

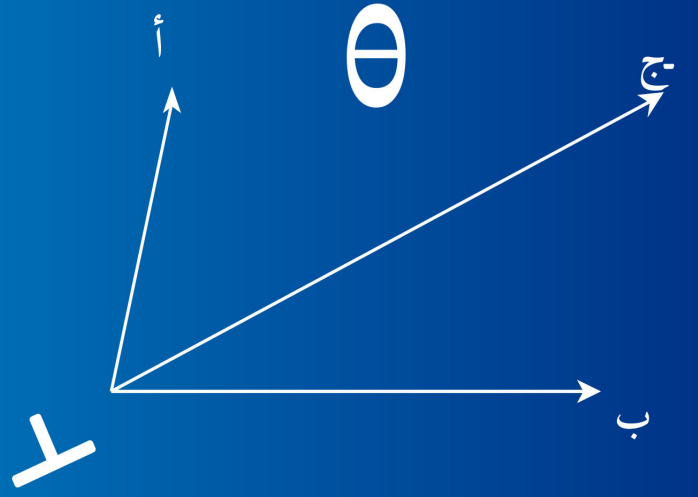


رياضيات

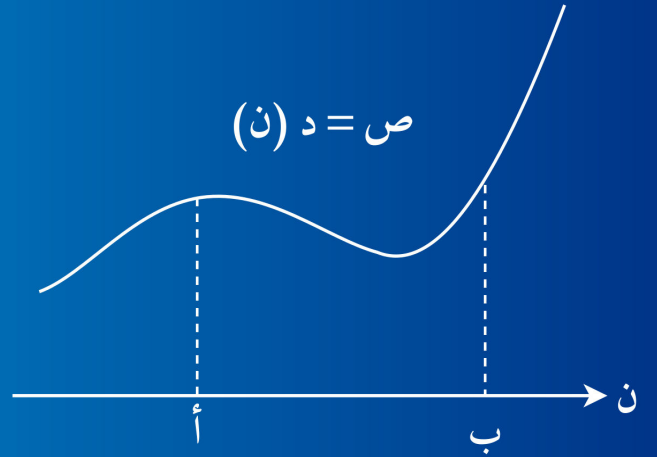
الصف الثاني بكالوريا

الجزء الأول

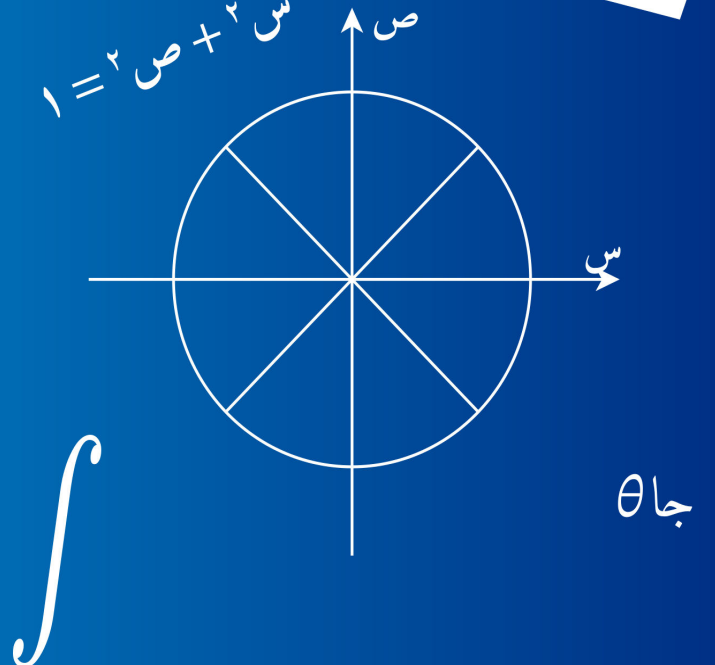
11



$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$



$$s^2 + v^2 = 1$$





Mathematics

Egyptian Baccalaureate

2nd Year



The International Baccalaureate™

has reviewed the pedagogical and assessment approaches underpinning this textbook.

© 2026 Ministry of Education and Technical Education

All rights reserved.

Copyrights and accountability for the content of this textbook remain with the Ministry of Education and Technical Education.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means - electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise - without the prior written permission of the copyright holders.

Ministry of Education and Technical Education

New Administrative Capital

Cairo, Egypt

المقدمة

انطلاقاً من رؤية نظام البكالوريا المصرية والتزامه بإعداد المتعلمين لمواجهة متطلبات القرن الحادي والعشرين، جاء تأليف كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر ليتيح للطلاب خبرة تعلم عميقة وجذابة ومُحفزة للتفكير. وقد بُني المنهج على ترسيخ الفهم العميق، وتنمية الثقافة الرياضية، وإكساب الطلاب القدرة على توظيف المعرفة والمهارات الرياضية في سياقات الحياة الواقعية.

تقوم فلسفة هذا الكتاب على التعلم القائم على الاستقصاء؛ إذ يبنى الطلاب معارفهم بأنفسهم من خلال الملاحظة وطرح الأسئلة والتحرّي والاستدلال المستند إلى الأدلة. ويبدأ التعلم بمسائل ذات معنى ومواقف أصيلة وخبرات استكشافية تُثير فضول المتعلمين وتدفعهم إلى البحث عن تفسيرات للأنماط والعلاقات والبُنى الرياضية التي تتجلى في العالم من حولهم. وبهذا المدخل يُوجه الطلاب إلى اكتشاف الأنماط وصياغة التخمينات وتبريرها، وإلى بناء فهمهم الرياضي قبل التعامل مع المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج في صورتها المجردة.

يعكس تنظيم كل درس تدرّجاً متماسكاً من الاستكشاف إلى بناء المفهوم ثم التطبيق، وفق مسار المدخل ثم التهيئة ثم الشرح ثم جرب ثم التمارين. فتُعرض على الطلاب في البداية سياقات ومسائل وأمثلة مختارة بعناية تربط التعلم الجديد بخبراتهم اليومية وبما سبق لهم تعلمه. وتؤدي هذه المداخل دور المُحفّز على الاستقصاء، فتدعو المتعلمين إلى تحليل المعلومات وتفسير التثنيات وتمييز الأنماط وصياغة تفسيرات أولية. وبعد هذه المرحلة الاستكشافية ينتقل الطلاب إلى المفاهيم والمبادئ والإجراءات والنماذج الرياضية التي تقوم عليها تلك المواقف، والتي توفر إطاراً منظمًا للفهم. وقد رُتب المحتوى عن قصد بما يعزز الفهم العميق بدلاً من الحفظ الصمّ، فيتمكّن المتعلم من إدراك العلاقات بين المفاهيم، وإقامة روابط ذات معنى بين الأفكار، وتوظيف ما تعلمه بثقة في السياقات المألوفة وغير المألوفة على السواء. ومن خلال مرحلتَي جرب و التمارين تُتاح للطلاب فرص الممارسة والتطبيق وتقويم فهمهم، وصولاً إلى فهم راسخ ومتماسك ومتربط للرياضيات.

يُتيح هذا الكتاب فرصاً واسعة لحل المسائل والنمذجة الرياضية والبحث المستقل. ويُشجّع الطلاب على اختبار الأفكار، وجمع البيانات وتحليلها، وتقويم الاستدلالات، واستخلاص نتائج مُبررة. وبهذه الخبرات تنمو لديهم الثقة في توظيف التفكير الرياضي، فيصيرون شركاء فاعلين في بناء المعرفة لا مجرد متلقين لها.

يتكامل التقويم مع مسار التعلم بوصفه أداة للتعلم والتحسين معاً. وقد صُمّنت الدروس أنماطاً مُتنوّعة من أدوات التقويم التكويني واختامي تُعين الطلاب على متابعة تقدّمهم، وتحديد جوانب النمو لديهم، وإظهار ما بلغوه من فهم. كما صيغت مهام التقويم بعناية لتُحاكي طبيعة الأسئلة التي قد يواجهونها في الامتحانات، مع تنمية مهارات التفكير العليا والاستدلال التحليلي وتوظيف المعرفة في سياقات غير مألوفة.

حظيت طبيعة الرياضيات بعناية خاصة تبرزها بوصفها ركناً أساسياً من أركان الثقافة الرياضية. فُتّاح للطلاب فرص لإدراك كيف تُبنى المعرفة الرياضية وتُبرّر وتُتّح ويحري تداولها داخل المجتمعات الرياضية. ويُعنى المنهج كذلك بتقدير إسهامات علماء الرياضيات والمبتكرين الذين أسهمت أفكارهم واكتشافاتهم في تشكيل فهمنا للعالم الرياضي وفي دفع مسيرة التقدم الإنساني.

يُنّي الكتاب بصورة منهجية مهارات العمليات الرياضية، ومنها حل المسائل، والاستدلال، والتثيل، والتواصل، والنمذجة، والتقدير، والتعرف على الأنماط، وتفسير البيانات، والبرهان. وقد دُجّت هذه المهارات في خبرات التعلم لضمان ألا يقتصر الأمر على اكتساب المعرفة الرياضية، بل يمتد إلى تنمية الكفايات اللازمة للتفكير والعمل على نحو رياضي.

ومواكبة لتطلّعات التعليم المعاصر، يُعزّز المنهج الوعي العالمي والانفتاح على العالم من خلال ربط المفاهيم الرياضية بالممارسات العلمية والابتكارات التقنية والتحديات البيئية وأهداف التنمية المستدامة. ويُشجّع الطلاب على تقدير الطبيعة المترابطة للمعرفة، وإدراك دور الرياضيات في معالجة القضايا التي تمس المجتمعات على المستويات المحلية والوطنية والعالمية.

ويسعى المنهج فضلاً عن ذلك إلى تنمية التفكير الناقد والتفكير الإبداعي، عبر إشراك الطلاب في تحليل المعلومات، وتقويم الاستراتيجيات البديلة، وابتكار حلول جديدة، وتوظيف المعرفة الرياضية في مواجهة تحديات واقعية. ويدعى المتعلمون إلى مقارنة المسائل بعقل عالم الرياضيات والعالم والمهندس، مستعينين بالاستدلال المنهجي والتفكير التصميمي في بحث الأسئلة وتطوير حلول عملية.

ومن أبرز سمات هذا الكتاب الربط المقصود بين الرياضيات وحياة الطلاب وخبراتهم. فعلى امتداد الفصول تُعرض الأفكار الرياضية في سياقات ذات معنى، مدعومة بتطبيقات معاصرة مستمدة من العلوم والهندسة والتقنية والاقتصاد والبيانات والاستدامة والحياة اليومية. وتُبرز هذه الروابط قيمة الرياضيات وتُعين المتعلمين على تقدير أثرها في فهم العالم من حولهم وفي تحسينه.

ولا يقلّ عن ذلك أهمية حرص المنهج على ترسيخ التعلم التأملي. فيُشجّع الطلاب على ممارسة التقويم الذاتي والتأمل ما وراء المعرفي، بما يُمكنهم من متابعة فهمهم، وتقويم استراتيجيات تعلّمهم، وتحمل مسؤولية متنامية عن نموهم الأكاديمي. وبتأملهم فيما يتعلّمونه وفي كيفية تعلّمه، تترسّخ لديهم عادات المتعلم مدى الحياة، القادر على التكيف مع ما يستجد من تحديات وفرص.

وغاية ما يصبو إليه هذا الكتاب إعداد متعلمين متمكّنين رياضياً، مسؤولين، مبتكرين، مزوّدين بما يلزم من معارف ومهارات وقيم واتجاهات للنجاح في عالم سريع التغيّر. ويحدّونا الأمل أن تُلهم رحلة التعلّم هذه طلابنا استكشاف الرياضيات بفضول، والتفكير بدقة، والعمل بمسؤولية، والإسهام إسهاماً ذا معنى في تقدّم المجتمع وفي بناء مستقبل مستدام للإنسانية.

الفهرس

رياضيات — الصف الثاني بكالوريا — الجزء الأول

الفصل ١ — البراهين الجبرية

المفهوم ١	نظرية ذات الحدين ونظرية متعددة الحدود	٣
المفهوم ٢	قسمة كثيرات الحدود	١٠
المفهوم ٣	التعبيرات النسبية	١٤
المفهوم ٤	المتطابقات والبراهين	٢١
المفهوم ٥	المتباينات	٣١

الفصل ٢ — المتتابعات

المفهوم ١	المتتابعات الحسابية	٤٠
المفهوم ٢	المتتابعات الهندسية	٥٧
المفهوم ٣	التجميع	٦٨
المفهوم ٤	متتابعات متقدمة	٨٥
المفهوم ٥	علاقات التكرار والاستقراء	٩١

الفصل ٣ — الأعداد المركبة والمعادلات

المفهوم ١	العدد المركب	١٠٧
المفهوم ٢	المعادلات التربيعية	١١٦
المفهوم ٣	المعادلات ذات الدرجة العالية	١٤٥

الفصل ٤ — الهندسة والمعادلات

المفهوم ١	أساسيات الهندسة الإحداثية	١٥٣
المفهوم ٢	المثلثات والمستقيمات	١٦٥
المفهوم ٣	الدوائر	١٨٢

نظرية ذات الحدين

الفصل الأول البراهين الجبرية

١-١

الرياضيات

نواتج التعلم

يُطبق نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك المقدار الجبرية وفي تعيين معاملات حدود معيّنة.



المفهوم ١ • نظرية ذات الحدين ونظرية متعددة الحدود

تأمل الصفوف الأولى من مثلث باسكال، ولاحظ كيف يتغير عدد الحدود في كل صف أفقي كما في الشكل. فإذا تتبعنا هذا النمط، فكم حدًا يقع في الصف العاشر؟

السؤال الموجّه: كيف تتنبأ الصيغ الجبرية ومعاملات التوافيق بالمعامل الدقيق لأي حدّ في مفكوك $(س + ب)^n$ دون إجراء عمليات ضرب متتابعة؟

لاحظ!

حساب $ن ق ر$

$$\frac{ن ق ر}{ر!} = \frac{ن ق ر}{ر!}$$

مثال: $ق. = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠$

$ن ق. = ١$ ، $ن ق ن = ١$

مثال: $ق. = ١$

مثال: $ق. = ١$

عند فكّ أقواس $(أ + ب)^n$ ، الحدّ المحتوي على $ب^r$ يُصبح $ن ق ر$ $ب^r$.

