(–٦ك)^{٢} – ٤ × ٣ × ك ≥ ٠

وبالحلّ نجد ٠ ≥ ك ≥ $\frac{١}{٣}$

نواتج التعلّم

ربط المميِّز بجذور المعادلات التكعيبية؛ لحلّ هذه المعادلات واستنتاج حلولها هندسيًّا وجبريًّا.

د'(س) = ٠ لها جذران حقيقيان مختلفان.

د'(س) = ٠ لها جذر حقيقى مكرَّر، أو ليس لها جذور حقيقية.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا لم يكن للدالة د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + ٣س + ١ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٢ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + ٢ك س^{٢} – ك س + ٥ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا لم يكن للدالة د(س) = ٢س^{٣} + ٣ك س^{٢} + ٦س قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٢ إذا لم يكن للدالة د(س) = س^{٣} – ٢ك س^{٢} + ٢ك س + ١ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٣ إذا لم يكن للدالة د(س) = س^{٣} – ك س^{٢} – ك س – ٢ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٤ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٥ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + ٣ك س^{٢} + س – ٣ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٦ إذا كان للدالة د(س) = س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ك س^{٢} – ك س + ١ قيم قصوى، فأوجد مدى قيم الثابت ك

★ التحدّي

يصمّم مهندس فى مدينة ملاهى قطاع الهبوط الأول من قطار سريع جديد. ولتكون الرحلة مثيرة، لا بدّ أن يحتوى مسار القطار على قمة محلية وقاع محلى معًا. ويأخذ منسوب هذا القطاع صورة الدالة التكعيبية

د(س) = س^{٣} + ٣ك س^{٢} + ١٢ك س + ١٠

حيث س المسافة الأفقية (بوحدة عشرة أمتار) من بداية المنصّة، ود(س) الارتفاع بالأمتار، وك ثابت تقوية إنشائية قابل للضبط.

المطلوب من المهندسين: أوجد المدى المضبوط لقيم الثابت ك الذى يضمن أن يكون لمسار القطار قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية معًا.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

١٣-٧ الدوال التكعيبية والمميِّز (٢)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

الرياضيات

لاحِظ!

إذا كانت الدالة التكعيبية ص = د(س) **متزايدة دائمًا**، فإن المميِّز Δ للمعادلة دَ(س) = ٠ يحقّق Δ ≤ ٠، ومعامل س^{٢} فى دَ(س) موجب.

استعد

إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + (ك^{٢} + ٥)س + ٣ متزايدة دائمًا،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

طريقة الحل

د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + (ك^{٢} + ٥)س + ٣

دَ(س) = ٣س^{٢} – ٦ك س + (ك^{٢} + ٥)

∵ الدالة د(س) متزايدة ∴ المميِّز Δ للمعادلة ٣س^{٢} – ٦ك س + (ك^{٢} + ٥) = ٠ يحقّق Δ ≤ ٠،
أى أن:

(–٦ك)^{٢} – ٤ × ٣ × (ك^{٢} + ٥) ≤ ٠

وبحلّ هذه المتباينة ينتج $-\frac{\sqrt{١٠٧}}{٢} \leq ك \leq \frac{\sqrt{١٠٧}}{٢}$

الشرط Δ ≤ ٠ لا المتباينة الحادّة: عند Δ = ٠ يبقى دَ(س) ≥ ٠ لكل س، فتبقى الدالة متزايدة.

معامل س^{٢} فى دَ(س) هو ٣، وهو موجب دائمًا، فيكفى شرط المميِّز.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + ٣ك س متزايدة، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٢ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} + ٢ك س^{٢} + (ك^{٢} + ٤)س – ١ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نواتج التعلّم

ربط المميِّز بجذور المعادلات التكعيبية؛ لحلّ هذه المعادلات واستنتاج حلولها هندسيًّا وجبريًّا.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} – ٣ك س^{٢} + ٣س – ٤ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

٢ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} – س^{٢} + ك س + ٢ متزايدة، فأوجد مدى قيم الثابت ك

٣ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} – ٢ك س + ٥ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

٤ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + (ك + ٦)س + ٥ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

٥ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + (–ك^{٢} + ١٢)س + ٤ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

٦ إذا كانت الدالة د(س) = س^{٣} + ٢ك س^{٢} + (–ك^{٢} + ٧)س – ١ متزايدة،
فأوجد مدى قيم الثابت ك

★ التحدّي

تحلّل شركة طاقة نظيفة مؤشّر كفاءة الأداء فى شبكة كهرباء ذكية، وتتابعه مع زيادة حمل التوزيع فوق السعة الأساسية. ليكن س معامل حمل التوزيع فى فترة التوسّع التشغيلى س ≤ ١، ويأخذ تقدير استقرار الشبكة صورة الدالة التكعيبية

$$د(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} – ك س^{٢} + (ك + ٦)س + ١٠$$

(حيث ك ثابت تنظيم جهد قابل للضبط). أوجد المدى المضبوط لقيم الثابت ك الذى يجعل تقدير الاستقرار متزايدًا عند كل أحمال التشغيل التى تحقّق س ≤ ١.

١٤-٧
الرياضيات

الدوال التكعيبية والمعادلات التكعيبية (١)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

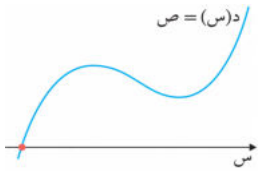
نواتج التعلّم

تحليل المعادلات التكعيبية بالمشتقات: لتعيين النقاط الحرجة، وتقصّى تزايد الدالة وتناقصها، ثم استخدام ذلك فى تحديد عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة.

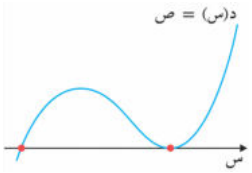
لاحِظ!

عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التكعيبية د(س) = ٠ يساوى عدد نقاط تقاطع محور س مع منحنى الدالة التكعيبية ص = د(س)

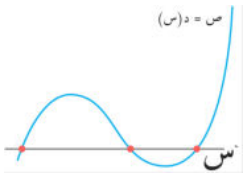
وفى المسائل التى تطلب عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة د(س) = ٠ ارسم منحنى الدالة ص = د(س)



١ جذر حقيقى



٢ جذران حقيقيان



٣ جذور حقيقية

استعد

أوجد عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س – ٣ = ٠

طريقة الحل

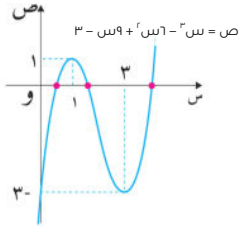
ارسم منحنى الدالة ص = د(س)

ليكن د(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س – ٣

دَ(س) = ٣س^{٢} – ١٢س + ٩

عندما دَ(س) = ٠ يكون س = ١ أو ٣

س	.....	٣	.....	١	.....
دَ(س)	+	٠	–	٠	+
د(س)	↗	–٣	↘	١	↗



ومن الرسم، للمعادلة ٣ جذور حقيقية

حاول

أوجد عدد الجذور الحقيقية المختلفة لكل معادلة مما يأتى.

(أ) $-س^{٣} + ١٢س = ٠$

(ب) $-٤س^{٣} + ١٢س^{٢} + ١٦ = ٠$

(جـ) $س^{٣} - ٣س - ٢ = ٠$

تدريب

أوجد عدد الجذور الحقيقية المختلفة لكل معادلة مما يأتى.

(أ) $-س^{٣} + ٢ = ٠$

(ب) $س^{٣} + ٢س^{٢} + س = ٠$

(جـ) $٤س^{٣} - ١٢س = ٠$

(د) $س^{٣} - ٣س^{٢} = ٠$

(هـ) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ١ = ٠$

(و) $س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣٦س = ٠$

(ز) $٣س^{٣} + ١٨س^{٢} + ١٢ = ٠$

(ح) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س - ٥ = ٠$

(ط) $٢س^{٣} + ١٨س^{٢} + ٣٠س - ١ = ٠$

★ التحدّي

أوجد عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة الآتية

$-هـ^{٣} + ١٢هـ^{٢} - ٣٦هـ + ٤٠ = ٠$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (جـ) من «تدريب» ثم ناقشوا الإجابة.

١٥-٧
الرياضيات

الدوال التكعيبية والمعادلات التكعيبية (٢)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

تحليل المعادلات التكعيبية بالمشتقات: لتعيين النقاط الحرجة، وتقصّى تزايد الدالة وتناقصها، ثم استخدام ذلك فى تحديد عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة.

لاحِظ!

إذا احتوى الحدّ المطلق فى المعادلة على وسيط (حرف متغيّر)، فأعد كتابتها فى الصورة د(س) = (الوسيط)

ثم أوجد عدد نقاط تقاطع منحنى الدالة ص = د(س) مع المستقيم ص = (الوسيط).

استعد

إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة $-س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س + أ = ٠$ يساوى ٣، فأوجد مدى قيم الثابت أ.

طريقة الحل

$-س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س + أ = ٠$

$-س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س = -أ$

$س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س = أ$

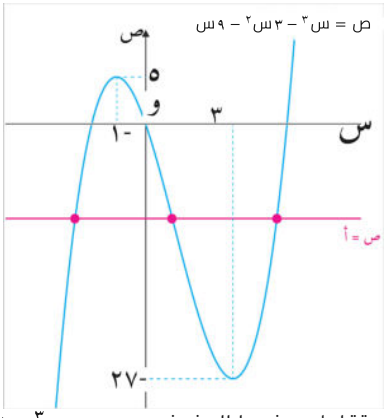
عدد جذور هذه المعادلة يساوى عدد نقاط تقاطع المنحنى ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س$ مع المستقيم ص = أ.

ليكن د(س) = $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س$

$د'(س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٩$

عندما $د'(س) = ٠$ يكون س = –١ أو ٣

س	.....	٣	.....	–١	.....
$د'(س)$	+	٠	–	٠	+
د(س)	↗	–٢٧	↘	٥	↗



ومن الرسم، فإن مدى القيم التى يتقاطع عندها المنحنى ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س$ مع المستقيم ص = أ فى ٣ نقاط بالضبط هو

$-٢٧ < أ < ٥$

أعد الكتابة فى الصورة د(س) = (الوسيط).

يسهل التفكير إذا كان الوسيط موجبًا، فاضرب الطرفين فى –١.

لاحِظ أنه عند أ = –٢٧ أو ٥ يصير عدد نقاط التقاطع ٢، فلا تدخل هاتان القيمتان فى المدى.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ١٢ س – أ = ٠ يساوى ٣، فأوجد مدى قيم الثابت أ.

٢ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة س^{٣} – ٣س^{٢} – ٢٤ س + أ = ٠ يساوى ٢، فأوجد قيمة (أو قيم) الثابت أ.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة ٢س^{٣} – ١٢ س^{٢} + ١٨ س + أ = ٠ يساوى ٣، فأوجد مدى قيم الثابت أ.

٢ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة –٢س^{٣} – ٣س^{٢} – أ = ٠ يساوى ٣، فأوجد مدى قيم الثابت أ.

٣ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة س^{٣} – ٣س^{٢} – أ = ٠ يساوى ٢، فأوجد قيمة (أو قيم) الثابت أ.

٤ إذا كان عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة س^{٣} + ٥س^{٢} + ٣س – أ = ٠ يساوى ٢، فأوجد قيمة (أو قيم) الثابت أ.

★ التحدّي

لتكن الدالة معرَّفة كما يأتى

د(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س – ٢أ^{٢} + ٧أ

أوجد كل القيم الحقيقية للوسيط الثابت أ التى يكون عندها عدد الجذور الحقيقية المختلفة للمعادلة د(س) = ٢ مساويًا ٣ بالضبط.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

٧-١٦
الرياضيات

إثبات المتباينات التكعيبية

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحظ!

لإثبات أن الطرف الأيمن ≤ الطرف الأيسر:
ضع د(س) = الطرف الأيمن – الطرف الأيسر، وكوّن جدول الإشارة للدالة ص = د(س)،
وبيّن أن **(القيمة الصغرى)** ≤ ٠

استعد

أثبت صحّة المتباينة س^{٣} + ٢س^{٢} – ٦س + ٥ ≤ –س^{٢} + ٣س عندما س ≤ ٠

طريقة الحل

[الإثبات] ليكن د(س) = (س^{٣} + ٢س^{٢} – ٦س + ٥) – (–س^{٢} + ٣س)

د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٩س + ٥

دَ(س) = ٣س^{٢} + ٦س – ٩

إذا كان دَ(س) = ٠، فإن س = –٣ أو ١

جدول الإشارة فى الفترة س ≤ ٠ كما يأتى.

س	...	١	...	٠
دَ(س)	+	٠	–	
د(س)	↗	٠	↘	٥

ومن ثمّ، فى الفترة س ≤ ٠ تكون القيمة الصغرى للدالة د(س) هى ٠، أى:

عندما س ≤ ٠ يكون د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٩س + ٥ ≤ ٠

∴ عندما س ≤ ٠ يكون س^{٣} + ٢س^{٢} – ٦س + ٥ ≤ –س^{٢} + ٣س

حاول

أثبت صحّة المتباينة ٢س^{٣} + ١ ≤ ٣س^{٢} عندما س ≤ ٠

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أثبت صحّة المتباينة س^{٣} + ٣س^{٢} – ٩س + ٥ ≤ ٠ عندما س ≤ ٠

٢ أثبت صحّة المتباينة س^{٣} – س^{٢} + ١ ≤ ٢س^{٣} – س عندما س ≥ ٠

٣ أثبت صحّة المتباينة ٣س^{٢} + ١ ≤ س^{٣} + ٣س عندما س ≥ ١

★ التحدّي

أوجد أكبر ثابت حقيقى ك تصحّ عنده المتباينة

س^{٣} – ٣س^{٢} – ٣س + ك + ٣ ≥ ٠

لكل قيم س التى تحقّق –١ ≤ س ≤ ٣.

نواتج التعلّم

إثبات متباينات كثيرات الحدود بتكوين دوال مساعدة، وتحليل مشتقاتها، واستخدام جداول الإشارة لتعيين القيم الصغرى، والتحقّق من صحّة المتباينة فى مجال معطى.

س = –٣ خارج الفترة المعطاة، فلا عمودَ له فى الجدول.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

٧-١٧
الرياضيات

القيم العظمى للدوال من الدرجة الرابعة وتمثيلها البيانى

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

لإيجاد القيم القصوى للدوال من الدرجة الرابعة وتمثيلها بيانيًّا، كوّن **جدول الإشارة** كما فعلت مع الدوال التكعيبية.

نواتج التعلّم

تحليل الدوال من الدرجة الرابعة بالمشتقات: لتعيين القيم العظمى والصغرى المحلية، وتكوين جداول الإشارة لتحديد فترات التزايد والتناقص، وتمثيل سلوك هذه الدوال تمثيلًا بيانيًّا دقيقًا.

استعد

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = ٣س^{٤} + ٤س^{٣} – ١٢س^{٢} (ب) ص = – س^{٤} – ٤س^{٣} – ٨

طريقة الحل

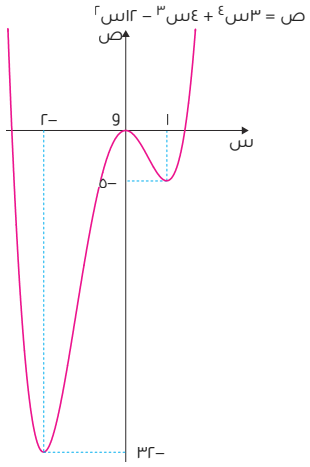
(أ) ص = ٣س^{٤} + ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

ص$'$ = ١٢س^{٣} + ١٢س^{٢} – ٢٤س

أوجد س عندما ص$'$ = ٠

١٢س^{٣} + ١٢س^{٢} – ٢٤س = ٠

وبالحلّ ينتج س = –٢ أو ٠ أو ١



(أ)

∵ ص$'$ دالة تكعيبية ∴ عيّن إشارتها بالتعويض فى ص$'$ عن س بقيم بعينها، مثل س = ٣.

س	…	١	…	٠	…	–٢	…
ص$'$	+	٠	–	٠	+	٠	–
ص	↗	–٥	↘	٠	↗	–٣٢	↘

∴ لها قيمة عظمى محلية ٠ عند س = ٠، وقيمة صغرى محلية –٣٢ عند س = –٢، وقيمة صغرى محلية –٥ عند س = ١

والتمثيل البيانى كما فى الشكل المجاور.

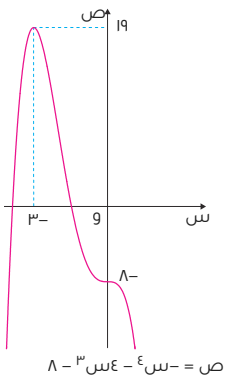
(ب) ص = – س^{٤} – ٤س^{٣} – ٨

صَ = – ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

أوجد س التى تحقّق صَ = ٠

– ٤س^{٣} – ١٢س^{٢} = ٠

وبالحلّ ينتج س = ٠ أو –٣



(ب)

س	...	٠	...	–٣	...
صَ	–	٠	–	٠	+
ص	↘	–٨	↘	١٩	↗

∴ لها قيمة عظمى محلية ١٩ عند س = –٣، وليس لها قيمة صغرى محلية.

∵ إشارة صَ لا تتغيّر حول س = ٠ ∴
ليس لها قيمة قصوى عند س = ٠.

والتمثيل البيانى كما فى الشكل المجاور.

حاول

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = س^{٤} – ٨س^{٢} + ٥

(ب) ص = – س^{٤} + ٦س^{٢} – ٨س

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ البند (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد القيم القصوى لكل دالة مما يأتى، ثم ارسم منحناها.