مثال: عند فكّ أقواس $(أ + ب)^٥$ ، الحدّ $أ^٣ ب^٢$ هو:

$$\frac{٥ ق ٣ ٢}{١ \times ٢} = ١٠ \text{ } أ^٣ ب^٢$$

مثال: عند فكّ أقواس $(س - ص)^٦$ ، الحدّ $س^٤ ص^٢$ هو:

بما أنّ $أسس$ $س$ هو ٤ و $أسس$ $ص$ هو ٢ .

$$\frac{٦ ق ٤ ٢}{١ \times ٢} = ١٥ \text{ } س^٤ ص^٢ = ١٥ \times س^٤ \times ص^٢ = ١٥ \times (٢ ص - س)^٦$$

فكّ أقواس $(أ + ب)^n$ (نظرية ذات الحدين)

$$(أ + ب)^n = ن ق. أ^n + ن ق ١ أ^{n-١} ب + ن ق ٢ أ^{n-٢} ب^٢ + \dots + ن ق ر أ^{n-r} ب^r + \dots + ن ق ن ب^n$$

مثال:

$$(س + ٢)^٥ = ٥ ق. س^٥ + ٥ ق ١ س^٤ \times ٢ + ٥ ق ٢ س^٣ \times ٢^٢ + ٥ ق ٣ س^٢ \times ٢^٣ + ٥ ق ٤ س \times ٢^٤ + ٥ ق ٥ ٢^٥$$

أسّ ()

أسّ ب

ابداً بـ $ق.$
أسّ $س$: ٥
أسّ $ص$: ٢

أسّ $س$: ٤
أسّ $ص$: ١

أسّ $س$: ٣
أسّ $ص$: ٥

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل s^4 في مفكوك $(s^2 - 3)^7$ ٢ أوجد مفكوك $(s^3 - 2)^4$

طريقة الحل

١ في مفكوك $(s^2 - 3)^7$ ، الحد s^4 له أس ٢ بالنسبة لـ s^2 ، وأس $٧ - ٢ = ٥$ بالنسبة لـ -3

$$\begin{aligned} & \text{ق.} (s^2 - 3)^7 \times \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \\ & = -20412 s^4 \end{aligned}$$

إذن، معامل s^4 هو -20412

٢ مفكوك باستخدام نظرية ذات الحدين.

$$\begin{aligned} (s^3 - 2)^4 &= (s^3 - 2) \times (s^3 - 2) \times (s^3 - 2) \times (s^3 - 2) \\ &= (s^3 - 2) \times 1 + (s^3 - 2) \times 3s^3 \times \frac{2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3} + (s^3 - 2) \times 2(s^3) \times \frac{3 \times 4}{1 \times 2} + (s^3 - 2) \times 1 \\ &= 81s^4 - 216s^3 + 216s^2 - 96s + 16 \end{aligned}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحد المحدّد في [] لَفَكِّ الأقواس الآتية.

(أ) $(s^2 - 3s + 2)^6$ [ص](ب) $(s^2 - 3s + 2)^6$ [أ]

٢ أوجد مفكوك التعبيرات الآتية.

(أ) $(s + 2)^6$ (ب) $(3 - 2s)^6$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدّ المحدّد في [] مفكوك الآتية.

- (أ) $(س - ص)^8 [س^٤ ص^٤]$ (ب) $(ب + أ)^٤ [أب^٣]$
 (ج) $(س - ص^٤)^٥ [س^٣ ص^٢]$ (د) $(١ + س^٣)^٥ [س^٤]$
 (هـ) $(٣ - أ)^٤ [أ]$ (و) $(٢ + س^٣)^٥ [س^٣]$
 (ز) $(١ - س^٢)^٦ [س^٦]$ (ح) $(١ - س^٢)^٥ [س^٤]$
 (ط) $(٢ + س^٣)^٦ [س^٦]$

٢ أوجد مفكوك التعبيرات الآتية.

- (أ) $(س + ١)^٤$ (ب) $(ب + أ)^٤$
 (ج) $(أ - ب^٢)^٤$ (د) $(س - ٢)^٥$
 (هـ) $(س^٣ + ص^٢)^٥$ (و) $(١ - أ^٢)^٥$
 (ز) $(س - ٣)^٦$ (ح) $(س^٢ - ص^٣)^٦$
 (ط) $(س + \frac{١}{٢})^٦$

★ التحدي — مجموع المعاملات

إذا كان $(١ + س)^٥ = أ + ب س + ج س^٢ + د س^٣ + هـ س^٤ + و س^٥$ ، فأوجد القيمة العددية للمقدار $أ + ب + ج + د + هـ + و$.

نظرية متعددة الحدود

الفصل الأول البراهين الجبرية

٢-١

الرياضيات

نواتج التعلم

يُطبق نظرية متعددة الحدود
في إيجاد مفكوك المقادير
الجبرية وفي تعيين معاملات
حدود معينة.

إذا أردت فكّ مقدار مكوّن من ثلاثة حدود: (س + ص + ع) ، فكيف تُعيّن معامل الحدّ المحتوي على س^٢ص ع دون إجراء عملية الضرب؟ وكيف أكتبه دون الحاجة إلى إزالة الأقواس؟

لاحظ!

! عند فكّ أقواس (أ + ب + ج) ، الحدّ المحتوي على أ^٤ب^٤ج^٤ هو:

$$\frac{٨!}{١!١!٣!٤!} أ^٤ ب^٤ ج^٤$$

استعد

أوجد معامل الحدّ أ^٤ب^٣ج في مفكوك الآتية.

$$(أ + ب + ج)^٨ \quad (ب) \quad (أ - ب + ج)^٨$$

طريقة الحل

(أ) عند مفكوك (أ + ب + ج) ، الحدّ أ^٤ب^٣ج هو

$$\frac{٨!}{١!١!٣!٤!} أ^٤ ب^٣ ج = ٢٨٠ أ^٤ ب^٣ ج$$

إذن، المعامل المطلوب هو ٢٨٠

(ب) عند مفكوك (أ - ب + ج) ، الحدّ أ^٤ب^٣ج هو

$$\frac{٨!}{١!١!٣!٤!} أ^٤ ب^٣ ج = ٦٧٢٠ أ^٤ ب^٣ ج$$

إذن، المعامل المطلوب هو -٦٧٢٠

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك (أ + ب + ج) .

$$(أ) أ^٣ ب^٣ ج^٢ \quad (ب) أ^٢ ب^٢ ج^٢$$

٢ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك (أ + ب - ج) .

$$(أ) أ^٢ ب^٢ ج^٢ \quad (ب) أ^٣ ب^٢ ج^٣$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ
المسألة ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(س + ص + ع)^٧$.(أ) $س٥ص٥ع$ (ب) $س٤ص٢ع$ (ج) $س٢ص٣ع٢$ ٢ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(س + ص + ع)^٩$.(أ) $س٦ص٤ع٢$ (ب) $س٣ص٣ع٣$ (ج) $س٢ص٤ع٣$ ٣ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(أ + ب + ج)^٧$.(أ) $أ٢ب٣ج٢$ (ب) $أبج٥$ (ج) $أ٢ب٤ج$ ٤ أوجد معامل الحدود الآتية في مفكوك $(أ٢ - ب + ج٣)^٨$.(أ) $أ٢ب٢ج٤$ (ب) $أ٤بج٣$ (ج) $أ٣ب٣ج٢$

★ التحدي — أكبر معامل

أوجد أكبر معامل في مفكوك $(١ + س + س٢)^٢$.

تطبيقات نظرية ذات الحدين

الفصل الأول البراهين الجبرية

3-1

الرياضيات

نواتج التعلم

يوظّف نظرية ذات الحدين في التطبيقات الرياضية والحسابية.

لا حظ!

! في مسائل الإثبات باستخدام نظرية ذات الحدين، استخدم فك أقواس $(١ + س)^n$.

$${}^n\text{ق} + {}^n\text{ق}_1\text{س} + {}^n\text{ق}_2\text{س}_2 + \dots + {}^n\text{ق}_n\text{س}_n = ({}^n\text{س} + 1)$$

عوض بقيمة مناسبة لـ س للحصول على المتكافئة المطلوبة.

استعد

أثبت أن المتكافئة الآتية صحيحة.

$$u_2 = \dots + q_n + q_{n-1} + \dots + q_1 + q_0$$

طريقة الحل

[البرهان]

بَفَكِّ أَقْوَاسِ (١ + لِس) ^ن باستخدام نظرية ذات الحدين:

$${}^n\text{ق}_1\text{س} + \dots + {}^2\text{ق}_1\text{س} + {}^1\text{ق}_1\text{س} + \text{ق}_1 = ({}^n\text{س} + 1)$$

عوض بـ $s = 1$ لتحصل على

$$u_2 = u(s+1)$$

بالتعويض بـ $s = 1$ في هذا التعبير،

$$q_1 \times u_1 + \dots + q_r \times u_r + q_{r+1} \times 1 + \dots + q_n = u_2$$

$${}_nq_n + \dots + {}_2q_n + {}_1q_n + .q_n = {}_n\ddot{p}$$

إذن، المتكافئة المعطاة صحيحة.

حاول

أثبت أن المتكافئة الآتية صحيحة.

$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_{i,j}(1 - \alpha) + \dots - \dot{Q}_{i,j} + \dot{Q}_{i,j} - \dot{Q}_{i,j}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل
قسم «حاول» ثم ناقشوا
الإجابة.

قسمة كثيرات الحدود

الفصل الأول البراهين الجبرية

٤-١

الرياضيات

نواتج التعلم

يجري قسمة كثيرات الحدود باستخدام الخوارزمية المعتادة.

أخطاء شائعة

الخطأ في الطرح: كثيرًا ما يقع الخطأ عند الطرح بعد الضرب، وبخاصة نسيان تغيير الإشارات أو جمع الحدود المتشابهة على الوجه الصحيح. الضرب الجزئي: الضرب في الحد الرئيسي للمقسوم عليه وحده بدلًا من المقسوم عليه كله.

المفهوم ٢ - قسمة كثيرات الحدود

تخيل أنك تدير تطبيقًا ذكيًا لتوصيل الطعام. ستلاحظ أن عدد الطلبات اليومية يتزايد بمعدل متسارع غير خطي كلما ازداد إقبال الناس على التطبيق. وفي الوقت نفسه يضمّ التطبيق مندوبي توصيل جددًا بمعدل أسبوعي ثابت، أي بمعدل خطي. ولمعرفة متوسط عبء العمل - أي عدد الطلبات التي يغطيها مندوب واحد بمرور الوقت - تُقسّم دالة إجمالي الطلبات الكبيرة على دالة عدد المندوبين.

وهنا تحديدًا يأتي دور قسمة كثيرات الحدود. فهي الأداة الرياضية التي نلجأ إليها حين نريد تفكيك نظام كبير مركّب سريع النمو، وتوزيع حمله على وحدات أصغر، لنحدّد نصيب الجزء الواحد أو كفاءته بدقة.

السؤال الموجّه: كيف تساعدنا قسمة المقادير الجبرية المركّبة على تبسيط كميات هائلة من البيانات، وعلى فهم نصيب الوحدة الواحدة داخل نظام دائم النمو؟

لاحظ!

يمكن حساب قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة الطويلة، على غرار الأعداد الصحيحة. في المسائل التي يُطلب فيها اعتبارها كثير حدود في س، تُعامل المتغيرات الأخرى كثوابت.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الناتج والباقي عند قسمة $٢س^٣ - ٥س^٢ - ٢س + ١$ على $٢س^٢ - ٢س - ١$.

٢ لكثيرتي الحدود $م = ٤س^٢ - ٩أس - ٩أ$ ، $ن = ٣س - ٣أ$ ، باعتبار كلًا منهما كثير حدود في س، أوجد الناتج والباقي عند قسمة م على ن.

طريقة الحل

١

إذا كان حدّ ذو درجة معيّنة مفقودًا في المقسوم، اترك ذلك المكان فارغًا.

اطرح $(٢س^٢ - ٢س - ١) \times س$ للتخلص من $٢س^٣$.

اطرح $(٢س^٢ - ٢س - ١) \times (٢-)$ للتخلص من $-٤س^٢$.

هو الباقي عندما تصبح الدرجة أقل من درجة المقسوم عليه.

$$\begin{array}{r} ٢س - ١ \overline{) ٢س^٣ - ٥س^٢ - ٢س + ١} \\ \underline{٢س^٣ - ٢س^٢ - ٢س - ١} \\ ٣س^٢ - ٣س + ٢ \\ \underline{٣س^٢ - ٢س - ٢} \\ ٥س + ٤ \\ \underline{٥س + ٤} \\ ٠ \end{array}$$

إذن، **الناتج هو $٢س - ٢$ والباقي هو -٤**

٢ بما أننا نعتبرها كثير حدود في س، تُعامل المتغيرات الأخرى غير س كأعداد.

$$\begin{array}{r} 4س + 3أ \\ 3س - 1أ \end{array} \left| \begin{array}{l} 4س + 3أ \\ 12س - 9أ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 4س + 3أ \\ 12س - 9أ \\ \hline 12س - 9أ \\ \hline 0 \end{array}$$

إذن، الناتج هو ٤س + ٣أ والباقي هو ٠.

حاول

أوجد الناتج والباقي عند قسمة كثير الحدود م على كثير الحدود ن. (في ٢، احسب باعتبارها كثيرة حدود في س).

١ $م = ٣س^٢ - ١٣س + ١، ن = ٢س + ٣ - ٣س$

٢ $م = ٣س^٣ - ٣س^٢ + ٥س - ٣، ن = ٣س - ٢$

تدريب

أوجد الناتج والباقي عند قسمة كثير الحدود م على كثير الحدود ن. (في ٧-١٠، احسب باعتبارها كثير حدود في س).

١ $م = ٢س^٢ - ٥س + ١، ن = ٢س - ٣$ ٢ $م = ٣س^٢ - ٤س + ١، ن = ٣س - ٣$

٣ $م = ٣س^٢ - ٣س^٣ + ٣س + ٤، ن = ٢س - ٣س + ٣$

٤ $م = ٦س^٢ - ٨س + ٥، ن = ٢س^٢ - ٢س - ٥$

٥ $م = ٣س^٢ - ٧س + ٦، ن = ٢س + ٣ - ٣س$

٦ $م = ٣س^٣ - ٤س^٢ + ٣س - ١، ن = ٣س + ٢ + ٢$

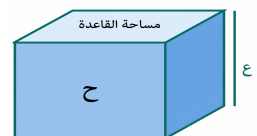
٧ $م = ٤س^٢ - ٥س - ١٦، ن = ٢س - ٣$ ٨ $م = ٣س^٣ + ٢س^٢ - ٣س + ١٣، ن = ٣س + ١$

٨ $م = ٣س^٣ + ٢س^٢ - ٣س - ١، ن = ٢س + ٣$

١٠ $م = ٣س^٣ + ٣س^٢ - ٢ص - ٣، ن = ٣س + ص$

★ التحدي — إيجاد الارتفاع

صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه $٤س^٣ + ٩س^٢ - ٩س - ٩$. إذا كانت مساحة قاعدته $٢س^٢ - ٣س - ٣$ ، فاكتب ارتفاعه بدلالة س.



تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

ناتج القسمة والباقي لكثيرات الحدود

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

إذا قُسم كثير الحدود m على كثير الحدود n ، وكان الناتج x والباقي r ، فإن المتكافئة الآتية صحيحة:

$$m = n \times x + r$$

مثال: عند قسمة $7x$ على 3 ، يكون الناتج $2x$ والباقي 1 .

$$7x = 3 \times 2x + 1$$

في المسائل التي يُعطى فيها الناتج والباقي، عوّض بالتعبيرات المعلومة في $m = n \times x + r$.

استعد

أوجد كثيرتي الحدود m و n اللتين تحققان الشروط الآتية.

١ عند قسمة m على $3x^2 - 2x - 1$ ، يكون الناتج $3x + 3$ والباقي $-2x^2 + 5$.

٢ عند قسمة $4x^3 + 8x - 9$ على n ، يكون الناتج $2x^2 - 3$ والباقي $5x + 1$.