(أ) ص = س^{٤} – ٨س^{٢} + ١٠

(ب) ص = س^{٤} – ٤س^{٢} + ٣

(جـ) ص = ٣س^{٤} + ٨س^{٣} – ٦س^{٢} – ٢٤س

(د) ص = س^{٤} + ٢س^{٣} + ٣

(هـ) ص = – س^{٤} + ٤س^{٣} – ٩

(و) ص = س^{٤} + ٤س^{٣} – ١٦س

تأمّل

دالة من الدرجة الرابعة معرّفة بالصيغة الآتية

د(س) = س^{٤} – ٤س^{٣} + ك

ما القيم الحقيقية للثابت ك التى يقطع عندها منحنى هذه الدالة محور السينات مرّتين بالضبط، فيكون لها جذران حقيقيان مختلفان بالضبط؟ ووضّح كيف يؤدّى حساب القيمة الصغرى المطلقة إلى تحديد هذا المدى.

٧-١٨
الرياضيات

التكامل غير المحدد

الفصل السابع التفاضل والتكامل

المفهوم ٤ · التكامل: التكاملات المحددة وتطبيقاتها

فى الهندسة الطبية الحيوية، يتطلّب تتبّع وصول الدواء إلى الدم بدقّة قياس المقدار المتراكم منه خلال فترة زمنية. ويسجّل مجسٌّ معدل امتصاص المريض للدواء الوريدى فى صورة دالة متغيّرة د(س). ولإيجاد الجرعة المتراكمة بين ساعتين، اجمع شرائح متناهية الصغر من الزمن والمعدل.

وهذا الانتقال من معدل متغيّر إلى مقدار متكامل كلّى هو لبّ قوة التكامل.

السؤال الموجّه: كيف نعيّن رياضيًّا صافى التغيّر المتراكم لكمية فيزيائية خلال فترة متصلة، ونحن لا نعلم إلا معدل تغيّرها اللحظى عند كل لحظة؟

نواتج التعلّم

التعرّف على التكامل غير المحدد بوصفه العملية العكسية للاشتقاق، وإيجاد الدالة متى كانت مشتقتها أو ميل المماس لمنحناها معلومًا.

لاحِظ!

للدالة د(س)، تسمّى الدالة ت(س) التى مشتقتها د(س) **التكامل غير المحدد** أو **المشتقة العكسية** للدالة د(س).

وإيجاد التكامل غير المحدد للدالة د(س) يسمّى **تكامل** د(س).

مثال: إذا كانت د(س) = ٣ س^{٢}، فإن

د(س)
٣ س^{٢}

اشتقاق ⟹
⟸ تكامل

ت(س)
س^{٣}
س^{٣} − ٢
س^{٣} + $\frac{١}{٢}$
…

كما فى المثال السابق، توجد دوال ت(س) لا نهاية لعددها، تعطى د(س) عند اشتقاقها، لكنها لا تختلف إلا فى الحدّ المطلق؛ فتكتب جميعًا بالصورة ت(س) + ث، ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س)ءس . ($\int$ يقرأ «تكامل»)

$$\int د(س)ءس = ت(س) + ث \quad \text{(حيث ث ثابت التكامل)}$$

أضف دائمًا إلى الحل ملاحظة: «ث ثابت التكامل».
(وسنهمل كتابته فيما بعد فى هذا الكتاب.)

لاحِظ!

التكامل غير المحدد للمقدار س^{ن}

$$\int س^{ن}\,ءس = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث$$

مثال: $\int س^{٣}\,ءس = \frac{١}{٤}س^{٤} + ث$، $\int س\,ءس = \frac{١}{٢}س^{٢} + ث$، $\int ١\,ءس = س + ث$

إذا كان تَ(س) = د(س)، زَ(س) = هـ(س)، وكان ث ثابت التكامل، تتحقق العلاقات الآتية.

$$\int ك\,د(س)\,ءس = ك\,ت(س) + ث \text{ (حيث ك ثابت)}$$

مثال: $\int ٣س^{٣}\,ءس = ٣ \times \frac{١}{٤}س^{٤} + ث = \frac{٣}{٤}س^{٤} + ث$

$$\int \{د(س) + هـ(س)\}\,ءس = ت(س) + ز(س) + ث$$

مثال: $\int (س^{٢} + س)\,ءس = \frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + ث$

$$\int \{د(س) - هـ(س)\}\,ءس = ت(س) - ز(س) + ث$$

مثال: $\int (٢س - ٣)\,ءس = س^{٢} - ٣س + ث$

أضِف ١ إلى الأُسّ ن فى موضعين: يصير أُسُّ س هو ن + ١، ويصير مقام الكسر ن + ١ كذلك.

يحذف ١ فيكتب $\int$ ١ ءس فى الصورة $\int$ ءس. وتذكّر أن ١ = س^{٠}.

تدرّب على الحساب دون كتابة الخطوات الوسيطة.

استعد

أوجد كل تكامل غير محدد مما يأتى.

(أ) $\int (س^{٣} - ٩س^{٢} + ٣س - ٥)\,ءس$

(ب) $\int (س - ١)^{٢}\,ءس$

طريقة الحل

(أ) $\int (س^{٣} - ٩س^{٢} + ٣س - ٥)\,ءس$

$= \frac{١}{٤}س^{٤} - ٣س^{٣} + \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٥س + ث$

(ب) $\int (س - ١)^{٢}\,ءس$

$= \int (س^{٢} - ٢س + ١)\,ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + س + ث$

افكك المقدار أوّلًا.

حاول

أوجد كل تكامل غير محدد مما يأتى.

(أ) $\int (-٣)$ وس

(ب) $\int (٤س - ٥)$ وس

(جـ) $\int (٣س^{٢} - ٦س + ٢)$ وس

(د) $\int (٤س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ١)$ وس

(هـ) $\int (٢س - ٣)^{٢}$ وس

(و) $\int (س - ١)(س + ٢)$ وس

تدريب

أوجد كل تكامل غير محدد مما يأتى.

(أ) $\int ٢$ وس

(ب) $\int (-١)$ وس

(جـ) $\int \frac{١}{٢}$ وس

(د) $\int (٢س + ٥)$ وس

(هـ) $\int (-٣س - ٢)$ وس

(و) $\int \left(\frac{١}{٢}س + ٧\right)$ وس

(ز) $\int (س^{٢} - ٥س + ١)$ وس

(ح) $\int (٦س^{٢} - ٦س + ٢)$ وس

(ط) $\int (-٣س^{٢} + ٦س + ٢)$ وس

(ي) $\int (٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ١٠س + ٢)$ وس

(ك) $\int (-٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤س + ٣)$ وس

(ل) $\int (س^{٣} + س^{٢} + س + ١)$ وس

(م) $\int (س + ١)^{٢}$ وس

(ن) $\int (٢س - ١)^{٢}$ وس

(س) $\int (٣س - ٢)^{٢}$ وس

(ع) $\int (٣س + ٢)(٣س - ٢)$ وس

(ف) $\int (٣س + ٢)(٣س - ٣)$ وس

(ص) $\int (٣س - ١)(س + ١)$ وس

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (هـ) و(و) ثم ناقشوا الإجابة.

١٩-٧ إيجاد الدالة من مشتقتها

الفصل السابع التفاضل والتكامل

الرياضيات

لاحِظ!

لإيجاد ت(س) من مشتقتها تَ(س)، كامل تَ(س) بالنسبة إلى س.

$$ت(س) = \int تَ(س)\,ءس$$

استعد

أوجد الدالة ت(س) التى تحقّق الشرطين الآتيين.

$تَ(س) = ٣س^{٢} + ٨س - ١$ و $ت(١) = ٧$

طريقة الحل

$$ت(س) = \int (٣س^{٢} + ٨س - ١)\,ءس$$

$$= س^{٣} + ٤س^{٢} - س + ث$$

∵ $ت(١) = ٧$،

$١^{٣} + ٤ \times ١^{٢} - ١ + ث = ٧$

وبالحلّ ينتج $ث = ٣$

∴ $ت(س) = س^{٣} + ٤س^{٢} - س + ٣$

حاول

أوجد الدالة ت(س) التى تحقّق الشروط الآتية.

(أ) $تَ(س) = ٦س - ٢$ و $ت(٠) = ١$

(ب) $تَ(س) = س^{٢} - ٥س + ٣$ و $ت(٢) = ١$

تدريب

أوجد الدالة ت(س) التى تحقّق الشروط الآتية.

(أ) $تَ(س) = ٢س - ١$ و $ت(٠) = -٣$

(ب) $تَ(س) = ٢س - ٢$ و $ت(١) = ٥$

(جـ) $تَ(س) = ٤س + ٢$ و $ت(٢) = ٣$

(د) $تَ(س) = ٦س^{٢} + ٦س + ٢$ و $ت(٠) = ٥$

(هـ) $تَ(س) = ٣(س - ١)(س - ٢)$ و $ت(١) = -١$

(و) $تَ(س) = ٣س^{٢} - ٤س + ٣$ و $ت(٢) = ١$

نواتج التعلّم

التعرّف على التكامل غير المحدد بوصفه العملية العكسية للاشتقاق، وإيجاد الدالة متى كانت مشتقتها أو ميل المماس لمنحناها معلومًا.

كامل تَ(س).

∵ التكامل غير محدد ∴ ثابت التكامل غير معلوم.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) من «تدريب» ثم ناقشوا الإجابة.

٢-٧
الرياضيات

إيجاد الدالة من ميل المماس

الفصل السابع التفاضل والتكامل

لاحِظ!

ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة ص = د(س) هو دَ(س).

استعد

منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (٣ ، ٢). فإذا كان ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى يساوى ٣س^{٢} – ٢س + ١، فأوجد د(س)

طريقة الحل

∵ ميل المماس عند النقطة (س ، ص) يساوى ٣س^{٢} – ٢س + ١،

دَ(س) = ٣س^{٢} – ٢س + ١

∵ د(س) = $\int$ دَ(س)ءس،

د(س) = $\int$ (٣س^{٢} – ٢س + ١)ءس

= س^{٣} – س^{٢} + س + ث

∵ منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (٣ ، ٢).

٢ = ٣^{٣} – ٣^{٢} + ٣ + ث

وبالحلّ نجد ث = –١٩

∴ د(س) = س^{٣} – س^{٢} + س – ١٩

حاول

منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (١ ، ١). فإذا كان ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى يساوى ٣س^{٢} + ٢، فأوجد د(س)

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (٢ ، ٣). فإذا كان ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى يساوى ٩س^{٢} – ٦س، فأوجد د(س)

٢ منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (٢ ، –٧). فإذا كان ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى يساوى –٦س^{٢} – ٢س + ٣، فأوجد د(س)

٣ منحنى الدالة ص = د(س) يمرّ بالنقطة (٢ ، ٥). فإذا كان ميل المماس عند كل نقطة (س ، ص) على هذا المنحنى يساوى ١٢س^{٢} – ٦س – ٥، فأوجد د(س)

نواتج التعلّم

التعرّف على التكامل غير المحدد بوصفه العملية العكسية للاشتقاق، وإيجاد الدالة متى كانت مشتقتها أو ميل المماس لمنحناها معلومًا.

التكامل غير المحدد هو العملية العكسية للاشتقاق، فمنه نسترد د(س) من دَ(س)؛ ولا يُنسى ثابت التكامل ث.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

٧-٢١
الرياضيات

التكامل المحدّد (١)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

إيجاد قيمة التكامل المحدّد باستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل.

لاحِظ!

إذا كانت ت(س) تكاملًا غير محدّد للدالة د(س)، فإن ت(ب) – ت(أ) تسمّى **التكامل المحدّد** للدالة د(س) من أ إلى ب، ويرمز له بالرمز

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$$

ويرمز أيضًا إلى ت(ب) – ت(أ) بالرمز $[ت(س)]_{أ}^{ب}$. أى أن

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = [ت(س)]_{أ}^{ب} = ت(ب) - ت(أ)$$

وفى $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$ يسمّى أ **الحدّ الأدنى** للتكامل المحدّد، ويسمّى ب **الحدّ الأعلى**.

ويسمّى إيجاد هذا التكامل المحدّد تكامل الدالة د(س) من أ إلى ب .

وتتحقّق العلاقات الآتية فى التكامل المحدّد.

$$\int_{أ}^{أ} د(س)\,ءس = ٠$$

إذا تساوى الحدّان الأعلى والأدنى كان التكامل المحدّد ٠

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس + \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} \{د(س) + هـ(س)\}\,ءس$$

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} \{د(س) - هـ(س)\}\,ءس$$

إذا تساوى الحدّان الأعلى والأدنى لكلّ من التكاملين المحدّدين أمكن دمجهما فى تكامل محدّد واحد.

استعد

أوجد التكاملات المحدّدة الآتية.

(أ) $\int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ٢س + ١)\,ءس$

(ب) $\int_{٢}^{٢} (س^{٢} + ٢س - ٥)\,ءس$

(جـ) $\int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ٦س)\,ءس - \int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} + ٤س)\,ءس$

طريقة الحل

(أ) $\int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ٢س + ١)\,ds$

$= [س^{٣} - س^{٢} + س]_{-١}^{٢}$

$= (٢^{٣} - ٢^{٢} + ٢) - \{(-١)^{٣} - (-١)^{٢} + (-١)\}$

$= ٦ - (-٣)$

$= ٩$

(ب) $\int_{٢}^{٢} (س^{٢} + ٢س - ٥)\,ds$

$= ٠$

الحدّان الأعلى والأدنى متساويان.

(جـ) $\int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ٦س)\,ds - \int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} + ٤س)\,ds$

$= \int_{-١}^{٢} \{(٣س^{٢} - ٦س) - (٣س^{٢} + ٤س)\}\,ds$

$= \int_{-١}^{٢} (-١٠س)\,ds$

$= [-٥س^{٢}]_{-١}^{٢}$

$= (-٥ \times ٢^{٢}) - \{-٥ \times (-١)^{٢}\}$

$= -١٥$

إذا تساوى الحدّان الأعلى والأدنى لكلّ من التكاملين المحدّدين أمكن دمجهما فى تكامل محدّد واحد.

حاول

أوجد التكاملات المحدّدة الآتية.

(أ) $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - ٤س - ١)\,ds$

(ب) $\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ٢س + ٥)\,ds$

(جـ) $\int_{-١}^{٣} (س - ٢)(س + ٢)\,ds$

(د) $\int_{٣}^{٣} (٢س^{٢} + س - ٩)\,ds$

(هـ) $\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} + ٢س - ١)\,ds + \int_{٠}^{٢} (س - ٣س^{٢})\,ds$

(و) $\int_{-١}^{٢} (٢س^{٢} + ٣)\,ds - \int_{-١}^{٢} (٣س - ١)\,ds$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرعين (هـ) و(و) ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد التكاملات المحدّدة الآتية.

(أ) $\int_{-٢}^{٣} ٢س \, ءس$

(ب) $\int_{١}^{-٣} س \, ءس$

(جـ) $\int_{١}^{٢} ٣س^{٢} \, ءس$

(د) $\int_{-٢}^{١} (٣س^{٢} + ٢س - ١) \, ءس$

(هـ) $\int_{-٢}^{١} (٦س^{٢} + ٢س - ٣) \, ءس$

(و) $\int_{-١}^{٢} (٩س^{٢} - ٤س - ١) \, ءس$

(ز) $\int_{١}^{١} (٤س^{٢} + س - ٣) \, ءس$

(ح) $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} + ٣س - ١) \, ءس$

(ط) $\int_{-١}^{-٢} (٢س^{٢} - ٤س + ١) \, ءس$

(ى) $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} - ٣س + ٢) \, ءس$

(ك) $\int_{-٥}^{-٥} (-س^{٣} - ٢٣س^{٢} + ١٩) \, ءس$

(ل) $\int_{٠}^{٣} (٣س^{٢} - ٤س) \, ءس$

(م) $\int_{٠}^{١} (س^{٢} - ٢س - ٣) \, ءس$

(ن) $\int_{٠}^{٢} (٢س^{٢} + ٣س + ٣) \, ءس$

(س) $\int_{-٢}^{-١} (س + ١)^{٢} \, ءس$

(ع) $\int_{-١}^{٢} (س + ٣)(س - ٣) \, ءس$

(ف) $\int_{-١}^{٢} (س - ١)(٣س + ١) \, ءس$

(ص) $\int_{٠}^{٠} (٣س + ٢)(٢س + ٣) \, ءس$

(ق) $\int_{-١}^{٣} (س^{٢} + ٢س - ٥) \, ءس + \int_{-١}^{٣} (-س^{٢} + س + ٥) \, ءس$

(ر) $\int_{-٢}^{٢} (س^{٢} + س + ١) \, ءس + \int_{-٢}^{٢} (٢س^{٢} - س - ٢) \, ءس$

(ش) $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ٢س + ٢) \, ءس + \int_{-١}^{٢} (س^{٢} - س - ١) \, ءس$

(ت) $\int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} + ٦س + ٧) \, ءس - \int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} + ٤س + ٣) \, ءس$

(ث) $\int_{٠}^{٥} (٣س^{٢} + ٢س) \, ءس - \int_{٠}^{٥} (٢س^{٢} + ٣س) \, ءس$

(خ) $\int_{-٢}^{١} (س^{٢} + ٥س - ٣) \, ءس - \int_{-٢}^{١} (٤س^{٢} - س - ٣) \, ءس$

٧-٢٢
الرياضيات

التكامل المحدَّد (٢)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

إيجاد قيمة التكامل المحدَّد باستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل.

لاحِظ!

خواصّ التكامل المحدَّد

(١) $\int_{أ}^{ب} ك\,د(س)\,ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$ (حيث ك ثابت)

(٢) $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\,ءس$

تبديل الحدّين الأعلى والأدنى يغيّر الإشارة.

(٣) $\int_{أ}^{ج} د(س)\,ءس + \int_{ج}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$

إذا اتّحدت الدالة المكاملة د(س) أمكن استخدام هذا التحويل.

$$\int_{أ}^{ج} + \int_{ج}^{ب} \Leftarrow \int_{أ}^{ب}$$

(٤) $\int_{\alpha}^{\beta} (س - \alpha)(س - \beta)\,ءس = -\frac{١}{٦}(\alpha - \beta)^{٣}$

تستخدم هذه الخاصية عندما يكون معامل س مساويًا ١.