طريقة الحل

بما أنّ الناتج والباقي معلومان، عوّض بالتعبيرات المعلومة في $m = n \times x + r$.

$$1 \quad m = (3x^2 - 2x - 1)(3x + 3) + (-2x^2 + 5)$$

$$= 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 6x - 3x - 3 - 2x^2 + 5$$

$$= 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 9x - 3 + 5$$

$$2 \quad 4x^3 + 8x - 9 = n \times (2x^2 - 3) + (5x + 1)$$

$$n \times (2x^2 - 3) = 4x^3 + 8x - 9 - (5x + 1) = 4x^3 + 3x - 10$$

$$n \times (2x^2 - 3) = 4x^3 + 3x - 10$$

$$n = (4x^3 + 3x - 10) \div (2x^2 - 3)$$

$$= 2x^2 + 3x + 8$$

نواتج التعلّم

يتميّز بين ناتج القسمة والباقي في قسمة كثيرات الحدود، ويستنتج أنّ درجة الباقي أقلّ من درجة المقسوم عليه، ويستخدم ذلك في التحقق من صحة القسمة.

أخطاء شائعة

التوقّف مبكراً: إنهاء القسمة قبل أن تصبح درجة الباقي أقلّ من درجة المقسوم عليه. الخلط بين الناتج والباقي: الظنّ بأن الباقي لا بدّ أن يكون صفراً دائماً، مع أنه قد يكون حدّاً (أو أكثر) درجته أقلّ من درجة المقسوم عليه.

أوجدن

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 8 \quad | \quad 4x^3 + 3x - 10 \\ \underline{4x^3 - 12x^2} \\ 12x^2 + 3x - 10 \\ \underline{12x^2 - 36x} \\ 39x - 10 \\ \underline{39x - 102} \\ 92 \end{array}$$

يجب أن يكون الباقي ٠

حاول

أوجد كثيرتي الحدود m و n اللتين تحققان الشروط الآتية.

١ عند قسمة m على $2x^2 + x + 1$ يكون الناتج $3x + 2$ والباقي $-2x + 6$.

٢ عند قسمة n على $3x^2 - 2x + 1$ يكون الناتج $2x^2 - 2x + 5$ والباقي -4 .

تدرب

أوجد كثيري الحدود m و n اللتين تحققان الشروط الآتية.

١ عند قسمة m على $2x^2 - 2x + 1$ يكون الناتج $2x - 3$ والباقي $-2x$.

٢ عند قسمة m على $3x^2 - 2x + 1$ يكون الناتج $2x + 6$ والباقي $2x - 3$.

٣ عند قسمة m على $2x^2 - 2x + 1$ يكون الناتج $2x - 1$ والباقي 2 .

٤ عند قسمة $2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ على n يكون الناتج $3x + 1$ والباقي $-5x + 2$.

٥ عند قسمة $6x^3 + 11x^2 - 2x + 1$ على n يكون الناتج $2x^2 + 3x - 1$ والباقي -1 .

٦ عند قسمة $2x^3 + 4x^2 + 7x + 1$ على n يكون الناتج $3x + 2$ والباقي $3x + 13$.

★ التحدي — استرجاع المقسوم عليه

عند قسمة $4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ على n يكون الناتج $2x + 3$ والباقي $3x - 2$ ، فأوجد كثير الحدود n .

تأمل

عند قسمة كثير حدود على آخر، لماذا يجب أن تكون درجة الباقي دائماً أقل من درجة المقسوم عليه؟ وكيف يساعدنا هذا الشرط على التحقق من صحة خطوات القسمة وفهم العلاقة بين الناتج والباقي؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل المسألة ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

ضرب وقسمة التعبيرات النسبية

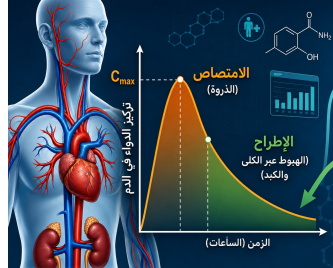
الفصل الأول البراهين الجبرية

١-٦

الرياضيات

نواتج التعلم

يبسط التعبيرات
الكسرية (النسبية)
بالضرب والقسمة.



المفهوم ٣ . التعبيرات النسبية

حين يتناول مريض دواءً موصوفًا، يتغير تركيز الدواء في دمه تغيرًا سريعًا مع مرور الوقت. ويتتبع الباحثون الطبّيون هذا التركيز بالرياضيات. فمع امتصاص الجسم للدواء يقفز مقداره في الدم قفزةً حادة، ومع ترشيح الكليتين والكبد له يهبط التركيز.

ولنمذجة دورة الحياة هذه بدقة يستعمل العلماء التعبيرات النسبية، وهي كسور بسيطة ومقامها تعبيرات جبرية. وحين يحتاج الأطباء إلى الجمع بين علاجات، أو تغيير الجرعات، أو حساب سرعة خروج دوائين مختلفين من جسم المريض في الوقت نفسه، فلا بدّ لهم من إجراء العمليات الحسابية الأربع (الجمع والطرح والضرب والقسمة) على هذه الكسور الجبرية.

السؤال الموجّه: كيف تتيح لنا القوانين الأساسية للحساب دمج الكسور الجبرية المتغيرة المركّبة وتبسيطها للتنبؤ بالنتائج في الطبّ وعلوم الحياة؟

لاحظ!

❗ قسمة كلٍّ من بسط تعبير نسبي ومقامه على عاملهما المشترك تُسمّى **الاختصار**.

❗ التعبير النسبي الذي لا يمكن اختصاره أكثر من ذلك يُسمّى **تعبيرًا نسبيًا غير قابل للاختصار**.

● **مثال:** اختصار $\frac{(1-s)(3-s)}{(3-s)s}$ يعطي $\frac{(1-s)}{s}$

❗ عند وجود كثيرات حدود في بسط تعبير نسبي أو مقامه، حلّها إلى عوامل أولاً للتحقق ممّا إذا كان يمكن اختصارها.

تعبير نسبي غير قابل للاختصار إذ لا يمكن تبسيطه أكثر من ذلك.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ بسّط التعبيرات النسبية الآتية.

(أ) $\frac{١٢أ٢}{٢ب٣٩}$

٢ احسب ما يأتي.

$$\frac{٢س٢ - ٤س - ٢٠}{٣س٢ + ٥س + ٢} \div \frac{٢س٢ - ٤س - ٢٠}{٣س٢ - ٥س - ٢}$$

طريقة الحل

١

(أ) $\frac{١٢أ٢}{٢ب٣٩} = \frac{٣ب٤}{٢١٣}$

(ب) $\frac{٤ - ٢س}{٢ + ٧س + ٣س٣} = \frac{(٢ - س)(٢ + ٣س)}{(٣ + س)(١ + ٣س)} = \frac{٢ - س}{١ + ٣س}$

٢

$$\begin{aligned} & \frac{٢س٢ - ٤س - ٢٠}{٣س٢ + ٥س + ٢} \div \frac{٢س٢ - ٤س - ٢٠}{٣س٢ - ٥س - ٢} \\ &= \frac{٢س٢ - ٤س - ٢٠}{٣س٢ + ٥س + ٢} \times \frac{٣س٢ - ٥س - ٢}{٢س٢ - ٤س - ٢٠} \\ &= \frac{(٣ - س)(١ + ٣س)}{(٢ + س)(١ + ٣س)} \times \frac{(٣ - س)(١ + ٣س)}{(٤ + س)(٥ - س)} \\ &= \frac{(٣ - س)(١ + ٣س)}{(٤ + س)(٢ + س)} \end{aligned}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ بسّط التعبيرات النسبية الآتية.

(أ) $\frac{٦ص٢س٣}{٢٠ص٣س٢}$

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\frac{٢س٢ + ١س + ٩}{٢س٢ - ١س - ٩} \times \frac{٢٤ + ١س + ١٦}{١٦ - ٢س - ٩}$

(ب) $\frac{٣س٢ - ٥س + ٩}{١ + س} \div \frac{٩ - ٢س}{٢ - س - ٢س}$

أخطاء شائعة

كثيرًا ما يشطب الطلاب خطأً متغيرات أو أعدادًا متماثلة في البسط والمقام، حتى حين تفصل بينها إشارات الجمع أو الطرح.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ المسألة ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

حلّ إلى عوامل.

اشطب العامل المشترك (س + ٢).

حوّل القسمة إلى ضرب باستخدام مقلوب المقسوم عليه.

حلّ إلى عوامل.

اشطب العوامل المشتركة.

لا تفكّ الأقواس.

تدریب

حلّ المسائل الآتية.

بَسِّطِ التَّعْبِيرَاتِ النِّسْبِيَّةِ الْآتِيَةَ.

$$\frac{{}^2\text{A}^2\text{B}^2\text{C}}{{}^2\text{A}^4\text{B}^4\text{C}} \quad (\text{I})$$

$$\frac{24}{36} \text{ (ب)}$$

$$(ج) \frac{س^۲ + س^۳}{س - ۲}$$

$$\frac{٢ - ٣٥ + ٢}{٤ + ٣٥ - ٢} \quad (د)$$

$$\frac{{}^2\text{ص}^2 + {}^2\text{س}^2 - {}^2\text{س}^2\text{ص}}{{}^2_1\text{م}^2\text{س}^2 - {}^2_1\text{م}^2\text{س}^3 + {}^3_1\text{م}} \quad (\text{هـ})$$

$$\frac{s^3 - 1}{s^3 + s^2 + 1} \quad (9)$$

احسب ما يأتي.

$$\frac{{}_2\mathcal{J}_9}{{}_2\mathcal{U}_1^{\mathcal{E}}} \times \frac{{}_2\mathcal{U}_1^{\mathcal{A}}}{{}_2\mathcal{J}_3} \quad (\text{I})$$

$$\frac{410}{363} \times \frac{366}{215} \text{ (ب)}$$

$$(ج) \frac{٨٨٣ ص}{٩٤٢ ب} \div \frac{٢٨٣ ص}{٣٨٣ ب}$$

$$\frac{s^2 - 2s + 8}{s^2 + s} \times \frac{s + 1}{s^2 - 4} \quad (د)$$

$$\frac{10 + 15 - 2}{12 - 13 + 2} \times \frac{9 - 2}{132 - 2} \quad (ه)$$

$$\frac{1 + 6s + s^2}{2 - 15s - 3s^2} \times \frac{6 - s + s^2}{6 - 15s + 3s^2} \quad (9)$$

$$\frac{2-s+s^2}{9+6s-s^2} \div \frac{10-s-2s^2}{3-2s-s^2} \quad (j)$$

$$(2) \frac{15 - 2 - 2}{3 - 6} \div \frac{10 - 3 - 2}{2 - 3 + 2}$$

$$(ط) \frac{س^۲ + صس}{س - ص} \div \frac{س^۲ - صس}{س^۲ + صس - ص}$$

★ التحدّي — بسّط ثم أوجد القيمة

إذا كان $s = \sqrt[3]{123}$ ، فأوجد قيمة $\frac{s^2 - 6s + 9}{s^2 - 2s - 6} \times \frac{s^3 + 8}{s^3 - 2s - 6}$ $\div \frac{s^2 - 6s + 9}{s^2 - 2s - 6}$

جمع وطرح التعبيرات النسبية

الفصل الأول البراهين الجبرية

v-1
الرياضيات

لاحظ!

نواتج التعلم

يبسط التعبيرات
الكسرية (النسبية)
بالجمع والطرح.

أخطاء شائعة

جمع البسوط والمقامات
أو طرحها مباشرة: كثيرًا
ما يعامل الطلاب
التعبيرات النسبية
معاملة الأعداد الصحيحة
العادية، فيجمعون
البسوط معًا والمقامات
معًا أو يطرحونها.

! جمع التعبيرات النسبية ذات المقامات المختلفة وطرحها

كما هو الحال في الكسور العددية، اضرب البسط والمقام في التعبير نفسه لإيجاد مقام مشترك قبل الحساب.

$$\text{مثال: } \frac{(س+1)}{(س+1)(س-2)} + \frac{(س-2)}{(س-2)(س+1)} = \frac{1}{س-2} + \frac{1}{س+1} = \frac{(س+1) + (س-2)}{(س-2)(س+1)}$$

! عند إيجاد مقام مشترك، حلل المقامات إلى عوامل أولًا.

$$\text{مثال: } \frac{3}{(س-3)(س-2)} + \frac{2}{(س+1)(س-2)} = \frac{3}{س-2} + \frac{2}{س-2} = \frac{(س+1)3 + (س-2)2}{(س-2)(س-3)(س+1)} = \frac{(س+1)3 + (س-2)2}{(س-2)(س-3)(س+1)}$$

! بعد التوحيد على مقام مشترك، احسب البسط فقط، وتحقق معًا إذا كان يمكن تحليله واختصاره.

استعد

بسّط التعبيرات الآتية.

$$\frac{س+4}{س^2-2س} - \frac{3}{س^2-3س+2}$$

طريقة الحل

أولًا، حلل المقام إلى عوامل.

أوجد مقامًا مشتركًا.

احسب البسط فقط.

حلل البسط إلى عوامل.

اختصر الكسر دائمًا (اشطب العوامل المشتركة).

لا تفك أقواس المقام.

$$\begin{aligned} & \frac{س+4}{س^2-2س} - \frac{3}{س^2-3س+2} \\ &= \frac{س+4}{س(س-2)} - \frac{3}{(س-2)(س-1)} \\ &= \frac{(س+4)(س-1) - 3س}{س(س-2)(س-1)} \\ &= \frac{س^2-3س-4}{س(س-2)(س-1)} \\ &= \frac{(س-4)(س+1)}{س(س-2)(س-1)} \\ &= \frac{س+2}{س(س-1)} \end{aligned}$$

حاول

بسّط التعبيرات الآتية.

$$1 \quad \frac{1-s}{3+s} + \frac{2}{6+s+2s}$$

$$2 \quad \frac{s}{1-s} - \frac{2}{1-2s}$$

تدريب

بسّط التعبيرات الآتية.

$$1 \quad \frac{3}{1+s} + \frac{s-2}{1+s}$$

$$3 \quad \frac{s+2}{s} - \frac{s-2}{1-s}$$

$$5 \quad \frac{2}{1-s} + \frac{3}{6+s+2s}$$

$$7 \quad \frac{s-1}{s+2} - \frac{4s}{1-2s}$$

$$9 \quad \frac{s-3}{3+s+2s} - \frac{1-s}{2+s+3s}$$

$$11 \quad \frac{s+5}{1-2s} - \frac{s+8}{2-s+2s}$$

$$2 \quad \frac{s-3}{s+2} - \frac{3}{s+2s}$$

$$4 \quad \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s}$$

$$6 \quad \frac{s}{1-2s} + \frac{s-3}{s+2s}$$

$$8 \quad \frac{1}{12+s+2s} + \frac{1}{6+s+5s}$$

$$10 \quad \frac{s+5}{2-s+2s} - \frac{s+4}{s+2s}$$

تعاون مع
زميل

تعاون مع مجموعتك
في حلّ المسألة ٢ ثم
ناقشوا الإجابة.

★ التحدي — ترشيح المياه على مرحلتين



يتابع فريق من مهندسي البيئة منظومة
ترشيح مياه ذات مرحلتين في خزان أحد الأحياء
تسحب المنظومة الملوثات العضوية خلال
مدة قدرها ١٥ ساعة. المرحلة الأولى (المرشّح

الحيوي الأساسي): معدّل سحب الملوثات الأساسي هو $\frac{s+8}{2-s}$.
المرحلة الثانية (مرشّح الفحم الثانوي): يرتدّ قدر يسير من المياه فيقلّل
معدّل التنقية، ويُمدّج بالمقدار $\frac{8}{2-s}$. ولتحديد كفاءة التنقية الصافية،
اطرح معدّل الارتداد في المرحلة الثانية من معدّل السحب في المرحلة
الأولى.

الكسور المركبة

الفصل الأول البراهين الجبرية

٨-١
الرياضيات

لاحظ!

التعبيرات التي تحتوي على تعبيرات نسبية في المقام أو البسط، كالتعبير الموجود على اليسار، تُسمى **كسورًا مركبة**.

$$\frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}}$$

عند حساب الكسور المركبة، **اضرب البسط والمقام في التعبير نفسه**.

استعد

بسط التعبيرات الآتية.

١ $\frac{1}{\frac{1}{s-1} - 1}$

٢ $\frac{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}}{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}}$

طريقة الحل

١ $\frac{1}{\frac{1}{s-1} - 1}$

$$= \frac{(1-s) \times 1}{(1-s) \times \left(\frac{1}{s-1} - 1 \right)}$$

$$= \frac{s-1}{(1-s) - (1-s)}$$

$$= \frac{s-1}{1-(1-s)}$$

$$= \frac{s-1}{s}$$

٢ $\frac{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}}{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}}$

$$= \frac{(s-1)(s+1) \times \left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} \right)}{(s-1)(s+1) \times \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \right)}$$

$$= \frac{(s-1) + (s+1)}{(s-1) - (s+1)}$$

$$= \frac{2}{s-1-s-1}$$

$$= \frac{1}{s}$$

نواتج التعلم

يبسط الكسور المركبة ويحولها إلى أبسط صورة.

اضرب البسط والمقام في $s-1$.

اضرب البسط والمقام في $(s-1)(s+1)$.

حاول

بسّط التعبيرات الآتية.

$$1 \quad \frac{1}{\frac{1}{s} - 1}$$

$$3 \quad \frac{1}{\frac{1}{s} - 1}$$

تدريب

بسّط التعبيرات الآتية.

$$1 \quad \frac{s - \frac{2}{1-s}}{\frac{s}{2} - \frac{1}{1-s}}$$

$$3 \quad \frac{\frac{1}{s-s} + \frac{1}{s+s}}{\frac{1}{s-s} - \frac{1}{s+s}}$$

$$5 \quad \frac{1}{\frac{1}{s+1} - 1}$$

$$2 \quad \frac{\frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s}}{\frac{1}{2-s} - \frac{1}{2+s}}$$

$$2 \quad \frac{\frac{s-s}{s+s} + 1}{\frac{s-s}{s+s} - 1}$$

$$4 \quad \frac{\frac{1-s}{1+s} - \frac{1+s}{1-s}}{\frac{1-s}{1+s} + \frac{1+s}{1-s}}$$

تعاون مع
زميل

تعاون مع مجموعتك
في حلّ المسألة ٣ ثم
ناقشوا الإجابة.

★ التحدي — مضخم الإشارة

في الاتصالات، حين تسري إشارة عبر سلسلة من عُقد التقوية المتكرّرة، تضعف قوّتها تكرارياً. ويُنمذج مهندس شبكات كفاءة هـ(س) لمضخم ثلاثي المراحل بالكسر المركّب الآتي:

$$\text{هـ(س)} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{s+1} + 1} + 1}$$

حيث $s < 0$. حوّل هذا الكسر المركّب إلى تعبير نسبي واحد $\frac{\text{أ(س)}}{\text{ب(س)}}$.

تأمّل

تأمّل العبارة الرياضية الآتية: $\frac{s-2}{s-4} = s + 4$ هل هذه المعادلة متطابقة مطلقة لكلّ الأعداد الحقيقية س؟ وضح السبب. وإذا مثّل طالب $v = \frac{s-2}{s-4} = s + 4$ بياناً على آلة حاسبة بيانية، فسيبدو التمثيل مطابقاً للمستقيم $v = s + 4$. فما السمة الدقيقة في التمثيل البياني التي تخفيها دقّة الشاشة المعتادة عند $s = 4$ ؟

نواتج التعلّم

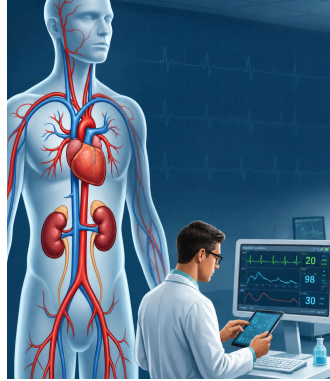
يُعرّف المتطابقة الجبرية،
ويميّزها من المعادلة.

المتطابقات

الفصل الأول البراهين الجبرية

٩-١

الرياضيات



المفهوم ٤ - المتطابقات والبراهين

إن سبق لك أن لبست سوار لياقة يرصد نبضات قلبك، أو رأيت شاشة رسم القلب الكهربائي (ECG) في عمل درامي طبي، فقد رأيت معالجة الإشارات المركّبة وهي تعمل. والإيقاعات الحيوية - كنبض قلب الإنسان أو التفريغ الكهربائي للخلايا العصبية - إيقاعات دورية. وتتعبّق الأجهزة الطبية هذه الإيقاعات بمعادلات موجية مركّبة متراكبة.

ولو اضطرّ منظّم ضربات القلب أو جهاز المراقبة الطبي إلى حساب هذه المعادلات الضخمة بصورتها الخام في كل جزء من الألف من الثانية، لنفدت بطارية الجهاز سريعًا، ولتعرّضت حياة المريض للخطر. ولمنع ذلك يضع مهندسو البرمجيات صيغًا مكافئة مبسّطة محلّ الصيغ الموجية الضخمة. وهذا الإحلال ممكن بفضل المتطابقات الرياضية؛ وهي قوانين قاطعة تبين أن مقدارين مختلفي الشكل تمامًا يعطيان الناتج نفسه لكل قيمة. وإثبات المتطابقات ليس بحثًا عن قيمة متغيّر مجهول، بل هو برهان على أن مسارين رياضيين مختلفين متطابقان في جوهرهما.

السؤال الموجّه: كيف نتحقّق رياضيًا من أن مقدارين مختلفين متساويان تطابقًا لكل قيم المجال؟ وكيف يحفظ العمل على طرف واحد من المعادلة التكافؤ البنائي دون أن يغيّر الناتج؟

لاحظ!

المساواة التي تصحّح لأي قيمة تُعوّض عن س تُسمّى **متطابقة** في س.

$$أس^٢ + ب س + ج = أس^٢ + ب' س + ج' \text{ متطابقة في س.}$$

$$\Leftrightarrow أ = أ', ب = ب', ج = ج'$$

عند حلّ مسائل المتطابقات في س، رتّب المقدار المعطى تنازليًا حسب قوى س، ثم قارن معاملات كل حدّ.

وفي المتطابقات التي تتضمن تعبيرات نسبية، تخلص من المقامات أولًا.

معاملات الحدود المتساوية
الدرجة متساوية في الطرفين.

استعد

أوجد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

$$١ \quad س^٢ + ٦ = أ(س + ١) + ب(س + ١) + ج$$

$$٢ \quad \frac{س^٣ + ١}{(س + ٢)(س - ٣)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ٣}$$

طريقة الحل

$$١ \quad س^٢ + ٦ = أ(س + ١) + ب(س + ١) + ج$$

$$س^٢ + ٦ = أس^٢ + أس + ٢ب + ٢أ + ج$$

$$إذن: ١ = أ، ٠ = ٢ب + ٢أ + ج، ٦ = أ + ب + ج$$

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على أ = ١، ب = -٢، ج = ٧

$$٢ \quad \frac{س^٣ + ١}{(س + ٢)(س - ٣)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ٣}$$

$$س^٣ + ١ = أ(س - ٣) + ب(س + ٢)$$

$$س^٣ + ١ = أس - ٣أ + أس + ٢ب$$

$$إذن: ٣ = أ + ب، ١ = -٣أ + ٢ب$$

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على أ = ١، ب = ٢

حاول

أوجد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

$$١ \quad س^٢ - ٣س - ٣ = أ(س - ١) + ب(س - ١) + ج$$

$$٢ \quad \frac{س^٣ + ١}{(س + ١)(س - ٢)} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{س - ٢}$$

رتّب الطرف الأيسر تنازلياً حسب قوى س.

قارن معاملات الحدود المتساوية الدرجة.

• إذا لم يوجد حدّ في س فاعتبر معاملته صفراً
• حلّ المعادلات الآتية في أ وب وج

اضرب الطرفين في (س + ٢)(س - ٣) للتخلص من المقامات.

رتّب الطرف الأيسر تنازلياً حسب قوى س.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أوجد قيم الثوابت أ وب وج التي تجعل المعادلات الآتية متطابقات في س.

١ أ) $(س + ١) - ب(س + ٥) = ٨س$

٢ $(س + أ)(ب + ٣) = ٤س + ١٢$

٣ $٢س + ٥س + ٤ = (س + ١)(أس + ب) + ج$

٤ $(أس + ب)(س + ١) = ٤س + ٢س + ١ + ج$

٥ $٢س - ٧س + ٨ = (س - ٣)(أس + ب) + ج$

٦ $\frac{١ - ٥س}{(٥ - س)(١ - س)} = \frac{ب}{س - ٥} + \frac{أ}{١ - س}$

٧ $\frac{ب}{٣ + س} + \frac{أ}{٢ - س} = \frac{٨ + س}{(٣ + س)(٢ - س)}$

٨ $\frac{ب}{١ - ٣س} + \frac{أ}{٢ + س} = \frac{٨ - ٣س}{٢ - ٥س + ٣س}$

★ التحدي — الكسور الجزئية

تدرس عالمة سموم بيئية كيفية زوال مركب عضوي معين من نظام ترشيح مائي. كفاءة معدّل الإزالة هـ(ن) تعتمد على الزمن ن (بالساعات، $٠ < ن$) وتُتمدّج بالعلاقة

$$\frac{١٥ + ٢٢ن}{٣ + ١٠ن + ٨ن^٢} = \text{هـ(ن)}$$

فكّها إلى كسرين جزئيين $\frac{أ}{١ + ٢ن} + \frac{ب}{٣ + ١٠ن}$ ، ثم أوجد أ وب.

إثبات المتطابقات (١)

الفصل الأول الراهين الجبرية



الرياضيات

نواتج التعلم

يثبت صحة المساواة والمتطابقات الجبرية في الحالات العادية (دون أي شروط مسبقة).

لاحظ!

الإثبات المتطابقة «الطرف الأيمن = الطرف الأيسر». بسّط كلّاً من الطرف الأيمن والطرف الأيسر على حدة حتى يصبحا نفس التعبير.

استعد

أثبت المتطابقات الآتية.

$$\xi_{\text{س}} = (s + v)^2 - (s - v)^2$$

$${}^2(\text{أد} + \text{أب}) + {}^2(\text{أب} - \text{أج}) = ({}^2\text{د} + {}^2\text{ج})({}^2\text{أ} + {}^2\text{ب})$$

طريقة الحل

احسب وسيط الطرف الأيمن للحصول على نفس تعبير الطرف الأيسر.

[البرهان]

• $(\gamma_1 p + \gamma_1 p s_2 - \gamma_1 s) - (\gamma_1 p + \gamma_1 p s_2 + \gamma_1 s) =$ الطرف الأيمن

$$= {}^2\text{س} + {}^2\text{سص} + {}^2\text{ص} - {}^2\text{س} + {}^2\text{سس} - {}^2\text{ص}$$

$$p_1 p_2 =$$

اذن، $\chi^2(p, \xi) = \chi^2(p - \xi) - \chi^2(p + \xi)$.

احسب وسيط الطرف الأيمن والطرف الأيسر كلاً على حدة للحصول على التعبير نفسه.

[البرهان]

الطرف الأيمن = $2^A + 2^B + 2^B + 2^A$ (1)

الطرف الأسطر = $(أ^٢ج + ٢أبجد + ب^٢د) + (أ^٢ج - ٢أبجد + ب^٢د)$

$${}^2\text{C}_4 + {}^2\text{A}' + {}^2\text{C}_4 + {}^2\text{A}' =$$

$$\dots \bullet (r) \dots {}^2_1{}^2_1 + {}^2_2{}^2_1 + {}^2_1{}^2_1 + {}^2_2{}^2_1 =$$

من (١) و (٢)، $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)$

ابدأ بالطرف الأيمن

التعبير نفسه الموجود في الطرف
الأيسر

ابدأ بالطرف الأيمن

أعد ترتيب الحدود لتطابق (أ)

حاول

أثبت المتطابقات الآتية.

١ (س + ص) + (س - ص) = ٢س + ٢ص

٢ (أ - ب) - (أ - ب) = (أ - ب) - (أ - ب)

تدريب

أثبت المتطابقات الآتية.

١ (س + ص) + (س - ص) = (س + ص) + (س - ص)

٢ (أ + ب) - (أ + ب) = (أ + ب) - (أ + ب)

٣ (أ + ب + ج) - (أ + ب + ج) = (أ + ب + ج) - (أ + ب + ج)

٤ (أ + ب) - (أ + ب) = (أ + ب) - (أ + ب)

٥ (س + ص) + (س - ص) = (س + ص) + (س - ص)

٦ (أ + ب) - (أ + ب) = (أ + ب) - (أ + ب)

★ التحدي

أثبت أن: (أ - ب) + (أ - ب) = (أ - ب) + (أ - ب)

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

إثباتات المتطابقات (٢)

الفصل الأول البراهين الجبرية

١١-٢

الرياضيات

لاحظ!

في إثباتات المتطابقات الشرطية، عبّر عن متغيّر واحد من المعادلة الشرطية بدلالة المتغيرات الأخرى وعوّض به للتخلّص من ذلك المتغيّر.
مثال: إذا كان $ص + س = ١$ ، فعوّض بـ ص = ١ - س للتخلّص من ص.

استعد

إذا كان $أ + ب + ج = ٠$ ، فأثبت المتطابقة الآتية.

$$أ^٢ + ب^٢ + ج^٢ = ٢(أب + ب ج + ج أ)$$

طريقة الحل

[البرهان]

• من $أ + ب + ج = ٠$ ، $ج = -أ - ب$ (١)

• بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيمن.

$$\text{الطرف الأيمن} = أ^٢ + ب^٢ + (-أ - ب)^٢$$

$$= أ^٢ + ب^٢ + أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

$$= ٢أ^٢ + ٢أب + ٢ب^٢ \text{ (٢)}$$

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيسر.

$$\text{الطرف الأيسر} = ٢(-أ - ب)(أ + ب) + (-أ - ب)^٢ + أ^٢$$

$$= ٢(-أ - ب)(أ + ب) + أ^٢ + ٢أب + ٢ب^٢$$

$$= ٢(-أ^٢ - أب - أب - ب^٢) + أ^٢ + ٢أب + ٢ب^٢$$

$$= ٢أ^٢ + ٢أب + ٢ب^٢ \text{ (٣)}$$

من (٢) و (٣)، $أ^٢ + ب^٢ + ج^٢ = ٢(أب + ب ج + ج أ)$

حاول

أثبت المتطابقات الآتية.