استعد

أوجد التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ٤س)\,ءس + \int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} - ٤س)\,ءس$

(ب) $\int_{١}^{٤} (٦س^{٢} + ٤س)\,ءس - \int_{٣}^{٤} (٦س^{٢} + ٤س)\,ءس$

(ج) $\int_{\frac{٢}{٣}}^{١} (٣س - ٢)(س - ١)\,ءس$

طريقة الحل

(أ) $\int_{0}^{2} (٣س^{٢} - ٤س)\,د س + \int_{2}^{3} (٣س^{٢} - ٤س)\,د س$

$= \int_{0}^{3} (٣س^{٢} - ٤س)\,د س$

$= [س^{٣} - ٢س^{٢}]_{0}^{3}$

$= (٣^{٣} - ٢ \times ٣^{٢}) - ٠$

$= ٩$

الدالة المكاملة $٣س^{٢} - ٤س$ واحدة، وفترة التكامل ٠ ← ٢ ثم ٢ ← ٣، فيمكن استخدام خاصية (٣).

$$\int_{0}^{2} + \int_{2}^{3} \Leftarrow \int_{0}^{3}$$

(ب) $\int_{1}^{4} (٦س^{٢} + ٤س)\,د س - \int_{3}^{4} (٦س^{٢} + ٤س)\,د س$

$= \int_{1}^{3} (٦س^{٢} + ٤س)\,د س$

$= [٢س^{٣} + ٢س^{٢}]_{1}^{3}$

$= (٢ \times ٣^{٣} + ٢ \times ٣^{٢}) - (٢ \times ١^{٣} + ٢ \times ١^{٢})$

$= ٦٨$

لاستخدام خاصية (٣)، طبّق خاصية (٢) لتبديل الحدّين الأعلى والأدنى.

(جـ) $\int_{\frac{2}{3}}^{1} (٣س - ٢)(س - ١)\,د س$

$= ٣ \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(س - \frac{٢}{٣}\right)(س - ١)\,د س$

$= ٣ \left[-\frac{١}{٦}\left(١ - \frac{٢}{٣}\right)^{٣}\right]$

$= -\frac{١}{٥٤}$

لاستخدام خاصية (٤)، طبّق خاصية (١) ليصير معامل س مساويًا ١.

حاول

أوجد التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{-١}^{٠} (س^{٢} - ٥س + ٣)\,ﺩس + \int_{٠}^{١} (س^{٢} - ٥س + ٣)\,ﺩس$

(ب) $\int_{١}^{٣} (٩س^{٢} - ٢س)\,ﺩس - \int_{٢}^{٣} (٩س^{٢} - ٢س)\,ﺩس$

(ج) $\int_{-\frac{١}{٢}}^{٣} (٢س + ١)(س - ٣)\,ﺩس$

تدريب

أوجد التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{٠}^{١} (٢س^{٢} - ٣س + ٥)\,ﺩس + \int_{١}^{٢} (٢س^{٢} - ٣س + ٥)\,ﺩس$

(ب) $\int_{-١}^{٠} (س - ١)^{٢}\,ﺩس + \int_{٠}^{١} (س - ١)^{٢}\,ﺩس$

(ج) $\int_{٠}^{١} (٢س + ١)(س + ١)\,ﺩس + \int_{-١}^{٠} (٢س + ١)(س + ١)\,ﺩس$

(د) $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} - س)\,ﺩس - \int_{٣}^{٢} (س^{٢} - س)\,ﺩس$

(هـ) $\int_{٠}^{-\frac{١}{٣}} (-س^{٢} - ٣س + ٢)\,ﺩس - \int_{١}^{-\frac{١}{٣}} (-س^{٢} - ٣س + ٢)\,ﺩس$

(و) $-\int_{٢}^{٠} (س + ١)(س - ١)\,ﺩس + \int_{-٢}^{٠} (س + ١)(س - ١)\,ﺩس$

(ز) $\int_{٣}^{٥} (س - ٣)(س - ٥)\,ﺩس$

(ح) $\int_{١}^{٢} (س - ١)(س - ٢)\,ﺩس$

(ط) $\int_{-٢}^{١} (س^{٢} + س - ٢)\,ﺩس$

(ي) $\int_{-١}^{\frac{٣}{٢}} (س + ١)(٢س - ٣)\,ﺩس$

(ك) $\int_{-\frac{١}{٣}}^{١} (٣س + ١)(س - ١)\,ﺩس$

(ل) $\int_{-١}^{\frac{١}{٢}} (٢س^{٢} + س - ١)\,ﺩس$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (جـ) ثم ناقشوا الإجابة.

٧-٢٣
الرياضيات

تطبيقات التكامل المحدَّد

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

إيجاد قيمة التكامل المحدَّد باستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل.

لاحِظ!

إذا احتوت المعادلة على **تكامل محدَّد** فافرض أ مساويًا للتكامل المحدَّد.

مثال: فى المعادلة د(س) = س + $\int_{٠}^{١}$ د(ت) ىت افرض أ = $\int_{٠}^{١}$ د(ت) ىت

استعد

أوجد الدالة د(س) التى تحقق المعادلة

د(س) = س^{٢} + ٢ $\int_{٠}^{١}$ د(ت) ىت

طريقة الحل

بما أن المعادلة تحتوى على تكامل محدَّد، فافرض أ مساويًا للتكامل المحدَّد.

ليكن أ = $\int_{٠}^{١}$ د(ت) ىت .....(١)

ومنه، د(س) = س^{٢} + ٢أ

بإبدال س بت ينتج د(ت) = ت^{٢} + ٢أ

وبالتعويض بهذا فى (١) ينتج:

$\int_{٠}^{١}$ د(ت) ىت = $\int_{٠}^{١}$ (ت^{٢} + ٢أ) ىت

= $\left[\frac{١}{٣}ت^{٣} + ٢أت\right]_{٠}^{١}$

= $\left(\frac{١}{٣} + ٢أ\right)$ – ٠

= $\frac{١}{٣}$ + ٢أ .....(٢)

من (١) و(٢)، أ = $\frac{١}{٣}$ + ٢أ

وبالحلّ ينتج أ = $-\frac{١}{٣}$

∴ د(س) = س^{٢} – $\frac{٢}{٣}$

حاول

أوجد الدالة د(س) التى تحقق كلًّا من المعادلات الآتية.

(أ) د(س) = س − $\int_{0}^{٤}$ د(ت) ءت

(ب) د(س) = ٣س^{٢} + ٢ $\int_{-١}^{١}$ د(ت) ءت

تدريب

أوجد الدالة د(س) التى تحقق كلًّا من المعادلات الآتية.

(أ) د(س) = ٣س − $\int_{0}^{٢}$ د(ت) ءت

(ب) د(س) = ٣س + $\int_{١}^{٣}$ د(ت) ءت

(جـ) د(س) = س + ٣ $\int_{0}^{٢}$ د(ت) ءت

(د) د(س) = ٣س^{٢} − ٤س + ٢ $\int_{0}^{٢}$ د(ت) ءت

(هـ) د(س) = ٣س^{٢} − س $\int_{0}^{٢}$ د(ت) ءت + ٢

★ التحدّي

أوجد الدالة د(س) التى تحقق المعادلة الآتية.

د(س) = ٣س^{٢} + $\int_{0}^{٢}$ د(ت) ءت

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

٧-٢٤
الرياضيات

التكامل المحدّد والتفاضل

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

إيجاد قيمة التكامل المحدّد باستخدام النظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل.

لاحِظ!

إذا كان أ ثابتًا، فإن اشتقاق الدالة فى س، وهى $\int_{أ}$ د(ت) ءت، بالنسبة إلى س يعطى د(س)

مثال: اشتقاق $\int_{٣}^{س}$ (٢ت^{٢} + ٣ت – ٥) ءت بالنسبة إلى س يعطى

٢س^{٢} + ٣س – ٥

أبدل ت بـ س.

استعد

أوجد الدالة د(س) وقيمة الثابت أ اللتين تحققان المعادلة الآتية.

$$\int_{أ}^{س} د(ت)\,ءت = س^{٢} - ٤س + ٣$$

طريقة الحل

$$\int_{أ}^{س} د(ت)\,ءت = س^{٢} - ٤س + ٣ \quad \ldots\ldots(١)$$

باشتقاق طرفى (١) بالنسبة إلى س ينتج:

د(س) = ٢س – ٤

وبالتعويض بـ أ عن س فى (١) ينتج:

إذا تساوى الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى كان التكامل المحدّد صفرًا.

$$\int_{أ}^{أ} د(ت)\,ءت = أ^{٢} - ٤أ + ٣$$

$$٠ = أ^{٢} - ٤أ + ٣$$

وبالحلّ ينتج أ = ١ أو أ = ٣

∴ د(س) = ٢س – ٤، أ = ١ أو أ = ٣

حاول

حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد مشتقة $\int_{-٥}^{\text{س}} (\text{ت}^{٢} - \text{ت} + ٣)\,\text{د}\text{ت}$ بالنسبة إلى س

(ب) أوجد الدالة د(س) وقيمة الثابت أ اللتين تحققان المعادلة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ت})\,\text{د}\text{ت} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مشتقة كل من المقادير الآتية بالنسبة إلى س

(أ) $\int_{٣}^{\text{س}} (\text{ت}^{٢} + ٢\text{ت} + ٤)\,\text{د}\text{ت}$

(ب) $\int_{-١}^{\text{س}} (\text{ت}^{٢} - ٢\text{ت} + ٣)\,\text{د}\text{ت}$

(جـ) $\int_{٠}^{\text{س}} (\text{ت}^{٢} - ٣\text{ت} + ٧)\,\text{د}\text{ت}$

٢ أوجد الدالة د(س) وقيمة الثابت أ اللتين تحققان كلًّا من المعادلات الآتية.

(أ) $\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ت})\,\text{د}\text{ت} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨$

(ب) $\int_{\text{أ}}^{\text{س}} \text{د}(\text{ت})\,\text{د}\text{ت} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤$

(جـ) $\int_{١}^{\text{س}} \text{د}(\text{ت})\,\text{د}\text{ت} = ٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{أ}$

تأمّل

كيف يتغير تحليلك لحركة الأجسام ونموّها فى الواقع حين تنتقل من دراسة معدل التغير اللحظى (المشتقة) إلى تتبّع التراكم الكمّى (التكامل)؟

٧-٢٥
الرياضيات

التكامل المحدَّد ومساحات المناطق (١)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

استخدم التكامل المحدَّد فى حساب المساحات تحت المنحنيات، وفى المناطق الهندسية المحصورة بين منحنيين أو بين منحنى ومستقيم.

المفهوم ٥ · تطبيقات التكامل فى الهندسة

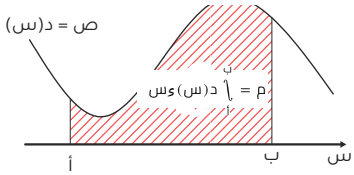


فى التصميم المعمارى والعمرانى يحسب مهندسو الإنشاءات المساحة الدقيقة لألواح غير مستوية، ولقطع أرض، ولكبارى حديثة تحدّها منحنيات متقاطعة ومماسّات.

وعند تصميم واجهة زجاجية منحنية يرسم حدَّها قطع مكافئ، وتسندها كمرات مضبوطة بالليزر، يلزم لتقدير كمّية المادّة جمع المساحات المحصورة بين المنحنيات بالتكامل المحدَّد.

السؤال الموجّه: كيف نحسب بالتكامل المحدَّد المساحة المحصورة بين منحنيات متقاطعة ودوال القيمة المطلقة ومماسّات؟

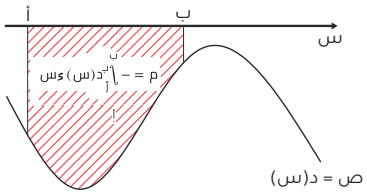
لاحِظ!



إذا كان د(س) ≥ ٠ فى الفترة أ ≤ س ≤ ب، فإن المساحة م للمنطقة المحصورة بمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ وس = ب تعطى بالعلاقة:

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\,وس$$

إذا كان المنحنى أعلى محور السينات س.



إذا كان د(س) ≤ ٠ فى الفترة أ ≤ س ≤ ب، فإن المساحة م للمنطقة المحصورة بمنحنى ص = د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ وس = ب تعطى بالعلاقة:

$$م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\,وس$$

إذا كان المنحنى أسفل محور السينات س.

ارسم المنحنى دائمًا قبل حساب المساحة، وتحقّق من وقوع المنطقة المحصورة أعلى محور السينات أم أسفله.

استعد

أوجد المساحات الآتية.

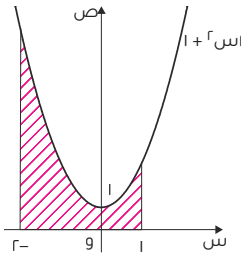
١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢س^{٢} + ١، ومحور السينات، والمستقيمين س = –٢ وس = ١

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} + س – ٦، ومحور السينات، والمستقيمين س = –٢ وس = ١

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ٤ ومحور السينات.

طريقة الحل

١ ∵ المنحنى كما فى الشكل المجاور ∴ المساحة المطلوبة:



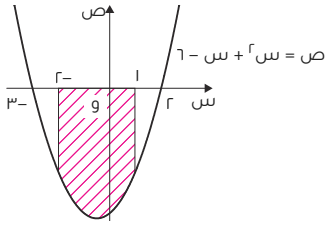
$$\int_{-2}^{1} (2س^2 + 1)\,د س$$

$$= \left[\frac{2}{3}س^3 + س\right]_{-2}^{1}$$

$$= ٩$$

المنطقة أعلى محور السينات س.

٢ أوجد الإحداثيات السينية لنقطتى تقاطع المنحنى ص = س٢ + س – ٦ مع محور السينات:



بحلّ س٢ + س – ٦ = ٠ ينتج س = ٢ أو س = –٣

∵ المنحنى كما فى الشكل المجاور ∴ المساحة المطلوبة:

$$= -\int_{-2}^{1} (س^2 + س - ٦)\,د س$$

$$= \int_{-2}^{1} (-س^2 - س + ٦)\,د س$$

$$= -\left[-\frac{1}{3}س^3 - \frac{1}{2}س^2 + ٦س\right]_{-2}^{1}$$

$$= \frac{٣٣}{٢}$$

المنطقة أسفل محور السينات س.

أخطاء شائعة

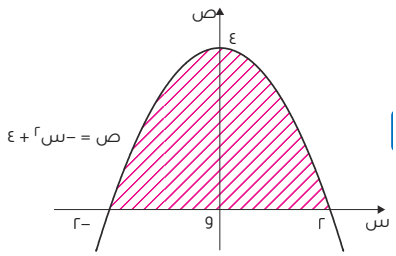
$$\int_{-2}^{1} (س^2 + س - ٦)\,د س$$

$$= \left[\frac{1}{3}س^3 + \frac{1}{2}س^2 - ٦س\right]_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{٣٣}{٢}$$

نسيت وضع الإشارة السالبة مع أن المنحنى يقع أسفل محور السينات.

٣



أوجد الإحداثيات السينية لنقطتى تقاطع المنحنى ص = –س٢ + ٤ مع محور السينات:

بحلّ –س٢ + ٤ = ٠ ينتج س = ±٢

∵ المنحنى كما فى الشكل المجاور ∴ المساحة المطلوبة:

المنطقة أعلى محور السينات س.

$$= \int_{-٢}^{٢} (-س^{٢} + ٤)\,د س$$

$$= \left[-\frac{١}{٣} س^{٣} + ٤ س \right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \frac{٣٢}{٣}$$

يمكنك استخدام – $\int_{-٢}^{٢} (س + ٢)(س - ٢)\,د س = -\left[-\frac{١}{٦} \{٢ - (-٢)\}^{٣} \right]$

حاول

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ + ٣، ومحور السينات، والمستقيمين س = –١ وس = ٣

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ – ٩، ومحور السينات، والمستقيمين س = –٢ وس = ١

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ – س – ٦ ومحور السينات.

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س٢ + ٢ س ومحور السينات.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤالين ٣ و٤ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ + ٢، ومحور السينات، والمستقيمين س = –١ وس = ٢

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢ س٢ + ٢، ومحور السينات، والمستقيمين س = ٠ وس = ٣

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} + ٤س + ٤، ومحور السينات، ومحور الصادات، والمستقيم س = –١

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢س^{٢} – ١٨، ومحور السينات، والمستقيمين س = –٢ وس = ٢

٥ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٦س + ٨، ومحور السينات، والمستقيمين س = ٢ وس = ٣

٦ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٤، ومحور السينات، ومحور الصادات، والمستقيم س = ١

٧ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ١٦ ومحور السينات.

٨ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٣س^{٢} – ٦س ومحور السينات.

٩ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٤س – ٥ ومحور السينات.

١٠ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ١ ومحور السينات.

١١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ٣س ومحور السينات.

★ التحدّي

يصمّم مهندس مدنى حائطًا ساندًا خرسانيًّا مقوَّسًا عند مدخل نفق تحت الأرض.
يتّبع الحدّ العلوى للقوس معادلة القطع المكافئ ص = –س^{٢} – ٢س + ٣ بالمتر فوق سطح الأرض.
ولتحديد الكمّية اللازمة من مادّة العزل المائى لواجهة القوس، يحتاج الفريق إلى حساب المساحة المحصورة بين منحنى القوس وسطح الأرض (محور السينات) بدقّة.

٧-٢٦
الرياضيات

التكامل المحدَّد ومساحات المناطق (٢)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

استخدم التكامل المحدَّد فى حساب المساحات تحت المنحنيات، وفى المناطق الهندسية المحصورة بين منحنيين أو بين منحنى ومستقيم.