١ إذا كان $ص + س = ١$ ، فإنّ $ص^٢ + س^٢ + ١ = ٢(ص + س - ص س)$

٢ إذا كان $أ + ب + ج = ٠$ ، فإنّ $أ^٣ + ب^٣ + ج^٣ = ٣أب ج$

نواتج التعلّم

يُثبت صحة المساواة والمتطابقات الجبرية في الحالات الشرطية.

عبّر عن متغيّر واحد في المعادلة الشرطية بدلالة المتغيرات الأخرى

عوّض بـ (١) للتخلّص من ج

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

أثبت المتطابقات الآتية.

- ١ إذا كان $s + v = 1$ ، فإن $s^2 + v^2 = 1 - 2sv$
- ٢ إذا كان $s - v = 1$ ، فإن $s^2 + v^2 = 2sv + 1$
- ٣ إذا كان $s + v = 1$ ، فإن $s^2 - v^2 = s - v$
- ٤ إذا كان $a + b + c = 0$ ، فإن $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$
- ٥ إذا كان $a + b + c = 0$ ، فإن $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$

★ التحدي — مجموع ثابت

ثلاثة أعداد غير صفرية a, b, c تحقق $a + b + c = 0$. أثبت أنه أيًا كانت هذه الأعداد، فإن المجموع الآتي يساوي -3 بالضبط دائمًا:

$$-3 = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

تأمل

لماذا يُعدّ الضرب التبادلي أو إضافة حدود إلى الطرفين غير صحيح رياضيًا عند إثبات متطابقة؟ وكيف يضمن العمل على طرف واحد فقط أن يبقى البرهان سليمًا منطقيًا؟

إثباتات المتطابقات (٣)

الفصل الأول البراهين الجبرية

١٢-١

الرياضيات

نواتج التعلم

يُثبت صحة المساواة
والمتطابقات الجبرية في
حالات التناسب.

لاحظ!

المعادلة التي تعبر عن تساوي نسبتين أو قيم نسب، مثل $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ أو $س : ص : ع = أ : ب : ج$ ، تُسمى **تناسبًا**.

في المسائل ذات الشرط $\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ ، ضع أولًا $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ وعبّر بـ $أ = ب ك$ ، $ج = د ك$

وفي المسائل ذات الشرط $س : ص : ع = أ : ب : ج$ ، اجعل $ك$ ثابتًا وعبّر بـ

$س = أ ك$ ، $ص = ب ك$ ، $ع = ج ك$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ، فأثبت أن $\frac{أ ب}{2 ب + 3 ج} = \frac{ج د}{3 د + 2 ج}$

٢ إذا كان $س : ص : ع = ٢ : ٣ : ٥$ ، فأوجد قيمة $\frac{2 س ص + ٣ ص ع + ٥ ع س}{٢ ع + ٣ ص + ٥ س}$

طريقة الحل

١ [البرهان]

ليكن $\frac{1}{p} = \frac{2}{5} = \frac{3}{k}$, إذن $\frac{3}{k} = \frac{2}{5}$, $\frac{5}{2} = \frac{k}{3}$, $k = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$ (١)

بالتعويض بـ (١) في الطرف الأيمن.

$$\frac{p \times k}{p + k} = \frac{p \times \frac{15}{2}}{p + \frac{15}{2}}$$

$$= \frac{p \times \frac{15}{2}}{\frac{2p + 15}{2}}$$

$$= \frac{p \times \frac{15}{2}}{(1 + \frac{15}{2})p}$$

$$= \frac{15}{1 + \frac{15}{2}} \text{ (٢)}$$

بالتعويض بـ (٢) في الطرف الأيسر.

$$\frac{d \times k}{d + k} = \frac{d \times \frac{15}{2}}{d + \frac{15}{2}}$$

$$= \frac{d \times \frac{15}{2}}{\frac{2d + 15}{2}}$$

$$= \frac{d \times \frac{15}{2}}{(1 + \frac{15}{2})d}$$

$$= \frac{15}{1 + \frac{15}{2}} \text{ (٣)}$$

$$\frac{d}{d + k} = \frac{15}{1 + \frac{15}{2}} \text{ من (٢) و (٣).}$$

٢ من س : ص = ع : ٣ = هـ : ٢ : ٣ : ٥. وليكن ك ثابتاً.

س = ٢ك, ص = ٣ك, ع = ٥ك (١)

$$\text{من (١).} \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{2 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{2(ك) + 3(ك) + 5(ك)}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{2 + 3 + 5}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{10}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{10}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 3 + 3 \times 3 + 5 \times 5}{10}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان $\frac{1}{p} = \frac{2}{5}$, فأثبت أنّ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

٢ إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, فأثبت أنّ $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$

٣ إذا كان أ : ب : ج = ٢ : ٣ : ٤, فأوجد قيمة $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$

تخلص من أ

حلّ وبسط

تخلص من ج

حلّ وبسط

تعاون مع زميل

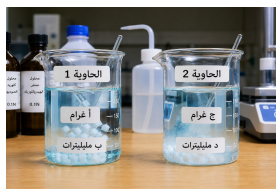
تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

- ١ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ ، فأثبت أن $\frac{أ+ج}{ب-د} = \frac{أ+ج}{ب-د}$
- ٢ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ ، فأثبت أن $\frac{أ+ج}{د-ب} = \frac{أ+ج}{د-ب}$
- ٣ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$ ، فأثبت أن $\frac{س+ص}{ص-ع} = \frac{س+ص}{ص-ع}$
- ٤ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$ ، فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$
- ٥ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$ ، فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$
- ٦ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$ ، فأثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ}$
- ٧ إذا كان أ : ب : ج = ٣ : ٥ : ٢، فأوجد قيمة $\frac{٢ج - ٢ب + ٢أ}{٢ج + ٢ب - ٢أ}$
- ٨ إذا كان س : ص : ع = ٢ : ٣ : ٤، فأوجد قيمة $\frac{٢ع + ٢ص + ٢س}{س + ص + ع}$
- ٩ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{أ} \neq ٠$ ، فأوجد قيمة $\frac{٢س + ٢ص + ٢ع}{٢س + ٢ص + ٢ع}$

★ التحدي — ضبط محلول كيميائي



تخيل أنك كيميائي أمامك وعاءان من محلول ملحي، الوعاء ١ فيه أ جراماً من الملح في ب مليتراً من الماء؛ والوعاء ٢ فيه ج جراماً في د مليتراً. وللوعاءين التركيز نفسه تماماً، أي $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$.

يدخل عليك المشرف ومعه اختباران لضبط الجودة عليك إجراؤهما:

الاختبار ١ (الكتلة الكتلية): أوجد نسبة الكتلة الكتلية (ملح + ماء) إلى الماء النقي في كلا الوعاءين.

الاختبار ٢ (الفرق): أوجد نسبة الكتلة الكتلية إلى صافي الفرق بين الماء والملح (ماء - ملح) في كلا الوعاءين.

أثبت أنه إذا تساوى التركيزان الابتدائيان، فإن نسبة كتليهما المجمععة إلى فرقهما المفصول تبقى متساوية تماماً كذلك:

$$\frac{أ + ج}{ب - د} = \frac{أ + ج}{ب - د}$$

إثبات المتباينات (١)

الفصل الأول البراهين الجبرية

١٣-١
الرياضيات

نواتج التعلم

يثبت صحة المتباينات الجبرية
في مواقف رياضية متنوعة
(الحالة الشريطية).



المفهوم ٥٠ المتباينات

أنت مهندس حيوي تصمم كبسولة قابلة للتحلل الحيوي لتوصيل دواء منقذ للحياة إلى ورم بعينه داخل جسم الإنسان. ولضمان تحرر الدواء بالمعدل الأمثل، تحتاج إلى أن يكون حجم الكبسولة أكبر ما يمكن، لكنك مقيدٌ بحدٍّ صارم على كمية البوليمر الخام الغالي المتاحة لصنع مساحة سطحها الخارجي.

فكيف تجد التصميم الأمثل على الإطلاق وأنت لا تستطيع استعمال معادلة مضبوطة تعطيك إجابة واحدة؟ تستعمل المتباينات.

فبينما نخبرنا المعادلات العادية متى تتساوى الأشياء بالضبط، نخبرنا المتباينات بالحدود المثلى لما هو ممكن فيزيائياً - القيم العظمى والصغرى المطلقة. وفي علوم الحياة والاقتصاد واللوجستيات، أقوى أداة لإيجاد هذه الحدود قانون رياضي عامٌ يدعى يُعرف بمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي.

السؤال الموجّه: كيف يمكن استعمال الأساليب الجبرية والخصائص البنائية للأعداد الحقيقية الموجبة في تحديد حدود عليا وسفلى قاطعة للمقادير المتغيرة؟ وكيف تظهر المساواة بوصفها حالة حدية خاصة؟

لاحظ!

❗ لإثبات المتباينة الطرف الأيمن < الطرف الأيسر، احسب فرقهما **الطرف الأيمن - الطرف الأيسر** وأثبت أنه **موجب**. (الطرف الأيمن - الطرف الأيسر > ٠)
❗ إذا كان شرط مثل $أ < ب$ معطى، أعد كتابته على الصورة **$أ - ب < ٠$** لاستخدامه في إثباتك.

استعد

أثبت المتباينات الآتية.

١ إذا كان $أ < ب$ و $س < ص$ ، فأثبت أن $٢(أس + بص) < (أ + ب)(س + ص)$

٢ إذا كان $س < ٣$ و $ص < ٥$ ، فأثبت أن $سص + ٥س < ٣ص + ١٥$

طريقة الحل

١ [البرهان]

الطرف الأيمن - الطرف الأيسر = $٢(أس + بص) - (أ + ب)(س + ص)$

= $٢أس + ٢بص - أس - أس - بص - بص$

= $أس - أس - بص + بص$

= $أس(س - ص) - ب(س - ص)$

= $(أ - ب)(س - ص)$

وبما أن $أ < ب$ و $س < ص$ ، فإن $أ - ب < ٠$ و $س - ص < ٠$ ،

⇒ $(أ - ب)(س - ص) > ٠$

إذن، $٢(أس + بص) < (أ + ب)(س + ص)$

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن - الطرف الأيسر»

حلل المقدار. أخرج العامل المشترك من الحدين الأول والثاني.

إذا كان $أ < ب$ و $س < ص$ ، فإن $أ - ب < ٠$

طريقة الحل

٢ [البرهان]

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن -
الطرف الأيسر»

حلل المقدار: أخرج العوامل
المشتركة من الحدين السابقين
واللاحقين.

$$\bullet \text{ الطرف الأيمن - الطرف الأيسر} = سص + ٥س - (٣ص + ١٥)$$

$$= سص + ٥س - ٣ص - ١٥$$

$$= س(ص + ٥) - ٣(ص + ٥)$$

$$= (س - ٣)(ص + ٥)$$

$$\text{وبما أن } س < ٣ \text{ و } ص < ٥, \text{ فإن } س - ٣ < ٠ \text{ و } ص + ٥ < ٠,$$

$$(س - ٣)(ص + ٥) < ٠$$

$$\text{إذن، } سص + ٥س < ٣ص + ١٥$$

حاول

أثبت المتباينات الآتية.

$$١ \text{ إذا كان } أ < ب, ج < د, \text{ فأثبت أن } أ + ج < ب + د$$

$$٢ \text{ إذا كان } س < ٢, ص < ١, \text{ فأثبت أن } سص + ٢ < س + ٢ص$$

تدريب

أثبت المتباينات الآتية.

$$١ \text{ إذا كان } س < ص, \text{ فأثبت أن } ٣س - ٤ < ٣ص - ٤$$

$$٢ \text{ إذا كان } أ < ج, ب < د, \text{ فأثبت أن } أ + ب < ج + د$$

$$٣ \text{ إذا كان } أ < ١, ب < ١, \text{ فأثبت أن } أ + ب < ١ + ١$$

$$٤ \text{ إذا كان } أ < ب < س < ص, \text{ فأثبت أن } أس + بص < أص + بس$$

★ التحدي — إعادة الترتيب

$$\text{إذا كان } أ < ب < ج < د < ٠ \text{ و } ٠ < ص < ع < ٠, \text{ فأثبت أن}$$

$$أس + بص + جع < أص + بع + جس$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

إثبات المتباينات (٢)

الفصل الأول البراهين الجبرية

١٤-١

الرياضيات

نواتج التعلم

يُثبت صحة المتباينات الجبرية في مواقف رياضية متنوعة (الحالة غير الشرطية).

لاحظ!

❗ لإثبات أن الطرف الأيمن $\leq$ الطرف الأيسر، احسب فرقهما وأثبت أن

الطرف الأيمن - الطرف الأيسر ≤ ٠

❗ لإثبات متباينة لجميع الأعداد الحقيقية، استخدم **إكمال المربع** لتكوين $س^٢$ أو $ص^٢ + ٢$

❗ للمتباينات التي تحتوي على $\geq$ أو $\leq$ ، يجب ذكر شرط تحقق المتطابقة.

للأعداد الحقيقية $س، ص$: $س^٢ \leq ٠$ تتحقق المتطابقة عندما **س = ٠**

$س^٢ + ٢ \leq ٠$ تتحقق المتطابقة عندما **س = ٠، ص = ٠**

استعد

أثبت المتباينات الآتية. وحدد أيضًا متى تتحقق المتطابقة.

❶ $أ^٢ + ٢ب^٢ \leq ٤أب$ ❷ $س^٢ + ٢ص^٢ \leq ٢(س - ص - ١)$

طريقة الحل

❶ [البرهان]

الطرف الأيمن - الطرف الأيسر = $أ^٢ + ٢ب^٢ - ٤أب$

= $أ^٢ - ٢أب + ٢ب^٢$

= $(أ - ب)^٢$

= $(أ - ب)^٢ \geq ٠$

إذن، $أ^٢ + ٢ب^٢ \geq ٤أب$

وتتحقق المتطابقة أيضًا عندما

$أ - ب = ٠$ أي عندما $أ = ب$

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن - الطرف الأيسر»

أكمل المربع لتكوين $س^٢$

$س^٢ \geq ٠$

تتحقق المتطابقة عندما $س = ٠$

٢ [البرهان]

ابدأ بكتابة «الطرف الأيمن -
الطرف الأيسر»

أكمل المربع لكل من s و v
لتكوين $s^2 + v^2$

$s^2 + v^2 \leq 0$

تتحقق المتطابقة عندما $s = 0$
و $v = 0$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

$$\text{الطرف الأيمن - الطرف الأيسر} = s^2 - 2s + v^2 - 2(s - v) + 1$$

$$= s^2 - 2s + v^2 + 2s - 2v + 1 = s^2 + v^2 - 2v + 1$$

$$= s^2 + v^2 - 2(1 - v) + 1 = s^2 + v^2 - 2 + 2v + 1 = s^2 + v^2 + 2v - 1$$

$$= (s + v)^2 \geq 0$$

إذن، $s^2 + v^2 \leq 2(s - v) + 1$.

وتتحقق المتطابقة أيضًا عندما

$$s - 1 = 0 \text{ و } v + 1 = 0 \text{ أي عندما } s = 1 \text{ و } v = -1$$

حاول

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا متى تتحقق المتطابقة.