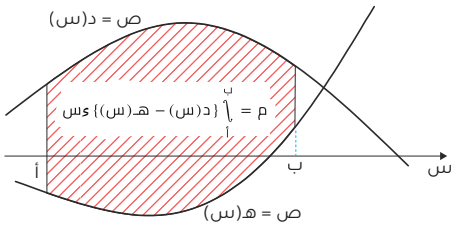
(المنحنى الأعلى) – (المنحنى الأدنى)

لاحِظ!

إذا كان د(س) ≥ هـ(س) فى الفترة أ ≤ س ≤ ب، فإن مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى ص = د(س) وص = هـ(س) والمستقيمين س = أ وس = ب تعطى بالعلاقة:

$$م = \int_{أ}^{ب} \{د(س) - هـ(س)\} \, ءس$$

ارسم المنحنيين دائمًا عند حساب المساحة، وحدّد أيّهما يعلو الآخر داخل المنطقة المحصورة.



استعد

أوجد مساحات المناطق الآتية.

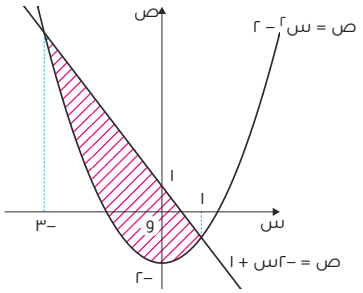
١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٢ والمستقيم ص = –٢س + ١

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطعين المكافئين ص = س^{٢} + ٢س – ٤ و ص = –س^{٢} + ٢س + ٤

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ٤س (–١ ≤ س ≤ ٢) والمستقيمات الثلاثة ص = س، س = –١، س = ٢

طريقة الحل

١ أوجد أولًا الإحداثيات السينية س لنقطتى تقاطع القطع المكافئ والمستقيم.



$$\left.\begin{array}{l} ص = س^{٢} - ٢ \\ ص = -٢س + ١ \end{array}\right\}$$

وبحلّهما ينتج س = –٣ أو ١

∴ المنطقة المحصورة كما فى الشكل المجاور، ومن الشكل تكون المساحة المطلوبة:

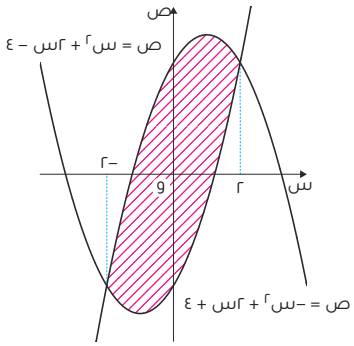
$$= \int_{-٣}^{١} \{(-٢س + ١) - (س^{٢} - ٢)\}\, ىس$$

$$= \int_{-٣}^{١} (-س^{٢} - ٢س + ٣)\, ىس$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٣س\right]_{-٣}^{١}$$

$$= \frac{٣٢}{٣}$$

٢ أوجد أولًا الإحداثيات السينية س لنقطتى تقاطع القطعين المكافئين.



$$\left.\begin{array}{l} ص = س^{٢} + ٢س - ٤ \\ ص = -س^{٢} + ٢س + ٤ \end{array}\right\}$$

وبحلّهما ينتج س = ±٢

∴ المنطقة المحصورة كما فى الشكل المجاور، ومن الشكل تكون المساحة المطلوبة:

$$= \int_{-٢}^{٢} \{(-س^{٢} + ٢س + ٤) - (س^{٢} + ٢س - ٤)\}\, ىس$$

$$= \int_{-٢}^{٢} (-٢س^{٢} + ٨)\, ىس$$

$$= \left[-\frac{٢}{٣}س^{٣} + ٨س\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \frac{٦٤}{٣}$$

لا يلزم إلا الإحداثيات السينية س.

منحنى ص = –٢س + ١ هو المنحنى الأعلى.

يمكنك استخدام

$$= -\int_{-٣}^{١} (س + ٣)(س - ١)\, ىس$$

$$= -\left[\frac{١}{٦}-\right]\{١ - (-٣)\}^{٣}$$

(راجع ٧-٢٢)

منحنى ص = –س٢ + ٢س + ٤ هو المنحنى الأعلى.

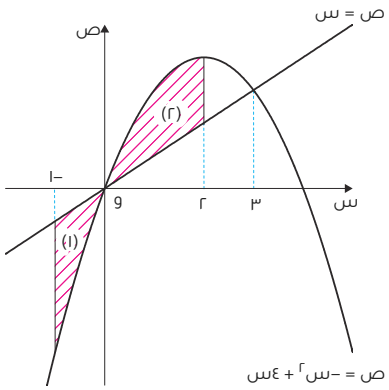
يمكنك استخدام

$$= -٢\int_{-٢}^{٢} (س + ٢)(س - ٢)\, ىس$$

$$= -٢\left[\frac{١}{٦}-\right]\{(-٢) - ٢\}^{٣}$$

(راجع ٧-٢٢)

٣ أوجد أولًا الإحداثيات السينية س لنقطتى تقاطع القطع المكافئ والمستقيم.



$$\left.\begin{array}{l} ص = -س^{٢} + ٤س \\ ص = س \end{array}\right\}$$

وبحلّهما ينتج س = ٠ أو ٣

∴ المنطقة المحصورة كما فى الشكل المجاور، ومن الشكل تكون المساحة المطلوبة:

$$\int_{-١}^{٠} \underset{(١)}{\{س - (-س^{٢} + ٤س)\}}\,ءس + \int_{٠}^{٢} \underset{(٢)}{\{(-س^{٢} + ٤س) - س\}}\,ءس$$

$$= \int_{-١}^{٠} (س^{٢} - ٣س)\,ءس + \int_{٠}^{٢} (-س^{٢} + ٣س)\,ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢}\right]_{-١}^{٠} + \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{٣}{٢}س^{٢}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٣١}{٦}$$

احسب التكامل المحدَّد على حدة فى الفترة التى يعلو فيها منحنى ص = س الآخر، وفى الفترة التى يعلو فيها ص = –س٢ + ٤س.

حاول

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ – ٣س + ٢ والمستقيم ص = ٢س – ٤

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س٢ + ٣س + ٥ والمستقيم ص = س + ٢

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطعين المكافئين ص = س٢ + س – ٢ و ص = –٢س٢ + ٤س + ٤

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س٢ – ٣ (–١ ≤ س ≤ ٢) والمستقيمات الثلاثة ص = –٢س، س = –١، س = ٢

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤالين ٣ و٤ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} + ١ والمستقيم
ص = س + ٣

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} + ٢س – ٤ والمستقيم
ص = ٢س

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – س – ١ والمستقيم
ص = س + ٢

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –٢س^{٢} + ٦س + ٣ والمستقيم
ص = ٢س + ٣

٥ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ٦ والمستقيم
ص = –س

٦ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = –س^{٢} + ٣س – ٩ والمستقيم
ص = –٢س – ٣

٧ مساحة المنطقة المحصورة بالقطعين المكافئين ص = س^{٢} – ٣س + ٢ و
ص = –س^{٢} – ٣س + ٤

٨ مساحة المنطقة المحصورة بالقطعين المكافئين ص = ٢س^{٢} – ٦س + ٤ و
ص = –٣س^{٢} + ٩س – ٦

٩ مساحة المنطقة المحصورة بالقطعين المكافئين ص = س^{٢} – ٣س – ٣ و
ص = –س^{٢} – ٢س + ٣

١٠ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٦ (–١ ≤ س ≤ ٤)
والمستقيمات ص = –س، س = –١، س = ٤

١١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} (–٢ ≤ س ≤ ١)
والمستقيمات ص = س + ٢، س = –٢، س = ١

★ التحدّي

يصمّم مهندس تنسيق حدائق حديقة مدرَّجة على منحدر. يتّبع الحائط الساند العلوى للمدرَّج المنحنى ص = –س^{٢} + ٨ بالمتر، ممتدًّا أفقيًّا من س = –٢ إلى س = ٣ بالمتر. ويقطع المنحدرَ ممرٌّ صرفٍ مائل على المستقيم ص = ٢س.

ولطلب الكمّية المناسبة من النجيل، يحتاج فريق التنفيذ إلى حساب مساحة القطعة بدقّة. والقطعة هى الجزء العلوى المحصور بين الحائط المنحنى وخطّ الصرف والحدّين الخارجيين س = –٢، س = ٣. أوجد المساحة الكلّية لهذا الجزء من الحديقة.

٢٧-٧
الرياضيات

التكامل المحدّد ومساحات المناطق (٣)

الفصل السابع التفاضل والتكامل

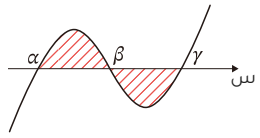
نواتج التعلّم

استخدم التكامل المحدّد فى حساب المساحات تحت المنحنيات، وفى المناطق الهندسية المحصورة بين منحنيين أو بين منحنى ومستقيم.

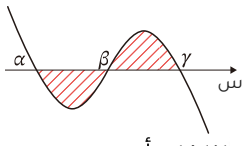
لاحِظ!

فى مسائل إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة تكعيبية ومحور السينات، أوجد أيضًا نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات، وارسم المنحنى.

لتكن الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة التكعيبية
ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ج س + ك مع محور السينات هى α، β، γ



إذا كان أ > ٠

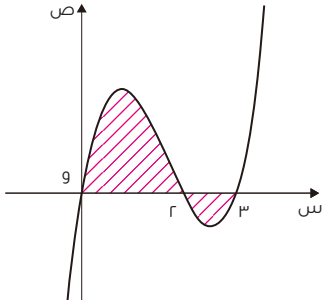


إذا كان أ < ٠

استعد

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٦ س ومحور السينات.

طريقة الحل



أوجد نقاط تقاطع المنحنى ص = س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٦ س مع محور السينات.

س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٦ س = ٠

س(س^{٢} – ٥ س + ٦) = ٠

س(س – ٢)(س – ٣) = ٠

س = ٠ أو س = ٢ أو س = ٣

∵ المنحنى كما فى الشكل المرسوم ∴ المساحة المطلوبة:

$$= \int_{٠}^{٢} (س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٦ س)\,د س - \int_{٢}^{٣} (س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٦ س)\,د س$$

$$= \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٥}{٣} س^{٣} + ٣ س^{٢}\right]_{٠}^{٢} - \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٥}{٣} س^{٣} + ٣ س^{٢}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٨}{٣} + \frac{٩}{٤} - ٠ - \frac{٨}{٣}$$

$$= \frac{٣٧}{١٢}$$

ارسم منحنى
ص = س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٦ س، وهو يأخذ الشكل الموافق لـ أ < ٠.

التكامل الأول أعلى محور السينات والثانى أسفله، فتتحدّد الإشارة بموضع المنحنى من محور السينات.

حاول

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} + س^{٢} – ٦س ومحور السينات.

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = – س^{٣} + ٥س^{٢} – ٤س ومحور السينات.

تدريب

أوجد مساحات المناطق الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٢س^{٢} – ٣س ومحور السينات.

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٢س^{٢} – ٨س ومحور السينات.

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٩س ومحور السينات.

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = – س^{٣} + ٣س^{٢} – ٢س ومحور السينات.

٥ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = – س^{٣} + ٧س^{٢} – ١٢س ومحور السينات.

★ التحدّي

يرسم فريق هندسة بيئة القطاع العرضى لسحابة ملوّثات جوفية تتحرّك خلال حوض صرف. ويُنمذَج حدُّ تدرّج التركيز بالمنحنى التكعيبى ص = – س^{٣} + ٤س بالمتر تحت سطح الأرض.

ولتحديد الكمّية اللازمة من مادة المعالجة الكيميائية المعادلة، يحتاج الفريق إلى حساب المساحة الكلّية للقطاع المحصور بين منحنى التركيز ومستوى سطح الأرض (محور السينات).

أوجد المساحة الكلّية لقطاع سحابة الملوّثات.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

٢٨-٧
الرياضيات

التكامل المحدَّد لدوال القيمة المطلقة

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

طبّق قواعد التكامل على الدوال التى تحتوى على قيم مطلقة بعد إعادة

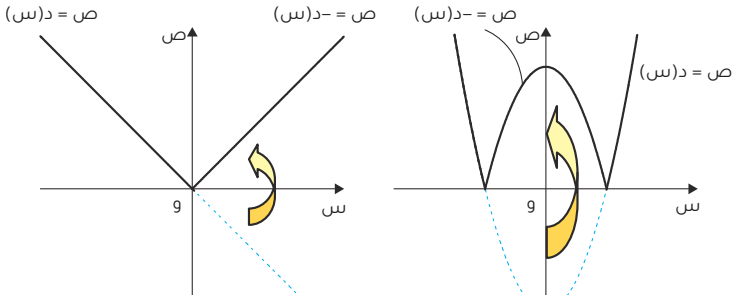
لاحِظ!

$\int_{أ}^{ب} |د(س)|$ ءس يمثّل مساحة المنطقة المحصورة بمنحنى ص = |د(س)| ومحور السينات والمستقيمين س = أ، س = ب

خطوات رسم منحنى ص = |د(س)|

١ ارسم منحنى ص = د(س)

٢ فى المنحنى ١، اعكس الجزء الواقع أسفل محور السينات انعكاسًا فى محور السينات، فتصير معادلة الجزء المنعكس ص = –د(س)



استعد

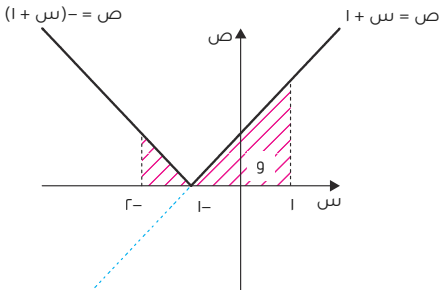
احسب التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{-٢}^{١} |س + ١|$ ءس

(ب) $\int_{٠}^{٣} |س^{٢} - ٤|$ ءس

طريقة الحل

(أ) منحنى ص = |س + ١| كما فى الشكل الآتى.



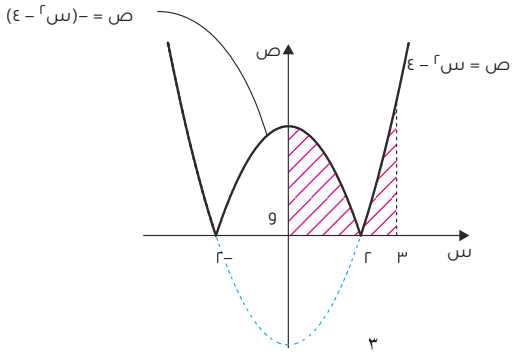
يوجد التكامل المحدَّد المطلوب بجمع مساحتى الجزأين.

$$\int_{-٢}^{-١} \{-(س + ١)\}\,ﻫ س + \int_{-١}^{١} (س + ١)\,ﻫ س$$

$$= \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} - س\right]_{-٢}^{-١} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + س\right]_{-١}^{١}$$

$$= \frac{٥}{٢}$$

(ب) منحنى ص = |س^{٢} – ٤| كما فى الشكل الآتى.



$$\int_{٠}^{٢} \{-(س^{٢} - ٤)\}\,ﻫ س + \int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ٤)\,ﻫ س$$

$$= \left[-\frac{١}{٣}س^{٣} + ٤س\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - ٤س\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٢٣}{٣}$$

حاول

أوجد التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{0}^{5} |س - ٣| \, ءس$

(ب) $\int_{-١}^{٣} |س^{٢} - س - ٢| \, ءس$

تدريب

أوجد التكاملات المحدَّدة الآتية.

(أ) $\int_{-١}^{٣} |س| \, ءس$

(ب) $\int_{١}^{٣} |س - ٢| \, ءس$

(جـ) $\int_{-٣}^{٠} |س + ١| \, ءس$

(د) $\int_{٠}^{٣} |س^{٢} - ٢س| \, ءس$

(هـ) $\int_{-١}^{٣} |س^{٢} - ١| \, ءس$

★ التحدّي

أوجد التكامل المحدَّد الآتي.

$$\int_{٠}^{٢} |س^{٢} + ٣س - ٤| \, ءس$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ الفرع (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

٧-٢٩ المماسّات والمساحة

الفصل السابع التفاضل والتكامل

الرياضيات

نواتج التعلّم

إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومماسّاته.

لاحِظ!

فى مسائل إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ومماسّاته، أوجد أوّلًا معادلات المماسّات.

المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ومماسّين تُكامَل بتجزئة الفترة عند الإحداثى السينى س لنقطة تقاطع المماسّين.

وللمساحة المحصورة بين منحنى ومماسّ واحد، أوجد الإحداثى السينى س لنقطة تقاطع المنحنى والمماسّ.

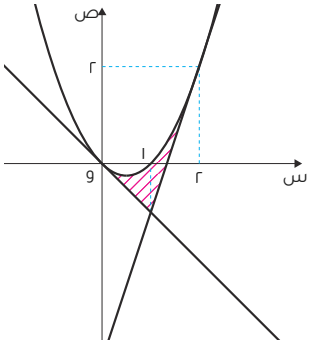
استعد

أوجد المساحات الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – س والمماسّين له عند النقطتين (٠،٠) و(٢،٢).

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٦ والمماسّ له عند النقطة (١،٥).

طريقة الحل



١ أوجد أوّلًا معادلتى المماسّين.

∵ ص = س^{٢} – س ∴ ص$'$ = ٢س – ١

معادلة المماسّ عند (٠،٠) هى ص – ٠ = –١(س – ٠)، أى ص = –س

معادلة المماسّ عند (٢،٢) هى ص – ٢ = ٣(س – ٢)، أى ص = ٣س – ٤

وبحلّ –س = ٣س – ٤ ينتج الإحداثى السينى لنقطة التقاطع: س = ١

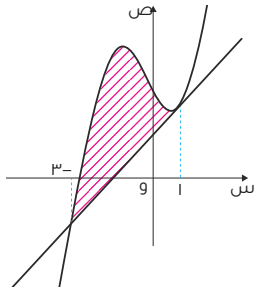
وكما فى الشكل، المساحة المطلوبة:

$$\int_{0}^{1} \{(س^{٢} - س) - (-س)\}\,دس + \int_{1}^{2} \{(س^{٢} - س) - (٣س - ٤)\}\,دس$$

$$= \left[\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤س\right]_{1}^{2} = \frac{٢}{٣}$$

كامِل بتجزئة الفترة عند الإحداثى السينى س لنقطة التقاطع.

طريقة الحل



٢ أوجد أوّلًا معادلة المماسّ.

∵ ص = س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٦ ∴ صَ = ٣س^{٢} + ٢س – ٣

معادلة المماسّ عند (٥،١) هى ص – ٥ = ٢(س – ١)، أى ص = ٢س + ٣

∵ (٥،١) نقطة التماسّ ∴ حلّل المقدار مستخدمًا (س – ١).

وبحلّ س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٦ = ٢س + ٣ ينتج الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع:

س = –٣ أو س = ١

وكما فى الشكل، المساحة المطلوبة:

$$\int_{-٣}^{١} \{(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٦) - (٢س + ٣)\}\, دس$$

$$= \left[\frac{١}{٤}س^{٤} + \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{٥}{٢}س^{٢} + ٣س\right]_{-٣}^{١} = \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - \frac{٥}{٢} + ٣\right) - \left(\frac{٨١}{٤} - ٩ - \frac{٤٥}{٢} + ٩\right) = \frac{٦٤}{٣}$$

حاول

أوجد المساحات الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٤س + ٣ والمماسّين له عند النقطتين (٣،٠) و(٣،٤).

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س – ١ والمماسّ له عند النقطة (٠، – ١).

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد المساحات الآتية.

١ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} والمماسّين له عند (–١، ١) و (٢، ٤).

٢ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} – ٤س والمماسّين له عند (١، – ٣) و(٣، – ٣).

٣ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} + ٢س – ٣ والمماسّين له عند (–٣، ٠) و(١، ٠).

٤ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} – ٣س والمماسّ له عند (٢، ٢).

٥ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = – س^{٣} + س والمماسّ له عند (–١، ٠).

٦ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى ص = س^{٣} + س^{٢} – ٦س – ٩ والمماسّ له عند (–٢، – ١).

٧ مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = س^{٢} والمماسّين المارَّين بالنقطة (١، – ٣).

★ التحدّي

يصمّم فريق هندسة مدنية نظام كابلات معلَّقة لكوبرى مشاة حديث. يُنمذَج بالمنحنى ص = س^{٢}. ويُثبَّت كابلا أمان من محطّة تحكّم عند النقطة (٨، ٣)، ويُشَدّان حتى يصيرا مماسّين للكابل الرئيس.

ولتحديد كمّية الطلاء العازل للصوت اللازمة لمنصّة الصيانة الزجاجية المحصورة بين المنحنى والمماسّين، يحتاج الفريق إلى حساب مساحة هذه المنطقة بدقّة.

أوجد المساحة الكلّية لمنصّة الصيانة.

٣٠-٧
الرياضيات

تنصيف المساحة

الفصل السابع التفاضل والتكامل

نواتج التعلّم

إيجاد المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ومستقيم.

لاحِظ!

لحساب المساحة المحصورة بين قطع مكافئ ومستقيم، استخدم:

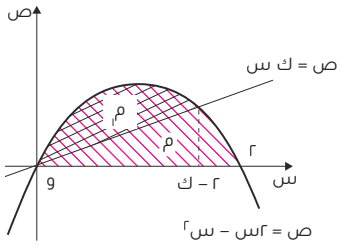
$$\int_{\alpha}^{\beta} (س - \alpha)(س - \beta)\,ءس = -\frac{١}{٦}(\alpha - \beta)^{٣}$$

استعد

إذا كان المستقيم ص = ك س ينصّف مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢س – س^{٢} ومحور السينات س، فأوجد قيمة الثابت ك

طريقة الحل

لتكن مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢س – س^{٢} ومحور السينات س هي م.



ولتكن مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٢س – س^{٢} والمستقيم ص = ك س هي م$_{١}$. ومنه:

م = ٢م$_{١}$ .....(١)

توجد الإحداثيات السينية س لنقطتي تقاطع القطع المكافئ ص = ٢س – س^{٢} مع محور السينات س بحلّ:

٢س – س^{٢} = ٠ فينتج س = ٠ أو س = ٢

$$\therefore م = \int_{٠}^{٢} (٢س - س^{٢})\,ءس = -\frac{١}{٦}(٢ - ٠)^{٣} = \frac{٤}{٣} \quad .....(٢)$$

وتوجد الإحداثيات السينية س لنقطتي تقاطع القطع المكافئ ص = ٢س – س^{٢} والمستقيم ص = ك س بحلّ:

$$\left.\begin{matrix} ص = ٢س - س^{٢} \\ ص = ك\,س \end{matrix}\right\}$$ فينتج س = ٠ أو س = ٢ – ك

ولكى ينصّف المستقيم ص = ك س المساحة م،

٠ < ٢ – ك < ٢، أى ٠ < ك < ٢ .....(٣)

$$\therefore م_{١} = \int_{٠}^{٢-ك} \{(٢س - س^{٢}) - ك س\} ء س$$

$$= - \int_{٠}^{٢-ك} س\{س - (٢ - ك)\} ء س = \frac{١}{٦}\{(٢ - ك) - ٠\}^{٣} = \frac{١}{٦}(٢ - ك)^{٣} .....(٤)$$

وبالتعويض بـ(٢) و(٤) فى (١) ينتج:

$$\frac{٤}{٣} = ٢ \times \frac{١}{٦}(٢ - ك)^{٣}$$

$$(٢ - ك)^{٣} = ٤$$

∵ ك عدد حقيقى ∴ $٢ - ك = \sqrt[٣]{٤}$ ، ومنه ك = $٢ - \sqrt[٣]{٤}$

∵ هذا يحقّق (٣) ∴ $ك = ٢ - \sqrt[٣]{٤}$

حاول

إذا كان المستقيم ص = ك س ينصّف مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = ٤ س – $س^{٢}$ ومحور السينات س، فأوجد قيمة الثابت ك

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقِشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المستقيم ص = ك س ينصّف مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = – $س^{٢}$ + ٨ س ومحور السينات س، فأوجد قيمة الثابت ك

٢ لتكن مساحة المنطقة المحصورة بالقطع المكافئ ص = – $س^{٢}$ + ٦ س ومحور السينات س هى $م_{١}$، ولتكن مساحة المنطقة المحصورة بهذا القطع المكافئ والمستقيم ص = ك س هى $م_{٢}$. فإذا كان $م_{١} : م_{٢}$ = ٨ : ١، فأوجد قيمة الثابت ك

★ التحدّي

يصمّم مهندسٌ معمارىٌّ منحوتةً فنيةً حديثةً على شكل قطع مكافئ منحناه ص = $س^{٢}$. وينطلق من نقطة الأصل شعاعان ليزريّان: شعاعٌ مرجعىٌّ على المستقيم ص = س، وشعاعُ معايرةٍ أكثر ميلًا على المستقيم ص = ك س (حيث ك > ١). وللبقاء داخل حدود الميزانية الإنشائية، يجب أن تكون مساحة سطح اللوح الزجاجى المضاء المحصور بين القطع المكافئ والشعاعين $\frac{٧}{٦}$ من المتر المربع بالضبط. أوجد القيمة الدقيقة لمعامل الميل ك اللازم لشعاع المعايرة.

تأمّل

كيف يغيّر فهمُك للتقاطع الهندسى بين المنحنيات والمستقيمات نظرتَك إلى الطريقة التى تُترجَم بها المعادلات الجبرية المجردة إلى هياكل مادية قابلة للقياس فى العالم الواقعى؟

١-٨
الرياضيات

المتغيّرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

المفهوم ١ · أساسيات المتغيّرات العشوائية



تأمّل رحلة إنتاج دواء جديد ينقذ الأرواح. تراقب التجارب الإكلينيكية مئات المرضى، فترصد كم مريضًا تحسّنت حالته، وكم مريضًا ظهرت عليه أعراض جانبية خفيفة، والزمن الدقيق الذى يستغرقه الدواء حتى يتمثّله الدم.

وقبل بدء التجربة لا يعرف أحد هذه النواتج على وجه التحديد، لكنها ليست عصيّة على التنبّؤ. يضع العلماء إطارًا رياضيًّا يربط كل ناتج غير عددى بقيمة عددية، فيحسبون المخاطر، ويتنبّئون بفاعلية الدواء، وينقذون أرواحًا.

السؤال الموجّه: كيف نعرّف رياضيًّا دالة تنقل النواتج غير العددية إلى مجموعة محدّدة من الأعداد الحقيقية، مع تحقيق قوانين الاحتمال؟

نواتج التعلّم

التمييز بين المتغيّر العشوائى المتقطّع والمتغيّر العشوائى المتّصل. تكوين جدول التوزيع الاحتمالى لمتغيّر عشوائى متقطّع، وقراءته قراءة صحيحة، والتحقّق من أن مجموع الاحتمالات يساوى ١.

لاحِظ!

- القيمة التى يحدّدها ناتج التجربة، ويرتبط بكل قيمة منها احتمال، تسمّى **متغيّرًا عشوائيًّا**.

مثال: س عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء ٣ قطع نقود.

يأخذ س إحدى القيم ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣

واحتمالاتها على الترتيب $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٨}$

- التقابل بين قيم المتغيّر العشوائى س واحتمالات أخذه لهذه القيم يسمّى **التوزيع الاحتمالى** (أو **التوزيع**)، ونقول إن المتغيّر العشوائى س **يتبع** هذا التوزيع. وللتعبير عن التوزيع الاحتمالى استخدم **جدولًا**.

مثال: التوزيع الاحتمالى للمتغيّر العشوائى س، حيث س عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء ٣ قطع نقود.

مجموع احتمالات المتغيّر العشوائى يساوى ١ دائمًا – وهو تحقّقٌ سريع من صحّة الجدول.

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

- للمتغيّر العشوائى س، يرمز لاحتمال أن س = أ بالرمز ل(س = أ)، ويرمز لاحتمال أن أ ≤ س ≤ ب بالرمز ل(أ ≤ س ≤ ب)

مثال: س عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء ٣ قطع نقود.

$$ل(س = ٠) = \frac{١}{٨}$$

$$ل(٠ \leq س \leq ٢) = \frac{١}{٨} + \frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٧}{٨}$$

استعد

عند إلقاء حجرى نرد معًا، يكون س مجموع العددين الظاهرين.

(أ) أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س.

(ب) أوجد ل(٥ ≤ س ≤ ٨)

طريقة الحل

(أ) فى مسائل حجرى النرد، كوّن جدولًا لإيجاد القيم الممكنة للمتغيّر س

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

من الجدول المجاور، القيم الممكنة للمتغيّر س هى الأعداد الصحيحة من ٢ إلى ١٢، وعدد نواتج التجربة كلّها ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا.

ويوجد ناتج واحد يحقّق س = ٢، إذن احتمال أن س = ٢ يساوى $\frac{١}{٣٦}$، واحتمال أن س = ٣ يساوى $\frac{٢}{٣٦}$.

ولا يلزم اختصار الكسور.

وبالمثل أوجد الاحتمال ل لكل قيمة، ثم كوّن جدول التقابل بين س، ل

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	المجموع
ل	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$	١

احتمال القيم بين ٥ و٨.

(ب) ل(٥ ≤ س ≤ ٨) = ل(س = ٥) + ل(س = ٦) + ل(س = ٧) + ل(س = ٨)

$= \frac{٤}{٣٦} + \frac{٥}{٣٦} + \frac{٦}{٣٦} + \frac{٥}{٣٦}$

اختصر الكسر للحصول على الإجابة النهائية.

$= \frac{٢٠}{٣٦}$

$= \frac{٥}{٩}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ عند إلقاء حجرى نرد معًا، يكون س القيمة المطلقة للفرق بين العددين الظاهرين.

(أ) أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س **(ب)** أوجد ل(١ ≤ س ≤ ٢).

٢ صندوق به ٥ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. عند سحب ٤ كرات معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

(أ) أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س **(ب)** أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٣)

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ عند إلقاء ٤ قطع نقود معًا، يكون س عدد مرات ظهور الصورة.

(أ) أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س **(ب)** أوجد ل(٠ ≤ س ≤ ٢)

٢ صندوق به ٤ كرات حمراء وكرتان زرقاوان. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

(أ) أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س **(ب)** أوجد ل(١ ≤ س ≤ ٢)

★ التحدّي

يختبر جهاز موائع دقيقة آليٌّ مركّبًا كيميائيًّا جديدًا. يأخذ الجهاز أوّلًا قراءة أيضية أساسية مقدارها ٠، ثم ينفّذ ٤ حقنات كيميائية دقيقة مستقلّة بالضبط، واحدة تلو الأخرى. وفى كل حقنة تحدّد استجابة الخلية مقدار الإزاحة العددية:

ارتفاع أيضى (+١ وحدة) باحتمال ٠٫٥
خمول أيضى (−٢ وحدة) باحتمال ٠٫٥

ليكن س صافى الانحراف الأيضى عن القراءة الأساسية بعد انتهاء الحقنات الأربع. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

٢-٨
الرياضيات

توقُّع المتغيّرات العشوائية

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

حساب توقُّع متغيّر عشوائى متقطّع، بتكوين جدول التوزيع الاحتمالى ثم جمع حواصل ضرب القيم فى احتمالاتها المقابلة.

لاحِظ!

مجموع حاصل ضرب كل قيمة يأخذها المتغيّر العشوائى فى احتمالها يسمّى **توقُّع** المتغيّر العشوائى (أو **متوسّطه**).

ويرمز لتوقُّع المتغيّر العشوائى س بالرمز μ(س).

س	$س_1$	$س_2$	$س_3$	...	$س_ن$	المجموع
ل	$ل_1$	$ل_2$	$ل_3$	...	$ل_ن$	١

$$\mu(س) = س_1 ل_1 + س_2 ل_2 + س_3 ل_3 + \dots + س_ن ل_ن$$

مثال: توقُّع المتغيّر س، حيث س عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء ٣ قطع نقود.

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

$$\mu(س) = ٠ \times \frac{١}{٨} + ١ \times \frac{٣}{٨} + ٢ \times \frac{٣}{٨} + ٣ \times \frac{١}{٨}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

لإيجاد التوقُّع، كوّن دائمًا **جدول التوزيع الاحتمالى**.

س	$س_1$	$س_2$	$س_3$	...	$س_ن$	المجموع
ل	$ل_1$	$ل_2$	$ل_3$	...	$ل_ن$	١

استعد

أوجد التوقُّع μ(س) للمتغيّر العشوائى س الآتى

(أ) عند إلقاء ٤ قطع نقود، يكون س عدد مرات ظهور الكتابة.

(ب) صندوق به ٤ كرات حمراء و٥ كرات بيضاء. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

طريقة الحل

(أ) كوّن دائمًا جدول التوزيع الاحتمالى.

كوّن جدول التوزيع الاحتمالى أوّلًا – التوقُّع يُقرأ من الجدول.

من الجدول المجاور، التوقُّع μ (س) يساوى

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ل	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	١

$$\frac{١}{١٦} \times ٠ + \frac{٤}{١٦} \times ١ + \frac{٦}{١٦} \times ٢ + \frac{٤}{١٦} \times ٣ + \frac{١}{١٦} \times ٤$$

$$= \frac{٣٢}{١٦}$$

$$= \underline{٢}$$

(ب) كوّن دائمًا جدول التوزيع الاحتمالى.

من الجدول المجاور، التوقُّع μ (س) يساوى

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١٠}{٨٤}$	$\frac{٤٠}{٨٤}$	$\frac{٣٠}{٨٤}$	$\frac{٤}{٨٤}$	١

$$\frac{١٠}{٨٤} \times ٠ + \frac{٤٠}{٨٤} \times ١ + \frac{٣٠}{٨٤} \times ٢ + \frac{٤}{٨٤} \times ٣$$

اختصر الكسر للحصول على الإجابة النهائية.

$$= \frac{١١٢}{٨٤}$$

$$= \underline{\frac{٤}{٣}}$$

حاول

أوجد التوقُّع μ (س) للمتغيّر العشوائى س الآتى

١ عند إلقاء ٣ قطع نقود معًا، يكون س عدد مرات ظهور الكتابة.

٢ عند إلقاء حجرى نرد، يكون س القيمة المطلقة للفرق بين العددين الظاهرين.

٣ صندوق به ٤ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٣ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد التوقُّع μ (س) للمتغيّر العشوائى س الآتى

١ سبع بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٧. عند سحب بطاقة واحدة دون النظر، يكون س العدد المكتوب عليها.

٢ عند إلقاء حجرى نرد، يكون س مجموع العددين الظاهرين.

٣ صندوق به ٣ كرات بيضاء و٥ كرات سوداء. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

٤ من بين ٩ تذاكر، تذكرتان رابحتان. عند سحب ٣ تذاكر معًا، يكون س عدد التذاكر الرابحة المسحوبة.

٥ عند إلقاء ٤ قطع نقود معًا، يكون س عدد مرات ظهور الصورة.

٦ عند إلقاء حجر نرد ٣ مرات، يكون س عدد مرات ظهور العدد ٤.

★ التحدّي

يحتفظ بنك دم إقليمى بمخزون طوارئ دقيق من ٩ وحدات بلازما: ٥ وحدات من فصيلة O السالبة، وهى بلازما المتبرّع العام، و٤ وحدات من فصيلة AB السالبة، وهى بلازما نادرة.

وعلى إثر حادث تصادم متعدّد المركبات، طلب فريق الطوارئ سحب ٤ وحدات بالضبط معًا من هذه الحافظة. ليكن س عدد وحدات الفصيلة O السالبة فى هذا السحب.

أوجد التوقُّع μ (س).



٣-٨
الرياضيات

خواصّ التوقُّع

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

توظيف الخواصّ الجبرية للتوقُّع فى تبسيط حسابات التوقُّع المركّبة.
وإيجاد توقُّع المتغيّر العشوائى أس + ب وتوقُّع س^{٢} من جدول التوزيع الاحتمالى.