١ $(a^2 + b^2)(s^2 + v^2) \leq (as + bv)^2$

٢ $a^2 + b^2 \leq 4ab$

تدريب

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا متى تتحقق المتطابقة. عدا السؤال الخامس

١ $9s^2 \leq v(6s - v)$ ٢ $2(s^2 + v^2) \leq (s + v)^2$

٣ $2(s - v)^2 \leq 3(s^2 - v^2)$ ٤ $12 \leq (a + b)^2$

٥ $s^2 + 2 < 2s$ ٦ $s^2 + v^2 - 2s - 8v + 25 \leq 0$

★ التحدي — لا يكون سالبًا أبدًا



أنت محلّل بيانات في مصنع ينتج مكّونات دقيقة
للطائرات المسيّرة باستعمال آليتين، s و v . وبسبب
التآكل الميكانيكي وانحراف المعايرة وارتفاعات الطاقة
المفاجئة، تُنمذج التكلفة العامة اليومية بدلالة
 s و v بالعلاقة

$$\text{التكلفة العامة} = s^2 + 2s - 10s + 12v + 3$$

أثبت أنّه مهما كان s و v المختاران، فلن تكون التكلفة العامة للمصنع سالبة أبدًا.

إثبات المتباينات (٣)

الفصل الأول البراهين الجبرية

١٥-١

الرياضيات

لاحظ!

❗ لإثبات المتباينات المحتوية على جذور، احسب فرق مربعيهما، (الطرف الأيمن) - (الطرف الأيسر)

(الطرف الأيسر)

❗ استخدم الخصائص الآتية في الإثبات:

• عندما (الطرف الأيمن) < ٠، (الطرف الأيسر) < ٠ : (الطرف الأيمن) < (الطرف الأيسر) ⇔
الطرف الأيمن < الطرف الأيسر

(الطرف الأيمن) ≤ (الطرف الأيسر) ⇔ (الطرف الأيمن) ≤ الطرف الأيسر

• عندما أ < ٠، أ ≤ √(٢٢ + ٢١)

استعد

أثبت المتباينات الآتية. وحدد أيضًا متى تتحقق المتطابقة في البند ١.

❶ إذا كان $٠ < ب$ و $٠ < أ$ ، فإن $\frac{ب+أ}{٢} \leq \sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}}$

❷ إذا كان $٠ < ب$ و $٠ < أ$ ، فإن $\sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}} < \sqrt{ب} + \sqrt{أ} < \sqrt{١٦+١٦}$

طريقة الحل

❶ [البرهان]

احسب (الطرف الأيمن) - (الطرف الأيسر)

$$(الطرف الأيمن) - (الطرف الأيسر) = \left(\frac{ب+أ}{٢}\right)^٢ - \left(\sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}}\right)^٢$$

$$= \frac{٢٢+٢١}{٤} - \frac{٢٢+٢١}{٢} =$$

$$= \frac{٢٢+٢١-٢٢-٢١}{٤} =$$

$$= \left(\frac{ب-أ}{٢}\right)^٢ \geq ٠$$

س ≥ ٠

أثبتنا أن (الطرف الأيمن) ≤ (الطرف الأيسر)

$$\text{إذن، } \left(\frac{ب+أ}{٢}\right)^٢ \leq \left(\sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}}\right)^٢ \quad (١)$$

يجب إثبات أن (الطرف الأيمن) < (الطرف الأيسر).

$$\text{وبما أن } ٠ < ب \text{ و } ٠ < أ، \text{ فإن } \sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}} < \frac{ب+أ}{٢} \quad (٢)$$

أثبتنا أن (الطرف الأيمن) ≤ (الطرف الأيسر)

$$\text{من (١) و (٢)، } \sqrt{\frac{٢٢+٢١}{٢}} < \frac{ب+أ}{٢}$$

وتتحقق المتطابقة أيضًا عندما

$$\frac{ب-أ}{٢} = ٠ \text{ أي عندما } أ = ب.$$

تتحقق المتطابقة عندما س = ٠

ناتج التعلم

يُثبت صحة المتباينات الجبرية في مواقف رياضية متنوعة (ومنها ما يتضمّن جذورًا).

٢ [البرهان]

احسب (الطرف الأيمن) -
(الطرف الأيسر)

$$\left(\sqrt{16 + \sqrt{b}} \right)^2 - \left(\sqrt{b} + \sqrt{4} \right)^2 = \text{(الطرف الأيسر)} - \text{(الطرف الأيمن)}$$

$$= \sqrt{16 + \sqrt{b}} - \sqrt{b} - 4$$

$$= \sqrt{16 + \sqrt{b}} - \sqrt{b} - 4$$

$$= \sqrt{16 + \sqrt{b}} - \sqrt{b} - 4$$

$$\text{إذن، } \left(\sqrt{16 + \sqrt{b}} \right)^2 < \left(\sqrt{b} + \sqrt{4} \right)^2 \text{ (١)}$$

$$\text{وبما أن } \sqrt{b} < 0 \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{16 + \sqrt{b}} \text{ (٢)}$$

$$\text{من (١) و (٢)، } \sqrt{16 + \sqrt{b}} < \sqrt{b} + \sqrt{4}$$

$$\sqrt{b} < 0$$

يجب إثبات أن الطرف الأيمن < .
والطرف الأيسر < .

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

حاول

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة في البند ١.

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} \leq \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} \leq \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

تدريب

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة في البنود من ١ إلى ٣.

$$\sqrt{b} + \sqrt{3} \leq \sqrt{b+3} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{3} \leq \sqrt{b+3} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} \leq \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} \leq \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\frac{\sqrt{b} + \sqrt{4}}{2} \leq \sqrt{\frac{b+4}{2}} \text{، فإن } \frac{\sqrt{b} + \sqrt{4}}{2} \leq \sqrt{\frac{b+4}{2}} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، فإن } \sqrt{b} + \sqrt{4} < \sqrt{(b+4)^2} \text{، وب } \sqrt{b} < 0$$

★ التحدي — متباينة بجذور

$$\text{إذا كان } \sqrt{b} < 0 \text{، حيث } \sqrt{b} \text{ و } \sqrt{4} \text{ عدداً موجبان، فأثبت أن } \sqrt{b} + \sqrt{4} > \sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}$$

إثبات المتباينات (٤) (متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي)

الفصل الأول البراهين الجبرية

لاحظ!

❗ متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي

$$\text{عندما } 0 < a, 0 < b, \sqrt{\frac{a+b}{2}} \leq \sqrt{\frac{ab}{2}} \text{ أو } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

تسري المتطابقة عندما $a = b$

❗ متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي مفيدة جدًا عندما يُبسّط حاصل ضرب الحدود إلى ثابت.

$$\text{مثال: } a + \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} \times a = 1$$

نواتج التعلّم

يطبّق متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي في إثبات المتباينات وإيجاد القيم العظمى.

استعد

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا هل تتحقّق المتطابقة.

1 إذا كان $a < 0, b < 0$ فإن $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$

2 إذا كان $a < 0, b < 0$ فإن $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leq 4$

طريقة الحل

1 [البرهان]

$$\text{بما أن } \frac{1}{a} < 0, \frac{1}{b} < 0$$

فبمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي،

$$\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

$$2 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\text{إذن، } 2 \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

وتتحقّق المتطابقة أيضًا

$$\text{عندما } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$a = b$$

$$\text{وبما أن } a < 0, b < 0 \text{ فإن } a = b$$

إذن، تتحقّق المتطابقة عندما $a = b$

اكتب هذا دائمًا

اضرب الطرفين في أب

[البرهان] ٢

$$(أ + ب) \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} \right) = \frac{1}{أ} \times ب + \frac{ب}{أ} + \frac{أ}{ب} + \frac{1}{ب} \times أ = \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} \right) (أ + ب)$$

$$\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} = ٢ \dots (١)$$

$$\bullet \text{ بما أن } \frac{1}{أ} < ٢, \frac{1}{ب} < ٢ \dots$$

فبمتباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي،

$$\sqrt{\frac{1}{أ} \times \frac{1}{ب}} \leq \frac{1}{أ} + \frac{1}{ب}$$

$$\bullet ٢ \leq \frac{1}{أ} + \frac{1}{ب}$$

$$\bullet ٤ \leq ٢ + \frac{1}{أ} + \frac{1}{ب}$$

$$\text{إذن، } (أ + ب) \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} \right) \leq ٤$$

وتتحقق المتطابقة أيضًا

$$\bullet \text{ عندما } \frac{1}{أ} = \frac{1}{ب}$$

$$أ = ب$$

وبما أن $٠ < ب < ١$ ، فإن $أ = ب$ إذن، تتحقق المتطابقة عندما $أ = ب$

اكتب هذا دائمًا

أضف ٢ إلى الطرفين لمطابقة (١)

أثبتنا أن المقدار (١) $٤ \leq$

اضرب الطرفين في أ ب

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

حاول

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا هل تتحقق المتطابقة.

$$١ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } \frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} \leq ٤$$

$$٢ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } (أ + ب) \left(\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} \right) \leq ١٦$$

تدريب

أثبت المتباينات الآتية. وحدّد أيضًا هل تتحقق المتطابقة.

$$١ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } أ + \frac{٤}{ب} \leq ٤$$

$$٢ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } ٣أ + \frac{٤}{ب} \leq ٤$$

$$٣ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } أ + ب + \frac{٩}{ب+١} \leq ٦$$

$$٤ \quad \text{إذا كان } س < ١ \text{، فإن } \left(س + \frac{1}{س} \right) \left(س + \frac{٤}{س} \right) \leq ٩$$

$$٥ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } (أ + ب) \left(\frac{1}{أ} + \frac{٢}{ب} \right) \leq ١٨$$

$$٦ \quad \text{إذا كان } ٠ < ب < ١ \text{، فإن } (أ + \frac{٢}{ب}) (ب + \frac{٢}{ب}) \leq ١٢$$

★ التحدي — المساحة العظمى

مستطيل محيطه ٢٠٠ سم. باستعمال العلاقة بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي، أثبت أن مساحة المستطيل ≥ ٢٥٠٠ سم^٢.

المحيط = ٢٠٠ سم

مكان الشكل: مستطيل طوله ل وعرضه و

تأمل

أثبتنا في الدرس أن متباينة المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي $\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{a+b}{2}\right)$ تصح دائماً، بشرط أن يكون العددان غير سالبين (أ، ب ≥ ٠).

سؤال للتأمل: ماذا يحدث لو حاولنا كسر هذا الشرط وطبقنا المتباينة على أعداد سالبة؟ افترض أن أ = ٢، ب = -٨.

١. احسب المتوسط الحسابي لهما.

٢. حاول حساب المتوسط الهندسي لهما.

٣. هل تبقى إشارة المتباينة ($\leq$) صحيحة وسارية؟

وضّح الانهيار الجبري والمنطقي الذي يحدث هنا، ولماذا يُعدّ تعريف «المجالات والقيود» في المتباينات أمراً حيوياً لمنع النماذج الطبية والهندسية من الانهيار في العالم الحقيقي.

المتتابعات والحدود العامة

الفصل الثاني المتتابعات

١-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

إيجاد الحد العام للمتتابعة، واستنتاج بعض حدودها.



المفهوم ١ - المتتابعات الحسابية

تخيل أنك مدرب رياضي يضع برنامج تأهيل للاعب مصاب. تجعله يهرول ١٠ دقائق يوميًا في الأسبوع الأول، ثم تزيد المدة ٣ دقائق بالضبط في كل أسبوع لاحق (١٣ دقيقة، ثم ١٦، ثم ١٩ ...).

هذه الزيادة الخطية الثابتة متتابعة حسابية في صورة عملية. وفي الطب والأحياء تحكم هذه الأنماط الثابتة عمليات حاسمة، مثل معدل تخليص الكبد للسموم في الساعة، وكيفية انقسام الخلايا مع الزمن. وبدلاً من جمع البرنامج أسبوعاً بعد أسبوع، تعطيك قوانين المتتابعة الحسابية الإجابة الدقيقة في الحال: مدة تدريب المريض في الأسبوع ٢٤، ومجموع زمن الجري المتراكم خلال شهور.

السؤال الموجّه: كيف نمذج رياضياً معدلات التغير الجمعي الثابتة، لتحديد حدود

بعينها ومجاميع تراكمية كلية في المتتابعة؟

لاحظ!

❗ قائمة من الأعداد مرتبة في صفّ تُسمّى **متتابعة**، ويُسمّى كل عدد في المتتابعة **حدّاً**.

تُسمّى حدود المتتابعة **الحدّ الأول**، والحدّ الثاني، والحدّ الثالث، إلخ، بالترتيب من البداية. ويُسمّى الحدّ في الموضع n بالحدّ رقم n .

❗ للتعبير عن متتابعة بصورة عامة، نكتبها على النحو الآتي بإلحاق رقم الحدّ بحرف واحد.

أ، أ_٢، أ_٣، ... ، أ _{n} ، ...

يُرمز لهذه المتتابعة أيضاً بـ {أ _{n} }.

مثال: {أ _{n} } : ٢، ٤، ٨، ١٦، ...

أ_١ = ٢، أ_٢ = ٤، أ_٣ = ٨، أ_٤ = ١٦، ...

❗ عندما يُعبّر عن أ _{n} بتعبير بدلالة n ، فإن تعويض ١، ٢، ٣، ... في n يعطي

أ_١، أ_٢، أ_٣، ...

يُسمّى مثل هذا التعبير بدلالة n بـ **الحدّ العام** للمتتابعة {أ _{n} }.

مثال: أ _{n} = ٢ n - ٧

أ_١ = ٢ - ٧ = -٥ أ_٢ = ٢ × ٢ - ٧ = -٣ أ_٣ = ٢ × ٣ - ٧ = -١

أ، هو الحدّ الأول، أ _{n} هو الحدّ رقم n .

٢ n - ٧ هو حدّ عام.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ معطى بـ $a_n = \frac{n}{1+n}$ ، فأوجد الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث من هذه المتتابعة.

٢ استنتج الحدّ العام للمتتابعات الآتية $\{a_n\}$.

(أ) $1, 0, 1, 4, 9, 16, \dots$ (ب) $2, -4, 6, -8, 10, \dots$ (ج) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \dots$

طريقة الحلّ

١ عوّض $n = 1, 2, 3$ فى $a_n = \frac{n}{1+n}$

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$$

٢ أنشئ قانونًا بالنظر فى الانتظام.

(أ) بما أنها (رقم الحدّ - ٢)، فإن $a_n = (n-1)^2$

(ب) بالنسبة للمتتابعات ذات الإشارات المتناوبة، انظر فى انتظام جزء الإشارة وجزء العدد بشكل منفصل.

إذا كان الحدّ الأول «-» وتتناوب،
فإنها $(-1)^n$.

الأعداد الزوجية هي ٢.

الأعداد الفردية هي ٢ - ١

اعمل مع زميل

تعاون مع مجموعتك فى حلّ
قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

بالنسبة للإشارة، بما أن الحدّ الأول «+» وتتناوب، فإنها $(-1)^{n-1}$

بالنسبة للعدد، بما أنه $2 \times$ (رقم الحدّ)، فهو $2n$

إذن، $a_n = (-1)^{n-1} \times 2n$

(ج) بالنسبة للمتتابعات الكسرية، انظر فى انتظام المقام والبسط بشكل منفصل.

المقام هو $2 \times$ (رقم الحدّ) - ١، إذن $2n - 1$

البسط هو (رقم الحدّ)، إذن n

إذن، $a_n = \frac{n}{2n-1}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ معطى بالقوانين الآتية، فأوجد الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث من المتتابعة.