لاحِظ!

إذا كان أ، ب ثابتين، وكان التوزيع الاحتمالى للمتغيّر العشوائى س كما فى الجدول الآتى، تحقّقت العلاقات الآتية:

س	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	…	س$_{ن}$	المجموع
ل	ل$_{١}$	ل$_{٢}$	ل$_{٣}$	…	ل$_{ن}$	١

$$\mu(\text{أس}) = \text{أ}\,\mu(\text{س}) = \text{أ}\left(\text{س}_{١}\text{ل}_{١} + \text{س}_{٢}\text{ل}_{٢} + \text{س}_{٣}\text{ل}_{٣} + \ldots + \text{س}_{ن}\text{ل}_{ن}\right)$$

$$\mu(\text{أس} + \text{ب}) = \text{أ}\,\mu(\text{س}) + \text{ب} = \text{أ}\left(\text{س}_{١}\text{ل}_{١} + \text{س}_{٢}\text{ل}_{٢} + \text{س}_{٣}\text{ل}_{٣} + \ldots + \text{س}_{ن}\text{ل}_{ن}\right) + \text{ب}$$

$$\mu(\text{س}^{٢}) = \text{س}_{١}^{٢}\text{ل}_{١} + \text{س}_{٢}^{٢}\text{ل}_{٢} + \text{س}_{٣}^{٢}\text{ل}_{٣} + \ldots + \text{س}_{ن}^{٢}\text{ل}_{ن}$$

مجموع (مربّع قيمة س) × (الاحتمال).

مثال:

عند إلقاء ٣ قطع نقود، يكون س عدد مرات ظهور الصورة. والتوزيع الاحتمالى للمتغيّر س مبيّن فى الجدول الآتى.

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

توقُّع ٣س + ٢

$$\mu(٣\text{س} + ٢) = ٣\left(٠ \times \frac{١}{٨} + ١ \times \frac{٣}{٨} + ٢ \times \frac{٣}{٨} + ٣ \times \frac{١}{٨}\right) + ٢$$

$$= \frac{١٣}{٢}$$

توقُّع س^{٢}

$$\mu(\text{س}^{٢}) = ٠^{٢} \times \frac{١}{٨} + ١^{٢} \times \frac{٣}{٨} + ٢^{٢} \times \frac{٣}{٨} + ٣^{٢} \times \frac{١}{٨}$$

$$= ٣$$

استعد

عند إلقاء ٤ قطع نقود معًا، يكون س عدد مرات ظهور الكتابة. أوجد توقُّع كلٍّ من المتغيّرات العشوائية الآتية.

(أ) ٢س + ٣ **(ب)** –٤س + ١ **(جـ)** س^{٢}

طريقة الحل

كوّن دائمًا جدول التوزيع الاحتمالى.

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ل	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	١

(أ) $\mu(٢س+٣) = ٢\left(٠\times\frac{١}{١٦}+١\times\frac{٤}{١٦}+٢\times\frac{٦}{١٦}+٣\times\frac{٤}{١٦}+٤\times\frac{١}{١٦}\right)+٣$

$= \underline{٧}$

(ب) $\mu(-٤س+١) = -٤\left(٠\times\frac{١}{١٦}+١\times\frac{٤}{١٦}+٢\times\frac{٦}{١٦}+٣\times\frac{٤}{١٦}+٤\times\frac{١}{١٦}\right)+١$

$= \underline{-٧}$

(جـ) $\mu(س^{٢}) = ٠^{٢}\times\frac{١}{١٦}+١^{٢}\times\frac{٤}{١٦}+٢^{٢}\times\frac{٦}{١٦}+٣^{٢}\times\frac{٤}{١٦}+٤^{٢}\times\frac{١}{١٦}$

$= \frac{٨٠}{١٦}$

$= \underline{٥}$

حاول

صندوق به ٤ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة. أوجد توقُّع كلٍّ من المتغيّرات العشوائية الآتية.

(أ) ٣س **(ب)** ٢س + ٢ **(جـ)** −٣س + ٤ **(د)** س^{٢}

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ عند إلقاء ٣ قطع نقود معًا، يكون س عدد مرات ظهور الصورة. أوجد توقُّع كلٍّ من المتغيّرات العشوائية الآتية.

(أ) −٤س **(ب)** ٣س − ١ **(جـ)** −٢س + ٣ **(د)** س^{٢}

٢ صندوق به ٣ كرات حمراء وكرتان بيضاوان. عند سحب كرتين معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة. أوجد توقُّع كلٍّ من المتغيّرات العشوائية الآتية.

(أ) $\frac{١}{٢}$س **(ب)** ٤س + ٥ **(جـ)** $-\frac{١}{٣}$س + ٢ **(د)** س^{٢}

★ التحدّي

خمس بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٥. عند سحب بطاقة واحدة دون النظر، يكون س العدد المكتوب عليها. أوجد توقُّع كلٍّ من المتغيّرات العشوائية الآتية.

(أ) −٢س **(ب)** $\frac{١}{٢}$س + ٣
(جـ) −٣س + ١ **(د)** س^{٢}

٤-٨ تباين المتغيّرات العشوائية

الرياضيات

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

حساب تباين متغيّر عشوائي متقطّع.

لاحظ!

- الفرق بين كل قيمة من قيم المتغيّر العشوائي س والتوقُّع μ(س) يسمّى **انحراف** المتغيّر العشوائي س

ومقدار توقُّع مربّع الانحراف $(\text{س} - \mu(\text{س}))^{٢}$ يسمّى **تباين** المتغيّر العشوائي س، ويرمز له بالرمز $\sigma^{٢}$(س)

$$\sigma^{٢}(\text{س}) = \mu\{(\text{س} - \mu(\text{س}))^{٢}\}$$

- والتباين $\sigma^{٢}$(س) مقدار يبيّن مدى تشتّت قيم المتغيّر العشوائي س عن التوقُّع μ(س)

وكلّما صغر التباين، تجمّعت قيم المتغيّر العشوائي قريبًا من المتوسّط.

- ويمكن أيضًا حساب التباين $\sigma^{٢}$(س) بالقانون الآتي.

$$\sigma^{٢}(\text{س}) = \mu(\text{س}^{٢}) - \{\mu(\text{س})\}^{٢}$$

الحدُّ الأوّل توقُّع س^{٢}، والثاني **مربّع** توقُّع س – لا توقُّع مربّعها.

استعد

صندوق به ٤ كرات حمراء و٣ كرات سوداء. عند سحب كرتين، واحدة تلو الأخرى بدون إرجاع، يكون س عدد الكرات السوداء المسحوبة. أوجد التوقُّع μ(س) والتباين $\sigma^{٢}$(س) للمتغيّر العشوائي س

طريقة الحل

كوّن دائمًا جدول التوزيع الاحتمالي (وعدد نواتج التجربة ٧ × ٦ = ٤٢ ناتجًا)

س	٠	١	٢	المجموع
ل	$\frac{١٢}{٤٢}$	$\frac{٢٤}{٤٢}$	$\frac{٦}{٤٢}$	١

من الجدول السابق،

$$\mu(\text{س}) = ٠ \times \frac{١٢}{٤٢} + ١ \times \frac{٢٤}{٤٢} + ٢ \times \frac{٦}{٤٢}$$

$$= \frac{٣٦}{٤٢} = \frac{٦}{٧}$$

$$\sigma^{٢}(\text{س}) = \mu(\text{س}^{٢}) - \{\mu(\text{س})\}^{٢}$$

$$\mu(\text{س}^{٢}) = ٠^{٢} \times \frac{١٢}{٤٢} + ١^{٢} \times \frac{٢٤}{٤٢} + ٢^{٢} \times \frac{٦}{٤٢} = \frac{٨}{٧}$$

$$\text{إذن } \sigma^{٢}(\text{س}) = \frac{٨}{٧} - \left(\frac{٦}{٧}\right)^{٢}$$

$$= \frac{٢٠}{٤٩}$$

$$\mu(\text{س}) = \frac{٦}{٧} \text{ و } \sigma^{٢}(\text{س}) = \frac{٢٠}{٤٩}$$

أخطاء شائعة

$\sigma^{٢}(س) = \mu(س^{٢}) - \{\mu(س)\}$

$= \frac{٨}{٧} - \frac{٦}{٧} = \frac{٢}{٧}$

نسيت تربيع $\mu(س)$ فى قانون التباين.

حاول

أوجد التوقُّع $\mu(س)$ والتباين $\sigma^{٢}(س)$ للمتغيّر العشوائى س الآتى.

١ ثمانى بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٨. بعد خلطها، وعند سحب بطاقة واحدة، يكون س العدد المكتوب عليها.

٢ من بين ٩ تذاكر، تذكرتان رابحتان. عند سحب ٣ تذاكر معًا، يكون س عدد التذاكر الرابحة المسحوبة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد التوقُّع $\mu(س)$ والتباين $\sigma^{٢}(س)$ للمتغيّر العشوائى س الآتى.

١ سبع بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٧. عند سحب بطاقة واحدة دون النظر، يكون س العدد المكتوب عليها.

٢ من بين ١٠ تذاكر، ٣ تذاكر رابحة. عند سحب ٤ تذاكر معًا، يكون س عدد التذاكر الرابحة المسحوبة.

٣ صندوق به ٣ كرات بيضاء و٤ كرات حمراء. عند سحب ٣ كرات معًا، يكون س عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

٤ أربع بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٤. عند سحب بطاقتين، يكون س مجموع العددين المكتوبين عليهما.

٥ عند إلقاء حجرى نرد، أحدهما كبير والآخر صغير، يكون س القيمة المطلقة للفرق بين العددين الظاهرين.

★ التحدّي

يحتفظ معمل طبّى حيوى بصينية اختبارات مهمّة تضمّ ٩ فحوص تشخيصية فيروسية متخصّصة: ٥ فحوص للأنفلونزا الحمراء، و٤ فحوص للأنفلونزا الزرقاء. يختار فنّى إكلينيكى فحصين، واحدًا تلو الآخر بدون إرجاع، لإجراء لوحة فحص لمريض. ليكن س المتغيّر العشوائى الذى يمثّل عدد فحوص الأنفلونزا الزرقاء المختارة.



الجزء (أ) أوجد جميع القيم الممكنة للمتغيّر س، ثم أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س.

الجزء (ب) أوجد التوقُّع $\mu(س)$ لعدد فحوص الأنفلونزا الزرقاء المختارة، ثم أوجد تباين عدد الفحوص الزرقاء المختارة $\sigma^{٢}(س)$ لقياس مدى تذبذب أسلوب المعاينة هذا.

٥-٨
الرياضيات

الانحراف المعيارى للمتغيّرات العشوائية

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

لاحِظ!

- الجذر التربيعى الموجب للتباين $\sigma^{٢}$(س) للمتغيّر العشوائى س يسمّى **الانحراف المعيارى** للمتغيّر س، ويرمز له بالرمز σ(س)

$$\sigma(\text{س}) = \sqrt{\sigma^{٢}(\text{س})}$$

- وكالتباين، كلما صغر الانحراف المعيارى تجمّعت قيم المتغيّر العشوائى قريبًا من التوقُّع.
- وحدة التباين مربّع وحدة البيانات الأصلية، إذن لا تصحّ مقارنته بالتوقُّع مباشرة.

أمّا الانحراف المعيارى فوحدته وحدة البيانات نفسها، فتصحّ مقارنته بالتوقُّع وإجراء العمليات معه.

نواتج التعلّم

حساب الانحراف المعيارى، وتفسيره مقياسًا لتشتّت المتغيّر العشوائى أو لمقارنته.

استعد

عند إلقاء قطعتى نقود معًا، إذا كان احتمال ظهور الصورة فى كلٍّ منهما $\frac{٤}{٧}$ واحتمال ظهور الكتابة $\frac{٣}{٧}$، وكان س عدد مرات ظهور الكتابة، فأوجد الانحراف المعيارى σ(س)

طريقة الحل

أوجد أوّلًا التباين $\sigma^{٢}$(س) للمتغيّر س

وجدول التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س كما يأتى.

س	٠	١	٢	المجموع
ل	$\frac{١٦}{٤٩}$	$\frac{٢٤}{٤٩}$	$\frac{٩}{٤٩}$	١

ومن جدول التوزيع الاحتمالى:

$$\mu(\text{س}) = ٠ \times \frac{١٦}{٤٩} + ١ \times \frac{٢٤}{٤٩} + ٢ \times \frac{٩}{٤٩} = \frac{٦}{٧}$$

$$\mu(\text{س}^{٢}) = ٠^{٢} \times \frac{١٦}{٤٩} + ١^{٢} \times \frac{٢٤}{٤٩} + ٢^{٢} \times \frac{٩}{٤٩} = \frac{٦٠}{٤٩}$$

$\sigma^{٢}(\text{س}) = \mu(\text{س}^{٢}) - \{\mu(\text{س})\}^{٢}$

وبقانون التباين

$$\sigma^{٢}(\text{س}) = \mu(\text{س}^{٢}) - \{\mu(\text{س})\}^{٢} = \frac{٦٠}{٤٩} - \left(\frac{٦}{٧}\right)^{٢} = \frac{٢٤}{٤٩}$$

إذن الانحراف المعيارى

$$\sigma(\text{س}) = \sqrt{\frac{٢٤}{٤٩}} = \frac{\sqrt{٦^{٢}}}{٧}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغيّر العشوائى س معطى بالجدول الآتى، فأوجد الانحراف المعيارى σ(س)

(أ)

س	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٤}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	١

(ب)

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{٤}{٣٥}$	$\frac{١٨}{٣٥}$	$\frac{١٢}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$	١

٢ صندوق به ٤ كرات حمراء و٣ كرات بيضاء. عند سحب كرتين معًا، يكون س عدد الكرات البيضاء المسحوبة. أوجد الانحراف المعيارى σ(س)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغيّر العشوائى س معطى بالجدول الآتى، فأوجد الانحراف المعيارى σ(س)

(أ)

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

(ب)

س	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
ل	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$	١

★ التحدّي



يستخدم مهندس زراعى نظام رى ذكيًّا مزوَّدًا بـ٨ مجسّات رطوبة موزَّعة فى حقل زراعى. وبسبب عطل مفاجئ فى شبكة الاتصال اللاسلكى، توقّفت بعض المجسّات عن إرسال البيانات إرسالًا صحيحًا. وتبيّن سجلات النظام أن مجسّين اثنين فقط يعملان بكفاءة عالية، وأن المجسّات الستة الباقية ترسل قراءات خاطئة.

ويسحب النظام تلقائيًّا عينة عشوائية من ٤ مجسّات معًا لإعادة معايرتها واختبار جودة اتصالها. ليكن س المتغيّر العشوائى الذى يمثّل عدد المجسّات العاملة بكفاءة عالية فى هذه العينة.

الجزء (أ) أوجد جميع القيم الممكنة للمتغيّر العشوائى س، ثم أوجد التوزيع الاحتمالى الكامل للمتغيّر س.

الجزء (ب) أوجد الانحراف المعيارى σ(س) لعدد المجسّات العاملة المختارة، لتقويم دقة نظام إعادة المعايرة التلقائى واستقراره.

٦-٨ تحويل المتغيّر العشوائى (١)

الرياضيات

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

لاحِظ!

للمتغيّر العشوائى س، يكون المقدار الخطى أس + ب **متغيّرًا عشوائيًّا** أيضًا، وتتحقّق العلاقات الآتية.

توقُّع أس + ب $\mu(أس + ب) = أ\mu(س) + ب$

تباين أس + ب $\sigma^{٢}(أس + ب) = أ^{٢}\sigma^{٢}(س)$

الانحراف المعيارى لـ أس + ب $\sigma(أس + ب) = |أ|\sigma(س)$

استعد

من بين ١٠ تذاكر، ٣ منها تذاكر رابحة. عند سحب ٤ تذاكر معًا، يكون س عدد التذاكر الرابحة المسحوبة. أوجد التباين $\sigma^{٢}$(ص) والانحراف المعيارى σ(ص) للمتغيّر العشوائى ص الآتى

(أ) ص = ٢س + ١ **(ب)** ص = −٣س − ٢

طريقة الحل

كوّن أوّلًا جدول التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س، ثم أوجد $\sigma^{٢}$(س) وσ(س)

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{٣٥}{٢١٠}$	$\frac{١٠٥}{٢١٠}$	$\frac{٦٣}{٢١٠}$	$\frac{٧}{٢١٠}$	١

ومن جدول التوزيع الاحتمالى،

$$\mu(س) = ٠ \times \frac{٣٥}{٢١٠} + ١ \times \frac{١٠٥}{٢١٠} + ٢ \times \frac{٦٣}{٢١٠} + ٣ \times \frac{٧}{٢١٠}$$

$$= \frac{٦}{٥}$$

$$\mu(س^{٢}) = ٠^{٢} \times \frac{٣٥}{٢١٠} + ١^{٢} \times \frac{١٠٥}{٢١٠} + ٢^{٢} \times \frac{٦٣}{٢١٠} + ٣^{٢} \times \frac{٧}{٢١٠}$$

$$= ٢$$

$$\sigma^{٢}(س) = \mu(س^{٢}) - \{\mu(س)\}^{٢} = ٢ - \left(\frac{٦}{٥}\right)^{٢}$$

$$= \frac{١٤}{٢٥}$$

$$\sigma(س) = \sqrt{\sigma^{٢}(س)} = \sqrt{\frac{١٤}{٢٥}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٤}}{٥}$$

نواتج التعلّم

إجراء تحويلات على المتغيّر العشوائى تتضمّن ثوابت متعدّدة أو تعديلات غير خطية، وحساب التوقُّع والتباين الناتجين حسابًا صحيحًا.

(أ) عندما ص = ٢س + ١،

$\sigma^{٢}(ص) = \sigma^{٢}(٢س + ١) = ٢^{٢} \times \sigma^{٢}(س)$

$= ٤ \times \frac{١٤}{٢٥}$

$= \frac{٥٦}{٢٥}$

$\sigma(ص) = \sigma(٢س + ١) = |٢| \times \sigma(س)$

$= ٢ \times \frac{\sqrt{١٤}}{٥}$

$= \frac{٢\sqrt{١٤}}{٥}$

(ب) عندما ص = −٣س − ٢،

$\sigma^{٢}(ص) = \sigma^{٢}(-٣س - ٢) = (-٣)^{٢} \times \sigma^{٢}(س)$

$= ٩ \times \frac{١٤}{٢٥}$

$= \frac{١٢٦}{٢٥}$

$\sigma(ص) = \sigma(-٣س - ٢) = |-٣| \times \sigma(س)$

$= ٣ \times \frac{\sqrt{١٤}}{٥}$

$= \frac{٣\sqrt{١٤}}{٥}$

حاول

عند سحب كرتين معًا من صندوق به ٣ كرات حمراء و٤ كرات بيضاء، يكون س عدد الكرات الحمراء المسحوبة. أوجد التباين $\sigma^{٢}(ص)$ والانحراف المعيارى $\sigma(ص)$ للمتغيّر العشوائى ص الآتى

(أ) ص = س + ٣ **(ب)** ص = ٢س − ٥ **(ج)** ص = −٣س + ٤

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة، يكون س العدد الظاهر. أوجد التباين $\sigma^{٢}(ص)$ والانحراف المعيارى $\sigma(ص)$ للمتغيّر العشوائى ص الآتى

(أ) ص = س + ٢ **(ب)** ص = ٣س + ١ **(ج)** ص = −٢س + ٤

★ التحدّي

تُطلق شركة ناشئة للخدمات اللوجستية ٣ طائرات توصيل مسيَّرة مستقلّة معًا، لاختبار مسار جديد فائق السرعة. ولكل طائرة احتمال ٥٠٪ (٠,٥) أن تنهى رحلتها قبل موعدها، واحتمال ٥٠٪ (٠,٥) أن تنهيها فى موعدها.

ليكن س المتغيّر العشوائى الذى يمثّل عدد الطائرات التى تنهى رحلتها قبل موعدها.

يدرس فريق التشغيل ثلاثة نماذج مختلفة للمخاطر المالية (ص) ليعرف أثر تذبذب الأداء فى عوائد التوصيل اليومية. أوجد التباين $\sigma^{٢}(ص)$ والانحراف المعيارى $\sigma(ص)$ للمتغيّر العشوائى ص الآتى.

(أ) ص = س − ٣ **(ب)** ص = ٢س − ١ **(ج)** ص = −٣س + ١



٧-٨ تحويل المتغيّرات العشوائية (٢)

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

الرياضيات

لاحظ!

للمتغيّر العشوائى س، يكون المقدار الخطى أس + ب متغيّرًا عشوائيًّا أيضًا، وتتحقّق العلاقات الآتية.

توقُّع أس + ب $\mu(أس + ب) = أ\mu(س) + ب$

تباين أس + ب $\sigma^{٢}(أس + ب) = أ^{٢}\sigma^{٢}(س)$

الانحراف المعيارى لأس + ب $\sigma(أس + ب) = |أ|\sigma(س)$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

(أ) فى لعبة تُلقى فيها قطعتا نقود، وتحصل على ٥٠ جنيهًا عن كل صورة تظهر. فإذا لعبتها مرة واحدة بعد دفع ٣٠ جنيهًا رسم اشتراك، فأوجد التوقُّع والانحراف المعيارى لصافى الجائزة (قيمة الجائزة بعد خصم رسم الاشتراك).

(ب) ليكن س عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء ٣ قطع نقود معًا، ولتكن ص = أس + ب.

أوجد قيمتى أ، ب اللتين يكون عندهما توقُّع ص مساويًا ٧ والانحراف المعيارى $\sqrt{٣}$،

(بفرض أن أ > ٠).

طريقة الحل

(أ) ليكن س عدد مرات ظهور الصورة، والتوزيع الاحتمالى موضّح فى الجدول الآتى.

س	٠	١	٢	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

من الجدول، $\mu(س) = ١$ و $\mu(س^{٢}) = \frac{٣}{٢}$، إذن

$$\sigma^{٢}(س) = \mu(س^{٢}) - \{\mu(س)\}^{٢}$$

$$= \frac{٣}{٢} - ١^{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\sigma(س) = \sqrt{\sigma^{٢}(س)} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

ولتكن ص قيمة الجائزة بعد خصم رسم الاشتراك، فتُكتب على الصورة

تُكتب على الصورة ص = أس + ب.

$$ص = ٥٠س - ٣٠$$

إذن توقُّع ص هو

$$\mu(ص) = \mu(٥٠س - ٣٠) = ٥٠ \times ١ - ٣٠ = ٢٠$$

والانحراف المعيارى لص هو

$$\sigma(ص) = \sigma(٥٠س - ٣٠) = |٥٠| \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٢٥\sqrt{٢}$$

التوقُّع: ٢٠، والانحراف المعيارى: $٢٥\sqrt{٢}$

نواتج التعلّم

إجراء تحويلات على المتغيّر العشوائى تتضمّن ثوابت متعدّدة أو تعديلات غير خطية، وحساب التوقُّع والتباين الناتجين حسابًا صحيحًا.

(ب) التوزيع الاحتمالى للمتغيّر س موضّح فى الجدول الآتى.

س	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

من الجدول، $\mu(س) = \frac{٣}{٢}$، $\mu(س^٢) = ٣$، إذن

$$\sigma^٢(س) = \mu(س^٢) - \{\mu(س)\}^٢$$

$$= ٣ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٣}{٤}$$

$$\sigma(س) = \sqrt{\sigma^٢(س)} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

وبما أن $\mu(أس + ب) = ٧\sqrt{٣}$، فإن $\mu أ(س) + ب = ٧\sqrt{٣}$

$$\frac{٣}{٢}أ + ب = ٧\sqrt{٣} \quad \ldots\ \ldots\ (١)$$

وبما أن $\sigma(أس + ب) = ٣$، فإن $|أ|\sigma(س) = ٣$

$$|أ|\frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٣$$

وبما أن $أ > ٠$، فإن

$$أ\frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٣ \quad \ldots\ \ldots\ (٢)$$

وبحلّ المعادلتين (١)، (٢) نحصل على

$$أ = ٢\sqrt{٣} \qquad ب = ٤\sqrt{٣}$$

$\sigma(أس + ب) = |أ|\sigma(س)$.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ صندوق به ٤ كرات حمراء و٣ كرات سوداء. وفى لعبة تسحب منه كرتين معًا، وتحصل على ٢٠ جنيهًا عن كل كرة سوداء مسحوبة. فإذا دفعت ١٠ جنيهات كى تلعبها مرة واحدة، فأوجد التوقُّع والانحراف المعيارى لصافى المكسب.

٢ ليكن س العدد الظاهر عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة، ولتكن ص = أس + ب. أوجد قيمتى أ، ب اللتين يكون عندهما توقُّع ص مساويًا ٠ والانحراف المعيارى ١٠، (بفرض أن أ > ٠).

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ تبدأ النقطة ن من نقطة الأصل وتتحرك على خطّ الأعداد، فتتحرك +٢ إذا ظهرت الصورة و–١ إذا ظهرت الكتابة. أوجد التوقُّع والتباين لإحداثى ن بعد إلقاء قطعة النقود ٣ مرات.

٢ كيس به ٥ كرات بيضاء و٤ كرات حمراء. وفى لعبة تسحب منه ٣ كرات معًا، وتحصل على ٣٠ جنيهًا عن كل كرة حمراء مسحوبة. فإذا دفعت ٢٠ جنيهًا كى تلعبها مرة واحدة، فأوجد التوقُّع والانحراف المعيارى لصافى المكسب.

٣ فى لعبة تُلقى فيها قطعتان من فئة ١٠٠ قرش، وتحصل على مبلغ يساوى قيمة القطع التى ظهرت صورتها. فإذا دفعت ١٠٠ قرش كى تلعبها مرة واحدة، فأوجد التوقُّع والانحراف المعيارى لصافى المكسب.

٤ ليكن س العدد الظاهر عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة، ولتكن ص = أس + ب. أوجد قيمتى أ، ب اللتين يكون عندهما توقُّع ص مساويًا ٣$\sqrt{٢١}$ والانحراف المعيارى $\sqrt{٥}$، (بفرض أن أ > ٠).

★ التحدّي

تدير شركة ناشئة للطاقة النظيفة شبكة صغيرة تغذّيها توربينتان هوائيتان مستقلتان. ولتقلّب أحوال الرياح، فإن احتمال أن تعمل كل توربينة بأقصى أداء ٥٠% (٠,٥)، واحتمال أن تعمل عند حدّها الأدنى ٥٠% (٠,٥).

ليكن س المتغيّر العشوائى الذى يمثّل عدد التوربينات العاملة بأقصى أداء خلال ساعة معيّنة.

ولتثبيت الشبكة المحلية، تمرّ الطاقة عبر عاكس ذكى يضبط الجهد الخارج، وتُنمذَج القدرة النهائية الموزَّعة على الشبكة مقيسة بالميجاوات بالتحويل الخطى الآتى

ص = أس + ب

ويحتاج فريق الهندسة إلى ضبط ثابتى النظام (أ، ب) لتحقيق معايير الأمان والكفاءة المطلوبة.

المطلوب

(أ) أوجد التوقُّع μ(س) والانحراف المعيارى σ(س) لعدد التوربينات العاملة بأقصى أداء.

(ب) أوجد قيمتى معاملى الضبط أ، ب بالضبط، بحيث يكون توقُّع القدرة النهائية μ(ص) = ١٢ ميجاوات وانحرافها المعيارى ٢$\sqrt{٢}$ ميجاوات، (بفرض أن معامل القياس أ > ٠).



تأمّل

كيف يغيّر انتقال نظرتنا من تتبّع نتائج فردية لا يمكن التنبّؤ بها، إلى تحليل التوزيع الاحتمالى للمتغيّر العشوائى، قدرتنا على اتخاذ القرار فى العلوم والمجتمع؟

٨-٨
الرياضيات

توقُّع عدّة متغيّرات عشوائية (١) (المجموع)

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

حساب توقُّع مجموع متغيّرين عشوائيين أو ثلاثة متغيّرات عشوائية.

المفهوم ٢ · التوقّع والتباين لعدّة متغيّرات عشوائية



فكّر فى إدارة مقصف مدرسة مزدحم أو مطعم وجبات سريعة فى الحىّ. ففى كل يوم يقدّر مدير المطبخ كمّية الطعام التى يجهّزها. وتأمّل صنفين رائجين: أرغفة الدجاج الملفوفة (وليكن متغيّرها س)، وعصائر الفاكهة المخفوقة (والمتغيّر ص). يتغيّر عدد الأرغفة المباعة كل يوم تبعًا للطقس أو ليوم الأسبوع، لكن المدير يعرف متوسّطها اليومى من سجلّاته.

ويتقلّب عدد العصائر المباعة بدوره. وإذا أراد المدير تقدير إيراد الغداء اليومى كلّه، نظر إلى الصنفين معًا س+ص. فإذا اشتدّت موجة حرّ اشترى الطلاب أرغفة ساخنة أقلّ وعصائر باردة أكثر، أى إن مبيعات صنف تؤثّر مباشرة فى مبيعات الآخر. فكيف تتجمّع هذه التقلّبات اليومية لتؤثّر فى الإيراد الكلّى؟ إن فهم سلوك عدّة متغيّرات عشوائية معًا يمكّن الشركات والمستشفيات والعلماء من التخطيط للمستقبل، وتقدير الموازنات بدقّة، وإدارة التغيّرات غير المتوقّعة.

السؤال الموجّه: عند جمع متغيّرين عشوائيين، كيف تعمل قواعد التوقّع؟ وما الشرط الذى يجعل تباينيهما يجمعان جمعًا مباشرًا؟

لاحِظ!

إذا كان س، ص متغيّرين عشوائيين، فإن مجموعهما س+ص **متغيّر عشوائى** أيضًا، وتتحقّق العلاقة الآتية.

وجمع التوقُّعين المنفصلين أيسر من حساب توقُّع المجموع.

$$\mu(س + ص) = \mu(س) + \mu(ص)$$

ولثلاثة متغيّرات عشوائية أو أكثر تتحقّق العلاقة الآتية بالمثل.

$$\mu(س + ص + ع) = \mu(س) + \mu(ص) + \mu(ع)$$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

(أ) إذا كان التوزيعان الاحتماليان للمتغيّرين العشوائيين س، ص كما فى الجدولين الآتيين، فأوجد توقُّع س+ص

س	٥	١٠	٢٠	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ص	٣	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

(ب) ألقيت قطعة نقود فئة جنيه، وأخرى فئة ٥٠ قرشًا، وثالثة فئة ٢٥ قرشًا، كل منها مرة واحدة. ولتكن س، ص، ع عدد مرات ظهور الصورة لكل قطعة على الترتيب. أوجد $\mu(س + ص + ع)$

طريقة الحل

(أ) من جدول التوزيع الاحتمالى،

$$\mu(\text{س}) = ٥ \times \frac{١}{٣} + ١٠ \times \frac{١}{٣} + ٢٠ \times \frac{١}{٣} = \frac{٣٥}{٣}$$

$$\mu(\text{ص}) = ٣ \times \frac{١}{٢} + ٦ \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$$

إذن $\mu(\text{س} + \text{ص}) = \mu(\text{س}) + \mu(\text{ص})$

$$= \frac{٣٥}{٣} + \frac{٩}{٢}$$

$$= \frac{٩٧}{٦}$$

(ب) وبما أن $\mu(\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) = \mu(\text{س}) + \mu(\text{ص}) + \mu(\text{ع})$، فأوجد توقُّع كل من س، ص، ع على الترتيب.

والتوزيعات الاحتمالية متطابقة، كما فى الجداول الآتية.

س	٠	١	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

ص	٠	١	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

ع	٠	١	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

من الجداول السابقة، $\mu(\text{س}) = ٠ \times \frac{١}{٢} + ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

وبالمثل $\mu(\text{ص}) = \frac{١}{٢}$ و$\mu(\text{ع}) = \frac{١}{٢}$

إذن $\mu(\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) = \mu(\text{س}) + \mu(\text{ص}) + \mu(\text{ع})$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان التوزيعان الاحتماليان للمتغيّرين العشوائيين س، ص كما فى الجدولين الآتيين، فأوجد توقُّع س+ص

س	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ص	٤	٥	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

٢ ألقيت ثلاثة أحجار نرد (كبير ومتوسّط وصغير). ولتكن س، ص، ع الأعداد الظاهرة على كل حجر على الترتيب. أوجد μ(س + ص + ع)

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت التوزيعات الاحتمالية للمتغيّرات العشوائية س، ص، ع كما فى الجداول الآتية، فأوجد توقُّع س + ص + ع

س	١	٤	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

ص	٢	٥	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

ع	٣	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	١

٢ الكيس أ به ٤ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء، والكيس ب به ٥ كرات بيضاء وكرتان حمراوان. لتكن س عدد الكرات الحمراء المسحوبة عند سحب كرتين من الكيس أ، ولتكن ص عدد الكرات الحمراء المسحوبة عند سحب كرتين من الكيس ب. أوجد μ(س + ص)

٣ ألقيت قطعة نقود فئة جنيه، وأخرى فئة ٥٠ قرشًا، وثالثة فئة ٢٥ قرشًا، كل منها مرّتين. ولتكن س، ص، ع عدد مرات ظهور الصورة لكل قطعة على الترتيب. أوجد μ(س + ص + ع)

★ التحدّي

يعتمد قمر صناعيّ صغير على ثلاث منظومات فرعية مستقلّة: س (الدوافع)، ص (الألواح الشمسية)، ع (الاتصالات). وفى اختبار مدارىّ ترسل إلى كل منظومة إشارتا تشغيل بالضبط (ن = ٢). ولوجود تشويش ساكن، فإن احتمال نجاح كل إشارة ٥٠٪.

ولتكن س، ص، ع عدد مرات التشغيل الناجحة لكل منظومة. أوجد العدد المتوقّع الكلّى لمرات التشغيل الناجحة، أى μ(س + ص + ع).



تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

٩-٨
الرياضيات

توقع عدة متغيرات عشوائية (٢) (أ س + ب ص)

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

استخدام خطّية التوقُّع فى حساب توقُّع مقدار خطّى من متغيّرات عشوائية.

لاحِظ!

إذا كان أ، ب ثابتين غير صفريين، تحقّقت العلاقة الآتية للمتغيّرين العشوائيين س ص

$$\mu(أس + بص) = أ\mu(س) + ب\mu(ص)$$

استعد

فى لعبة تُلقى قطعتان من فئة ٥٠٠ نقطة وثلاث قطع من فئة ١٠٠ نقطة معًا. واحتمال ظهور الصورة يساوى احتمال ظهور الكتابة فى كل قطعة. ولتكن ع مجموع نقاط القطع التى ظهرت صورتها. أوجد التوقُّع $\mu(ع)$

طريقة الحل

لتكن س عدد قطع فئة ٥٠٠ نقطة التى ظهرت صورتها، ولتكن ص عدد قطع فئة ١٠٠ نقطة التى ظهرت صورتها.

ولإيجاد توقُّع كلٍّ من المتغيّرين س، ص نلخّص التوزيع الاحتمالى لكل منهما فى جدول.

مجموع احتمالات كل متغيّر عشوائى يساوى ١ – وهو تحقّق سريع من صحّة الجدول.