(أ) $a_n = 2n - 3$ (ب) $a_n = 2 \times 3^n$ (ج) $a_n = 7n - 2$ (د) $a_n = \frac{n}{1+n^2}$

٢ استنتج الحدّ العام للمتتابعات الآتية $\{a_n\}$.

(أ) $1, 0, 1, 4, 9, 16, \dots$ (ب) $3, -6, 9, -12, 15, \dots$

(ج) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$ (د) $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \dots$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ معطى بالقوانين الآتية، فأوجد الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث من المتتابعة.

(أ) $a_n = 8 - n$ (ب) $a_n = 3n + 1$ (ج) $a_n = -2n - 4$ (د) $a_n = 3 - n$
 (هـ) $a_n = (3 - n)^n$ (و) $a_n = 3 \times (2 - n)^n$ (ز) $a_n = 1 - 2^n$ (ح) $a_n = 1 + n + 2^n$
 (ط) $a_n = 2^n + 2n + 4$ (ي) $a_n = \frac{1}{2 - n^3}$ (ك) $a_n = \frac{n^2}{3 + n}$ (ل) $a_n = \frac{1 + n}{1 - n^2}$

٢ استنتج الحدّ العام للمتتابعات الآتية $\{a_n\}$.

(أ) $0, 2, 4, 6, 8, \dots$ (ب) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
 (ج) $0, 3, 6, 9, 12, \dots$ (د) $-5, -10, -15, -20, -25, \dots$
 (هـ) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ (و) $1, -4, 9, -16, 25, \dots$
 (ز) $27, 28, 29, 30, 31, \dots$ (ح) $4, 9, 14, 19, 24, \dots$
 (ط) $6, 13, 20, 27, 34, \dots$ (ي) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$
 (ك) $1 \times 3 \times 2, 9 \times 3 \times 27, 4 \times 81 \times 5, 3 \times 243 \times \dots$

★ التحدي

$$1 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{3}, 3 \times \frac{1}{4}, 4 \times \frac{1}{5}, 5 \times \frac{1}{6}, \dots$$

استنتج الحدّ العام، ثم أوجد الحدّ العشرين.

المتتابعة الحسابية (١)

الفصل الثاني المتتابعات

٢-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

حساب الحد العام للمتتابعة الحسابية، وإيجاد بعض حدودها المعيّنة.
أ، ١، ٢، ٣، ...، أ، ١، ٢، ٣، ...، أ

لاحظ!

المتتابعة التي نحصل عليها بإضافة عدد ثابت د إلى كل حدّ سابق بالتتابع تُسمّى **متتابعة حسابية**، ويُسمّى العدد الثابت د **الأساس**.

مثال: متتابعة حسابية حدّها الأول ١ وأساسها ٣

$$١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ...$$

الحدّ العام للمتتابعة الحسابية التي حدّها الأول أ وأساسها د هو **$أ + د(١ - ن)$**

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدّ الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(ب) $٣، ٢، -٧، -١٢، -١٧، ...$

(أ) $٢، ٥، ٨، ١١، ...$

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعدين المناسبين

أ و ب

(ب) $١٣، أ، ب، -٢، ...$

(أ) $أ، ١، ٢، ب، ...$

٣ للمتتابعة الحسابية {أ_ن} التي حدّها الأول ٨ وأساسها -٦، أوجد الحدّ العام. كذلك، أوجد الحدّ العشرين.

طريقة الحلّ

١ (أ) الحدّ الأول: ٢، الأساس: ٣

(ب) الحدّ الأول: ٣، الأساس: -٥

٢

(أ) $أ، ٢، ١، -١، -٤، ...$

الفرق المشترك: -٣، أ: ٥، ب: -٤

(ب) $١٣، ١٠، ٧، ٤، ١، -٢، -٥، ...$

ليكن الأساس المتوقّع د، إذن $١٥ = ٣د$ ، ومن ثمّ $د = ٥$

الأساس: -٥، أ: ٨، ب: ٣

٣ يُوجد الحد العام بتعويض $أ = ٨$ ، $د = ٦$ في $أ = (١ - ن) + د$

$$أ = (١ - ن) + ٨ = ٦ - ن + ٨$$

$$٦ - ن + ٨ =$$

$$١٤ - ن = ٦ - ن + ٨$$

يُوجد الحد العشرون بتعويض $ن = ٢٠$ في $أ = ١٤ - ن$

$$أ = ١٤ - ٢٠ = -٦$$

$$١٠٦ - ٢٠ = -٦$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) ١، ٥، ٩، ١٣، ١٧، ... (ب) ٢٣، ١٩، ١٥، ١١، ٧، ...

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعدين المناسبين

أ و ب

(أ) ٢، ٩، ... (ب) ١٧، ١٠، ٥، ...

٣ للمتتابعات الحسابية الآتية $\{أ_n\}$ ، أوجد الحد العام. كذلك، أوجد الحد السابع.

(أ) الحد الأول ٤، والأساس ٣ (ب) الحد الأول ٢، والأساس -٣

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد الأول والأساس للمتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ... (ب) -١٣، -٩، -٥، -١، ٣، ...

(ج) -٢، ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ... (د) -٢، ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ...

(هـ) ٦، ١٦، ٢٦، ٣٦، ٤٦، ٥٦، ... (و) -٤، -٩، -١٤، -١٩، -٢٤، -٢٩، ...

اعمل مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

٢ المتتابعات الآتية متتابعات حسابية. أوجد الأساس والعدين المناسبين

لـ $\boxed{أ}$ و $\boxed{ب}$.

(أ) $١٥, ٨, \boxed{أ}, \boxed{ب}, \dots$

(ج) $\dots, \boxed{أ}, ٤, ٩, \boxed{ب}, \dots$

(هـ) $\dots, ٢٠, \boxed{ب}, \boxed{أ}, \dots$

(و) $\dots, \boxed{أ}, ١٧, \boxed{ب}, ٥, \boxed{ج}, \dots$

(ب) $١٣, ٧, \boxed{أ}, \boxed{ب}, \dots$

(د) $\dots, ٩, \boxed{ب}, ١٥, \boxed{أ}, \dots$

٣ للمتتابعات الحسابية الآتية $\{أ_n\}$ ، أوجد الحد العام. كذلك، أوجد الحد السابع.

(أ) الحد الأول ٥، والأساس ٤

(ب) الحد الأول -٢، والأساس ٣

(ج) الحد الأول ١٠، والأساس -٣

(د) الحد الأول $-\frac{1}{4}$ ، والأساس $-\frac{1}{4}$

٤ للمتتابعات الحسابية الآتية $\{أ_n\}$ ، أوجد الحد العام. كذلك، أوجد الحد العاشر.

(أ) الحد الأول -٧، والأساس ٣

(ب) الحد الأول -٢، والأساس -٣

(ج) الحد الأول ٧، والأساس $\frac{1}{4}$

(د) الحد الأول $\frac{2}{3}$ ، والأساس $-\frac{1}{3}$

★ التحدي

في متتابعة حسابية، مجموع الحد الثالث والحد السابع يساوي ٣٨، ونسبة الحد الرابع إلى الحد الثاني عشر تساوي $\frac{2}{9}$. أوجد الحد الأول لهذه المتتابعة وأساسها.

المتتابعة الحسابية (٢)

الفصل الثاني المتتابعات

٣-٢

الرياضيات

لاحظ!

! الحد العام $أ_n$ للمتتابعة الحسابية $\{أ_n\}$ هو $أ + (ن - ١)د$! عند إيجاد الحد العام للمتتابعة الحسابية، أوجد أولاً الحد الأول $أ$ والأساس $د$! عندما تكون المتتابعة $أ، ب، ج$ متتابعة حسابية بهذا الترتيب:

$$٢ب = أ + ج$$

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية $\{أ_n\}$ التي حدّها الثالث ١٠ وحدّها الثامن ٥٠٢ للمتتابعة الحسابية $\{أ_n\}$ التي أساسها ٤ وحدّها الثامن ٣٣، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد رقم الحد الذي يساوي ١١٣ (ب) أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ٥٠٠

٣ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة س، ٦، س^٢ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

طريقة الحلّ

! ليكن الحد العام $أ_n = أ + (ن - ١)د$ بما أن $أ_١ = ١٠$ ، فإن $أ + (١ - ٣)د = ١٠$ ، وبتبسيط ذلك $أ + ٢د = ١٠$ (١)وبما أن $أ_٨ = ٥٠$ ، فإن $أ + (٨ - ١)د = ٥٠$ ، وبتبسيط ذلك $أ + ٧د = ٥٠$ (٢)بحلّ (١) و (٢) معاً: $أ = ٦، د = ٨$ إذن الحد العام هو $أ_n = ٦ + (ن - ١)٨$

$$أ_n = ٨ن - ٦$$

نواتج التعلّم

حساب الحد العام للمتتابعة الحسابية، وإيجاد بعض حدودها المعيّنة.

بالنظر في $أ، ب، ج$:

$$+د \quad +د$$

$$٢ب = (أ + د) + (ب - د)$$

$$أ + ج =$$

أوجد الحد العام أولًا.

٢ ليكن الحد العام $\{a_n\}$ هو $a_n = (n-1)d + a$
 بما أن الأساس ٤ وأ $a = ٣٣$ ، فإن $a + (١-٨) \times ٤ = ٣٣$
 بحلّ ذلك: $a = ٥$
 إذن الحد العام $\{a_n\}$ هو $a_n = ٥ + (١-n) \times ٤$
 $a_n = ١ + ٤n$
 (أ) نبحث عن n بحيث $١١٣ = a_n$
 $١١٣ = ١ + ٤n$ وبحلّ ذلك $n = ٢٨$
 إذن، **الحد الثامن والعشرون.**

حوّل إلى صورة عشرية للدراسة.

(ب) نبحث عن أصغر عدد طبيعي n بحيث $٥٠٠ < a_n$
 $٥٠٠ < ١ + ٤n$ وبحلّ ذلك $n > \frac{٤٩٩}{٤} = ١٢٤,٧٥$
 إذن، **الحد الخامس والعشرون بعد المائة.**

$a_2 = ٦ + a$

٣ بما أن $s_٦ = ٦٠$ ، $s_٢$ تُكوّن متتابعة حسابية بهذا الترتيب:
 $s_٢ + s_٢ = ٦ \times ٢$
 وبحلّ ذلك: $s = ٣, ٤ -$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد العام للمتتابعات الحسابية الآتية $\{a_n\}$.

(أ) الحد الأول هو -٥ ، والحد السابع عشر هو ٧٥

(ب) الأساس هو ٣ ، والحد السادس عشر هو ٨١

(ج) الحد السادس هو ٢ ، والحد الخامس عشر هو -٢٥

٢ للمتتابعة الحسابية $\{a_n\}$ ذات الحد الأول ١ والأساس ٣ ، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدّ أيّ حدّ يساوي ٤٠ (ب) أوجد أول حدّ أكبر من ١٠٠

٣ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة $s_٢$ ، $s_٨$ ، $s_٣$ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة $s_٣$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدّ العام للمتتابعات الحسابية الآتية {أن}.

- (أ) الحدّ الأول ٦، والحدّ الرابع ١٨
(ب) الحدّ الأول ٢٠، والحدّ الثامن ١-
(ج) الحدّ الأول ٨-، والحدّ الثامن ٥٥
(د) الحدّ الأول ١٨-، والحدّ العاشر ٦٣-
(هـ) الأساس ٢، والحدّ الثامن ٤
(و) الأساس ٤-، والحدّ الخامس ٧-
(ز) الأساس ٧-، والحدّ السادس ٢٤-
(ح) الأساس $\frac{٢}{٥}$ ، والحدّ الثلاثون $\frac{٢٣}{٥}$
(ط) الحدّ الرابع ١٤، والحدّ العاشر ٦٢
(ي) الحدّ الثالث ٣٠، والحدّ العاشر ٢
(ك) الحدّ العاشر ٤٩، والحدّ الثالث والعشرون ١٠
(ل) الحدّ الثالث ٦، والحدّ العاشر ٦٢

٢ للمتتابعة الحسابية {أن} التي أساسها ٥- وحدّها الثالث عشر ٧-، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدّد أيّ حدّ يساوي ٥٢- (ب) أوجد أول حدّ يكون أصغر من ٣٠٠-

٣ للمتتابعة الحسابية {أن} التي حدّها العاشر ٢٠- وحدّها العشرون ٥٠-، حلّ المسائل الآتية.

(أ) حدّد أيّ حدّ يساوي ١١٠- (ب) أوجد أول حدّ يكون أصغر من ٥٠٠-

٤ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة أ، ٦، ٢ أمتتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة أ

٥ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ٣-، س، س^٢ أمتتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

★ التحدي

عندما تُكوّن الأعداد الأربعة ٢، س، ص، ع متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوّن ٢س، ص + ١، ع - ص كذلك متتابعة حسابية بهذا الترتيب، أوجد قيم س، ص، ع

مجموع المتتابعة الحسابية (١)

الفصل الثاني المتتابعات

٤-٢

الرياضيات

لاحظ!

❗ في متتابعة مؤلفة من n حدًا، يُسمَّى n عدد الحدود، ويُسمَّى الحد الأخير الحد الأخير.

لتكن M_n مجموع الحدود من الحد الأول حتى الحد n لمتتابعة حسابية.

عندما يكون الحد الأول A ، والحد الأخير L ، وعدد الحدود n :

$$M_n = \frac{n}{2}(A + L)$$

وعندما يكون الحد الأول A ، والأساس d ، وعدد الحدود n :

$$M_n = \frac{n}{2}(A + \{d(n-1) + A\})$$

❗ عندما يكون عدد الحدود n مجهولًا، أوجد n أولاً باستخدام $L = A + d(n-1)$

نواتج التعلم

حساب الحد العام للمتتابعة الحسابية. إيجاد بعض الحدود المعيّنة في متتابعة حسابية. إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية.

عوض $L = A + d(n-1)$ في القانون أعلاه.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) M_n لمتتابعة حدها الأول ٨، وحدها الأخير ٢٢، وعدد حدودها ٧

(ب) M_n لمتتابعة حدها الأول ٢، وأساسها ٣، وحدها الأخير ٤٧

(ج) M_n لمتتابعة حدها الأول ٢٠، وأساسها ٥، وعدد حدودها ١٣

(د) M_n من الحد الأول حتى الحد n لمتتابعة حدها الأول ١، وأساسها ٤

٢ للمتتابعة الحسابية ٩٠، ٨٤، ٧٨، ...، أوجد المجموع من الحد العاشر حتى الحد العشرين.

طريقة الحل

١ (أ) بما أن $أ = ٨$ ، $ل = ٢٢$ ، $ن = ٧$:

$$٧م = \frac{١}{٢} \times (٢٢ + ٨)$$

$$١٠٥ =$$

(ب) أوجد أولًا عدد الحدود. لتكن $ن$ عدد الحدود.