س	٠	١	٢	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

ص	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

من جدول التوزيع الاحتمالى،

$$\mu(س) = ٠ \times \frac{١}{٤} + ١ \times \frac{٢}{٤} + ٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٤}{٤} = ١$$

$$\mu(ص) = ٠ \times \frac{١}{٨} + ١ \times \frac{٣}{٨} + ٢ \times \frac{٣}{٨} + ٣ \times \frac{١}{٨}$$

$$= \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

اكتب المقدار على الصورة
ع = أس + بص

وهنا يمكن كتابة ع على الصورة ع = ٥٠٠س + ١٠٠ص

$$\mu(ع) = \mu(٥٠٠س + ١٠٠ص)$$

$$= ٥٠٠ \times \mu(س) + ١٠٠ \times \mu(ص)$$

$$= ٥٠٠ \times ١ + ١٠٠ \times \frac{٣}{٢}$$

$$= ٦٥٠$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ فى لعبة تُلقى قطعتان من فئة ٥٠٠ نقطة وقطعتان من فئة ١٠٠ نقطة معًا. واحتمال ظهور الصورة يساوى احتمال ظهور الكتابة فى كل قطعة. ولتكن ع مجموع نقاط القطع التى ظهرت صورتها. أوجد μ (ع)

٢ ألقى حجر نرد مرتين، والنتيجة ٣ أمثال العدد الظاهر فى الإلقاء الأول، و٥ أمثال العدد الظاهر فى الإلقاء الثانى. ولتكن ع مجموع نتيجتى الإلقاءين. أوجد توقُّع ع

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ ألقيت ثلاث قطع من فئة ١٠٠ قرش وقطعة من فئة ٥٠ قرشًا معًا. ولتكن ع مجموع قيم القطع التى ظهرت صورتها. أوجد توقُّع ع

٢ ألقى حجر نرد مرتين، والنتيجة ضعف العدد الظاهر فى الإلقاء الأول، و١٠ أمثال العدد الظاهر فى الإلقاء الثانى. ولتكن ع مجموع النتيجتين. أوجد μ (ع)

٣ الصندوق الأول به ٥ كرات بيضاء و٤ كرات حمراء، والصندوق الثانى به ٤ كرات بيضاء وكرتان حمراوان. ولتكن ع مجموع عدد الكرات الحمراء المسحوبة عند سحب كرتين معًا من الصندوق الأول وكرتين معًا من الصندوق الثانى. أوجد μ (ع)

★ التحدّي

تخيّل أن شركتك تقيم حفلًا خيريًّا فيه سحبان منفصلان:

السحب الأول (سلّة التقنية): به ١٠ تذاكر، منها تذكرتان رابحتان.
السحب الثانى (سلّة الصحة): به ٦ تذاكر، منها تذكرة واحدة رابحة.

قرّرت دعم القضية، فاشتريت تذكرتين من السحب الأول وتذكرتين من السحب الثانى. ولتكن ع العدد الكلّى للتذاكر الرابحة التى تحصل عليها. فما العدد المتوقَّع للجوائز التى تربحها؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

١٠-٨
الرياضيات

توقع عدّة متغيّرات عشوائية (٣) (حاصل الضرب)

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

استخدام خاصية توقُّع حاصل ضرب متغيّرين عشوائيين مستقلّين، وتفسير سبب اشتراط الاستقلال لتحقُّق هذه القاعدة.

لاحِظ!

لكل قيمتين أ، ب يأخذهما المتغيّران العشوائيان س، ص، إذا كانت المساواة

ل(س = أ ، ص = ب) = ل(س = أ) × ل(ص = ب)

متحقّقةً دائمًا مهما كانت قيمتا أ، ب، فإن المتغيّرين العشوائيين س، ص يسمّيان **مستقلّين**.

أى إذا كان وقوع س = أ ووقوع ص = ب لا يؤثّر أحدهما فى الآخر، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوى حاصل ضرب احتمال س = أ فى احتمال ص = ب.

مثال: أُلقِيت ٣ قطع نقود وحجر نرد. لتكن س عدد مرات ظهور الصورة، ولتكن ص العدد الظاهر على حجر النرد. فالمتغيّران س، ص مستقلّان.

إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص **مستقلّين**، فإن

$$\mu(س ص) = \mu(س) \times \mu(ص)$$

قانون توقُّع حاصل الضرب يشترط الاستقلال.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، وتوزيعاهما الاحتماليان كما فى الجدولين الآتيين، فأوجد $\mu(س ص)$

س	١	٣	٥	المجموع
ل	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	١

ص	٢	٤	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

٢ ألقى أحمد قطعتَى نقود معًا مرة واحدة، وألقى محمد حجر نرد مرة واحدة. لتكن س عدد مرات ظهور الصورة، ولتكن ص العدد الظاهر على حجر النرد. أوجد توقُّع حاصل الضرب س ص

طريقة الحل

١ بما أنّ المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّان، فإن $\mu(س ص) = \mu(س)\,\mu(ص)$

أوّلًا نوجد $\mu(س)$ و$\mu(ص)$

ومن جدولَى التوزيع الاحتمالى

$$\mu(س) = ١ \times \frac{٢}{٥} + ٣ \times \frac{٢}{٥} + ٥ \times \frac{١}{٥} = \frac{١٣}{٥}$$

$$\mu(ص) = ٢ \times \frac{١}{٤} + ٤ \times \frac{٢}{٤} + ٦ \times \frac{١}{٤} = ٤$$

إذن $\mu(س ص) = \mu(س)\,\mu(ص) = \frac{١٣}{٥} \times ٤ = \frac{٥٢}{٥}$

٢ بما أنّ تجربة إلقاء قطعتَى النقود وتجربة إلقاء حجر النرد مستقلّتان، فإن المتغيّرين العشوائيين س، ص مستقلّان أيضًا.

إذن $\mu(س ص) = \mu(س)\,\mu(ص)$

والتوزيعان الاحتماليان لكل تجربة موضَّحان فى الجدولين الآتيين.

س	٠	١	٢	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

ص	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	١

ومن الجدولين $\mu(س) = ١$ و$\mu(ص) = \frac{٧}{٢}$

إذن $\mu(س ص) = \mu(س)\,\mu(ص) = ١ \times \frac{٧}{٢} = \frac{٧}{٢}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، وتوزيعاهما الاحتماليان كما فى الجدولين الآتيين، فأوجد $\mu_{(س ص)}$

س	١	٢	المجموع
ل	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

ص	٣	٤	المجموع
ل	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

٢ عند إلقاء حجر نرد وقطعة نقود معًا مرة واحدة، لتكن س العدد الظاهر، ولتكن ص عدد مرات ظهور الصورة. أوجد توقُّع حاصل الضرب س ص

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، وتوزيعاهما الاحتماليان كما فى الجداول الآتية، فأوجد $\mu_{(س ص)}$

(أ)

س	١	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$	١

ص	٢	٤	المجموع
ل	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

(ب)

س	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

ص	١	٢	المجموع
ل	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$	١

(ج)

س	٠	٢	٤	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ص	١	٣	٥	المجموع
ل	$\frac{٢}{٧}$	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$	١

٢ ألقى أحمد ٣ قطع نقود، وألقى محمد قطعتين معًا. لتكن س، ص عدد مرات ظهور الصورة لكلٍّ منهما على الترتيب. أوجد $\mu_{(س ص)}$

★ التحدّي

أربع بطاقات مرقَّمة من ١ إلى ٤. سُحِبت بطاقة ثم أُعيدت، ثم سُحِبت بطاقة أخرى. لتكن س رقم البطاقة الأولى، ولتكن ص رقم البطاقة الثانية. أوجد توقُّع حاصل الضرب س ص

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

١١-٨ تباين مجموع المتغيّرات العشوائية

الرياضيات

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

نواتج التعلّم

حساب تباين المجموع للمتغيّرات المستقلّة، وتعميم ذلك على المقادير الخطّية.

لاحِظ!

إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، فإن:

$$\sigma^{٢}(س + ص) = \sigma^{٢}(س) + \sigma^{٢}(ص)$$

$$\sigma(س + ص) = \sqrt{\sigma^{٢}(س + ص)}$$

قانون التباين يشترط الاستقلال – بخلاف قانون مجموع التوقُّع الذى لا يشترطه.

استعد

ثلاث بطاقات مرقّمة من ١ إلى ٣، سحبت منها بطاقة واحدة، ولتكن س رقمها. ثم ألقيت ٣ قطع نقود معًا، ولتكن ص عدد مرات ظهور الصورة. أوجد $\sigma^{٢}(س + ص)$ و$\sigma(س + ص)$

طريقة الحل

بما أن تجربة سحب البطاقة وتجربة إلقاء قطع النقود مستقلّتان، فإن المتغيّرين العشوائيين س، ص مستقلّان أيضًا.

والتوزيعان الاحتماليان لكل تجربة موضّحان فى الجدولين الآتيين.

س	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ص	٠	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$	١

التباين والانحراف المعيارى لكل متغيّرٍ على حِدَة، كما فى الدرس ٤ من هذا الفصل.

أوّلًا نوجد التباين لكل منهما.

$$\mu(س) = ٢ ،\ \mu(س^{٢}) = \frac{١٤}{٣}$$

$$\sigma^{٢}(س) = \mu(س^{٢}) - \{\mu(س)\}^{٢} = ٢^{٢} - \frac{١٤}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

$$\mu(ص) = \frac{٣}{٢} \text{ و } \mu(ص^{٢}) = ٣$$

$$\sigma^{٢}(ص) = \mu(ص^{٢}) - \{\mu(ص)\}^{٢} = ٣ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٤}$$

اجمع التباينين، ثم خُذ الجذر التربيعى للمجموع لتحصل على الانحراف المعيارى.

إذن $\sigma^{٢}(س + ص) = \sigma^{٢}(س) + \sigma^{٢}(ص) = \frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٣}$

$$= \frac{١٧}{١٢}$$

$$\sigma(س + ص) = \sqrt{\sigma^{٢}(س + ص)} = \sqrt{\frac{١٧}{١٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٥١}}{٦}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، وتوزيعاهما الاحتماليان كما فى الجدولين الآتيين، فأوجد $\sigma^{٢}$(س + ص) وσ(س + ص)

س	١	٢	٣	المجموع
ل	$\frac{١}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$	١

ص	١	٣	٥	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

٢ ألقى حجرا نرد (كبير وصغير). ولتكن س العدد الظاهر على الحجر الكبير، ولتكن ص العدد الظاهر على الحجر الصغير. أوجد التباين والانحراف المعيارى لـ س+ص

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان المتغيّران العشوائيان س، ص مستقلّين، وتوزيعاهما الاحتماليان كما فى الجداول الآتية، فأوجد $\sigma^{٢}$(س + ص) وσ(س + ص)

(أ)

س	١	٢	المجموع
ل	$\frac{٣}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	١

ص	٣	٤	المجموع
ل	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

(ب)

س	١	٣	٥	المجموع
ل	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	١

ص	٢	٤	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٢}{٦}$	١

(جـ)

س	٠	٣	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

ص	١	٤	المجموع
ل	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$	١

٢ ألقيت قطعة نقود وحجر نرد. لتكن س عدد مرات ظهور الصورة، ولتكن ص العدد الظاهر. أوجد التباين والانحراف المعيارى لـ س+ص

٣ ألقى أحمد قطعتى نقود، وألقى محمد ٣ قطع معًا. ولتكن س، ص عدد مرات ظهور الصورة لكل منهما على الترتيب. فأوجد $\sigma^{٢}$(س + ص) وσ(س + ص)

★ التحدّي

تخيّل أنك مستثمر أفراد تدير محفظة تداول خوارزمية صغيرة. ولتنويع المخاطر، يقسم نظامك الآلى رأس مالك كل صباح بين مؤشّرين مستقلّين تمامًا:

مؤشّر تقلّب السوق (س): يختار النظام أحد ٤ مستويات للمخاطرة (مدرّجة انتظاميًّا من ١ إلى ٤) بناءً على عقود ما قبل الافتتاح.

زخم قطاع العملات الرقمية (ص): يعطى روبوت التداول عالى التردّد عامل مخاطرة يوميًّا على مقياس آلى من ١ إلى ٦ (ينمذج بإلقاء حجر نرد ذى ٦ أوجه).

ويعرّف تعرّض محفظتك الكلّى فى اليوم بأنه ع = س + ص. ولتوزيع الاحتياطى النقدى توزيعًا سليمًا، وضمان عدم تجاوز حدّ تحمّلك للمخاطر، يحتاج برنامج إدارة المخاطر إلى حساب التباين الكلّى والانحراف المعيارى لهذا التعرّض المركّب.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

١٢-٨
الرياضيات

ثلاثة متغيّرات عشوائية

الفصل الثامن المتغيّرات العشوائية

لاحِظ!

إذا كانت المتغيّرات العشوائية س، ص، ع **مستقلّة بعضها عن بعض**، فإن

$$\mu(\text{س ص ع}) = \mu(\text{س})\,\mu(\text{ص})\,\mu(\text{ع})$$

$$\sigma^{٢}(\text{س} + \text{ص} + \text{ع}) = \sigma^{٢}(\text{س}) + \sigma^{٢}(\text{ص}) + \sigma^{٢}(\text{ع})$$

نواتج التعلّم

تعميم قوانين التوقُّع والتباين على المقادير الخطّية فى ثلاثة متغيّرات عشوائية مستقلّة.

استعد

ألقيت ثلاثة أحجار نرد معًا، على كل حجر وجهان يحملان العدد ٢، ووجهان يحملان العدد ٤، ووجهان يحملان العدد ٦. أوجد القيم الآتية.

(أ) توقُّع حاصل ضرب الأعداد الظاهرة. **(ب)** تباين مجموع الأعداد الظاهرة.

طريقة الحل

ليكن س، ص، ع الأعداد الظاهرة على كل حجر نرد.

والتوزيعات الاحتمالية متطابقة، كما فى الجداول الآتية.

التوزيعات الثلاثة متطابقة، ومجموع احتمالات كل جدول يساوى ١.

س	٢	٤	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ص	٢	٤	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

ع	٢	٤	٦	المجموع
ل	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ الفرع (ب) ثم ناقشوا الإجابة.

(أ) $\mu(\text{س}) = ٢ \times \frac{١}{٣} + ٤ \times \frac{١}{٣} + ٦ \times \frac{١}{٣} = ٤$

وبالمثل لـ $\mu(\text{ص})$ و$\mu(\text{ع})$،

توقُّع حاصل الضرب $\mu(\text{س ص ع}) = \mu(\text{س})\,\mu(\text{ص})\,\mu(\text{ع})$

$= ٤ \times ٤ \times ٤$

$= ٦٤$

(ب) $\mu(س^٢) = ٢^٢ \times \frac{١}{٣} + ٤^٢ \times \frac{١}{٣} + ٦^٢ \times \frac{١}{٣} = \frac{٥٦}{٣}$

التباين بالصيغة المختصرة: توقُّع المربّع ناقص مربّع التوقُّع.

$\sigma^٢(س) = \mu(س^٢) - \{\mu(س)\}^٢$

$= \frac{٥٦}{٣} - ٤^٢$

$= \frac{٨}{٣}$

وبالمثل لـ $\sigma^٢(ص)$، $\sigma^٢(ع)$، إذن

القانون مشروط بأن تكون المتغيّرات مستقلّة بعضها عن بعض.

تباين المجموع $\sigma^٢(س + ص + ع) = \sigma^٢(س) + \sigma^٢(ص) + \sigma^٢(ع)$

$= \frac{٨}{٣} + \frac{٨}{٣} + \frac{٨}{٣}$

$= ٨$

حاول

ألقيت ثلاثة أحجار نرد خاصة معًا، على كل حجر منها الأعداد ١، ٣، ٥، كل منها على وجهين. أوجد القيم الآتية.

(أ) توقُّع حاصل ضرب الأعداد الظاهرة **(ب)** تباين مجموع الأعداد الظاهرة

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ ألقيت ثلاثة أحجار نرد (كبير ومتوسط وصغير) معًا. أوجد القيم الآتية.

(أ) توقُّع حاصل ضرب الأعداد الظاهرة **(ب)** تباين مجموع الأعداد الظاهرة

٢ ألقى الشخص (١) ٤ قطع نقود، وألقى الشخص (٢) ٣ قطع، وألقى الشخص (٣) قطعتين معًا. ولتكن س، ص، ع عدد مرات ظهور الصورة لكل منهم على الترتيب. أوجد القيم الآتية.

(أ) $\mu(سصع)$ **(ب)** $\sigma^٢(س + ص + ع)$

★ التحدّي

يلعب ثلاثة أصدقاء لعبة نرد يحاولون فيها إظهار العدد ٦ لكسب النقاط.

س له ٥ محاولات إلقاء.
ص له ٤ محاولات إلقاء.
ع له ٣ محاولات إلقاء.
ويلقون مستقلّين بعضهم عن بعض. أوجد:

(أ) $\mu(سصع)$

(ب) $\sigma^٢(س + ص + ع)$

تأمّل

لماذا يكون افتراض استقلال متغيّرين عشوائيين عند حساب التباين الكلّي محفوفًا بالمخاطر؟ وكيف نتحقّق من استقلالهما فعلًا؟

وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

فريق الإعداد والاعتماد

قائد المشروع والمدير التحريري

Maki Komizo

المحررون والمؤلفون

Tomoaki Tsunoyama
Yukihiro Kawakubo
Yosihito Kosaka
Ritsu Igarashi

المصممون

Sayaka Higuchi
Mohamed Atef

المراجعون

أ.د جلال محروس معتمد
أ.د احمد عبد القادر
أ.د محمد محمد علي
أ.د طه محمد مرسي
أ. منال عباس احمد
د. محمد محي الدين
أ. عثمان مصطفي عثمان
أ. سامح عبد الباسط السيد

الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الإشراف العام

د. جبريل أنور حميدة

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني - 2026 / 2027

لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا الكتاب أو تخزينه في نظام لاسترجاع المعلومات أو نقله بأي صورة أو وسيلة، إلكترونية أو بالتصوير أو التسجيل أو غير ذلك، من دون إذن كتابي مسبق من وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني.

EDUCATION SPRINGS NEW LIFE

SPRIX

CACD

class	name