بما أن الحد الأول ٢، والأساس ٣، والحد الأخير ٤٧:

$$٤٧ = ٣ \times (١ - ن) + ٢$$

بحلّ هذه المعادلة: $ن = ١٦$

$$١٦م = \frac{١}{٢} \times (٤٧ + ٢)$$

$$٣٩٢ =$$

(ج) بما أن $أ = ٢٠$ ، $ب = ٥$ ، $ن = ١٣$:

$$١٣م = \frac{١}{٢} \times \{ ١٣ \times ٢ + (١٣ - ١) \times (٥ - ٢) \}$$

$$١٣٠ =$$

(د) بما أن $أ = ١$ ، $ب = ٤$:

$$نم = \frac{١}{٢} \times \{ ١ \times ٢ + (١ - ن) \times ٤ \}$$

$$\frac{١}{٢} \times (٢ - ٤ن) = \frac{١}{٢} \times (٤ - ٤ن + ٢)$$

$$٢ن - ٢ =$$

٢ المجموع المطلوب يُحسب بـ $٢م - ٤م$:بما أن $أ = ٩٠$ ، $ب = ٦$:

$$٢م = \frac{١}{٢} \times \{ ٢ \times ٩٠ + (٢ - ١) \times (٦ - ٩٠) \}$$

$$٤م = \frac{١}{٢} \times \{ ٩ \times ٩٠ + (٩ - ١) \times (٦ - ٩٠) \}$$

$$٦٦٠ = ٥٩٤ - ٦٦$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) $١٠م$ لمتتابعة حدّها الأول ٧، وحدّها الأخير ١٣، وعدد حدودها(ب) $٤م$ لمتتابعة حدّها الأول ٥، وأساسها ٣، وحدّها الأخير ٤٤(ج) $١٢م$ لمتتابعة حدّها الأول ٦، وأساسها ٣، وعدد حدودها(د) $٣م$ من الحدّ الأول حتى الحدّ $ن$ لمتتابعة حدّها الأول ٢، وأساسها ٣

$$ل = أ + (١ - ن)د$$

بما أن عدد الحدود هو $ن$ ، أوجد قيمة التعبير بدلالة $ن$.

$$١.أ + ٢.أ + ٣.أ + \dots + ٩.أ + ١٠.أ + ١١.أ + ١٢.أ$$

المجموع المطلوب

$$٢.م$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

★ التحدي

للمتتابعة الحسابية
٩٤، ٨٩، ٨٤، ...، أوجد مجموع
الحدود الفردية من الحد الأول
حتى الحد الحادي عشر.

٢ للمتابعة الحسابية التي حدها الأول ٨ وأساسها ٢، أوجد المجموع من الحد العشرين حتى الحد الثلاثين.

تدرب

حل المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع المتتابعات الحسابية الآتية.

(أ) م للمتابعة: الحد الأول ٣، الحد الأخير ٢١، عدد الحدود ١٠

(ب) م للمتابعة: الحد الأول ٥، الحد الأخير ٣٣، عدد الحدود ٨

(ج) م للمتابعة: الحد الأول ٢، الحد الأخير ٢٩، عدد الحدود ١٠

(د) م للمتابعة: الحد الأول ٣، الأساس ٤، الحد الأخير ٧٥

(هـ) م للمتابعة: الحد الأول ٢، الأساس ٥، الحد الأخير ٥٧

(و) م للمتابعة: الحد الأول ٤، الأساس ٣، الحد الأخير ١٠٠

(ن) م: الحد الأول ١٠، الأساس ٣، عدد الحدود ١٥

(ح) م: الحد الأول ٤، الأساس ٤، عدد الحدود ١١

(ط) م: الحد الأول ٣، الأساس ٢، عدد الحدود ١٨

(ي) م من الحد الأول حتى الحد: الحد الأول ٠، الأساس ٥

(ك) م من الحد الأول حتى الحد: الحد الأول ٣، الأساس ٤

(ل) م من الحد الأول حتى الحد: الحد الأول ٤، الأساس ٢

٢ للمتابعة الحسابية ٩، -٣، ٣، ...، أوجد المجموع من الحد الحادي عشر حتى الحد العشرين.

٣ للمتابعة الحسابية التي حدها الأول -٣ وأساسها ٤، أوجد المجموع من الحد العاشر حتى الحد الخامس والعشرين.

٤ للمتابعة الحسابية ٧٤، ٦٩، ٦٤، ...، أوجد المجموع من الحد الثامن حتى الحد الثامن عشر.

مجموع المتتابعات الحسابية (٢)

(مجموع الأعداد الطبيعية)

الفصل الثاني المتتابعات

٥-٢

الرياضيات

لاحظ!

! استخدم المتتابعات الحسابية في المسائل التي تتعلق بمجاميع الأعداد الطبيعية أو المضاعفات.

! مجموع المتتابعة الحسابية من الحد الأول حتى الحد n هو: عندما يكون الحد الأول A ، والحد الأخير L ، وعدد الحدود n :

$$M_n = \frac{n(A + L)}{2}$$

وعندما يكون الحد الأول A ، والأساس d ، وعدد الحدود n :

$$M_n = \frac{n\{2A + (n-1)d\}}{2}$$

! عندما يكون عدد الحدود n مجهولاً، أوجد n أولاً باستخدام $L = A + (n-1)d$

استعد

أوجد المجاميع الآتية.

١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٠٠

٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ١٠١ إلى ٢٠٠

٣ مجموع مضاعفات العدد ٣ من بين الأعداد الطبيعية المؤلفة من رقمين.

طريقة الحل

اكتب الحدود صراحة، ثم انظر في الحد الأول والحد الأخير وعدد الحدود.

$$M_n = \frac{n(A + L)}{2}$$

يوجد ١٠٠ عدد طبيعي من ١٠١ إلى ٢٠٠

١ بما أن المجموع المطلوب هو $1 + 2 + 3 + \dots + 100$:

احسب مجموع متتابعة حسابية حدها الأول ١، وحدها الأخير ١٠٠، وعدد حدودها ١٠٠

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 100 \times \frac{1}{2} (100 + 1) = 5050$$

$$= 5050$$

٢ بما أن المجموع المطلوب هو $101 + 102 + 103 + \dots + 200$:

احسب مجموع متتابعة حسابية حدها الأول ١٠١، وحدها الأخير ٢٠٠، وعدد حدودها ١٠٠

$$101 + 102 + 103 + \dots + 200 = 100 \times \frac{1}{2} (200 + 101) = 15050$$

$$= 15050$$

نواتج التعلم

حساب الحد العام للمتتابعة الحسابية. إيجاد بعض الحدود المعيّنة في متتابعة حسابية. إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية (الأعداد الطبيعية).

٣ بما أن المجموع المطلوب هو $١٢ + ١٥ + ١٨ + \dots + ٩٩$:

احسب مجموع متتابعة حسابية حدها الأول ١٢، وأساسها ٣، وحدها الأخير ٩٩.
أوجد أولًا عدد الحدود. لتكن n عدد الحدود.

$$٩٩ = ١٢ + (n-1) \times ٣, \text{ وبحل ذلك } n = ٣٠$$

$$١٢ + ١٥ + ١٨ + \dots + ٩٩ = ٣٠ \times \frac{١}{٢} (١٢ + ٩٩)$$

$$= ١٦٦٥$$

حاول

أوجد المجاميع الآتية.

- ١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٢٠٠
- ٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ٢٠١ إلى ٣٠٠
- ٣ مجموع جميع الأعداد الطبيعية المؤلفة من رقمين والتي هي مضاعفات للعدد ٥
- ٤ مجموع جميع الأعداد الطبيعية المؤلفة من رقمين والتي يكون باقى قسمتها على ٥ يساوى ٣

تدرب

أوجد المجاميع الآتية.

- ١ مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٥٠
- ٢ مجموع الأعداد الطبيعية من ٨١ إلى ١٥٠
- ٣ مجموع الأعداد الطبيعية من ٣٠١ إلى ٤٠٠
- ٤ مجموع الأعداد الطبيعية المؤلفة من رقمين.
- ٥ مجموع الأعداد الفردية المؤلفة من رقمين.
- ٦ مجموع مضاعفات العدد ٤ من ١ إلى ١٠٠
- ٧ مجموع جميع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٠٠ التى يكون باقى قسمتها على ٤ يساوى ١
- ٨ مجموع جميع مضاعفات العدد ٦ من ١٠ إلى ١٠٠
- ٩ مجموع جميع الأعداد الطبيعية من ١٠ إلى ١٠٠ التى لا تقبل القسمة على ٦

★ التحدى

أوجد مجموع الأعداد التى لا تقبل القسمة على ٤ من ١ إلى ١٠٠

بما أن عدد الحدود n مجهول، أوجد n باستخدام $ل = أ + (ن - ١) \times د$.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

مجموع المتتابعة الحسابية (٣)

الفصل الثاني المتتابعات

٦-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

إيجاد مجموع المتتابعة الحسابية. تحديد عدد الحدود في متتابعة حسابية.

لاحظ!

مجموع المتتابعة الحسابية من الحد الأول حتى الحد n هو:

عندما يكون الحد الأول a ، والحد الأخير l ، وعدد الحدود n : $\frac{n}{2}(a + l)$

وعندما يكون الحد الأول a ، والأساس d ، وعدد الحدود n : $\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

لإيجاد أكبر قيمة لمجموع متتابعة حسابية أساسها سالب، احسب مجموع الحدود الموجبة.

مثال: متتابعة حسابية حدها الأول ١١ وأساسها -٣

١١، ٨، ٥، ٢، -١، -٤، ...

المجموع حتى هذا الحد يكون أكبر ما يمكن.

استعد

حل المسائل الآتية.

- ١ في متتابعة حسابية حدها الأول ٤ وأساسها ٣، أوجد كم حدًا من الحد الأول يكون مجموعها ٥٠
- ٢ أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية $\{a_n\}$ التي حدها الأول -٦٠ ومجموع حدودها من الحد الأول إلى الحد الخامس عشر هو -٦٠
- ٣ في متتابعة حسابية حدها الأول ٦٥ وأساسها -٤، أوجد عدد الحدود من البداية الذي يعطى أكبر مجموع. وأوجد أيضًا المجموع المقابل.

طريقة الحل

١ افترض أن مجموع الحدود من الحد الأول حتى الحد n لمتتابعة حسابية حدها الأول ٤ وأساسها ٣ يساوي ٥٠

$$\frac{1}{2}n(4 + 3n) = 50$$

$$\text{وبالتبسيط: } 3n^2 + 8n - 100 = 0$$

وبحل ذلك: $n = 5$ ، $n = -\frac{20}{3}$. وبما أن n عدد طبيعي، فإنها خمسة حدود.

٢ ليكن د أساس المتتابعة الحسابية المطلوبة.

بما أن الحد الأول ٦٠ - ومجموع الحدود حتى الحد الخامس عشر ٦٠ -:

$$60 - \frac{1}{2} \times 15 \times (60 + (15 - 1) \times d) = 60 -$$

$$\text{وبحل ذلك: } d = 8$$

$$\text{إذن الحد العام هو } 8n + 60 =$$

$$\text{وبالتبسيط: } 8n - 68 =$$

٣ الحد العام لهذه المتتابعة هو $8n - 68 = (n - 1) \times 8 + 60$

$$= -68 + 8n$$

$$\text{وبحل } -68 + 8n > 0 \text{ نجد أن } n > \frac{68}{8} = 8.5$$

أي أن الحدود من الأول حتى السابع عشر موجبة، والحدود من الثامن عشر فصاعدًا سالبة.

إذن المجموع حتى الحد السابع عشر يكون أكبر ما يمكن: الحد السابع عشر

والمجموع حينئذ هو مجموع متتابعة حسابية حدها الأول ٦٥ ، وأساسها ٤ ، وعدد حدودها ١٧ :

$$\frac{1}{2} \times 17 \times (65 + (17 - 1) \times 4) = 561$$

حاول

حل المسائل الآتية.

١ في متتابعة حسابية حدها الأول ١٧ وأساسها ٢ ، أوجد كم حدًا من الحد الأول يكون مجموعها ٦٣ -

٢ أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية { a_n } التي حدها الأول ٨ ومجموع حدودها من الحد الأول إلى الحد الثالث عشر هو ١٣٠ -

٣ في متتابعة حسابية حدها الأول ٧٠ وأساسها ٤ ، أوجد عدد الحدود من البداية الذي يعطى أكبر مجموع. وأوجد أيضًا المجموع المقابل.

٤ أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية { a_n } التي مجموع حدودها من الحد الأول إلى الحد العاشر هو ١٠ ، ومجموع حدودها من الحد الأول إلى الحد العشرين هو ٤٠

أخطاء شائعة

من $\frac{1}{2}n(4 + 3n) = 50$ أنت هنا تحل لمعرفة متى يكون **المجموع** موجبًا ($n > 0$) ، بدلًا من إيجاد الحد الذي تظل المتتابعة موجبة حتى عنده ($n > 0$) .

لإيجاد الحد العام تحتاج الحد الأول والأساس د.

أوجد إلى أي حد تظل الحدود موجبة.

أ١، أ٢، ... | أ١٧، أ١٨، أ١٩، ...
حدود موجبة | حدود سالبة

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حل قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

- ١ أوجد n بحيث يكون مجموع أول n حدًا لمتتابة حسابية حدها الأول ٣ وأساسها ٢ يساوي ٦٣
- ٢ أوجد n بحيث يكون مجموع أول n حدًا لمتتابة حسابية حدها الأول ٢٤ وأساسها -٤ يساوي -٢٨
- ٣ أوجد الحد العام للمتتابة الحسابية $\{a_n\}$ التي حدها الأول ٤ ومجموع حدودها الستة الأولى هو ١١٤
- ٤ في متتابة حدها الأول ٢٠ وأساسها -٦، أوجد قيمة n التي تعطى أكبر مجموع، والمجموع المقابل.
- ٥ في متتابة حدها الأول ١٢٦ وأساسها -١٣، أوجد قيمة n التي تعطى أكبر مجموع، والمجموع المقابل.
- ٦ أوجد الحد العام للمتتابة $\{a_n\}$ التي حدها الثالث ١٠ ومجموع حدودها العشرة الأولى ١٧٥
- ٧ أوجد الحد العام للمتتابة $\{a_n\}$ التي مجموع حدودها الستة الأولى هو ٣ ومجموع حدودها العشرة الأولى هو ٦٥
- ٨ أوجد الحد العام للمتتابة $\{a_n\}$ التي مجموع حدودها العشرين الأولى هو ٤٠٠ ومجموع حدودها الثلاثين الأولى هو ٩٠٠

★ التحدي

الحد الخامس عشر في متتابة حسابية يساوي ٣٣، والحد الخمسون يساوي ١٠٣. فما المجموع الجزئي التاسع والسبعون لهذه المتتابة الحسابية؟

تأمل

«إذا كان منسوب الماء في بحيرة ينخفض بمقدار ثابت كل يوم، فكيف يساعدنا فهم المتتابعات الحسابية على التنبؤ بموعد نفاد الماء؟»

المتتابعة الهندسية (١)

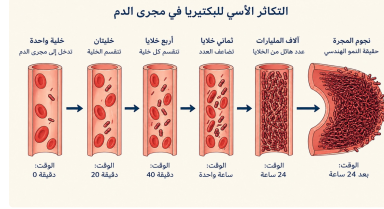
الفصل الثاني المتتابعات

٧-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

حساب الحد العام للمتتابعة الهندسية، وتعيين حدود معينة فيها.



المفهوم ٢ . المتتابعات الهندسية

تدخل بكتيريا إشريكية قولونية واحدة إلى مجرى الدم. وفي الظروف المثالية لا تنقسم إلى خليتين فحسب، بل تنقسم الخليتان إلى أربع خلايا، والأربع إلى ثمانى خلايا، فيتضاعف العدد كل ٢٠ دقيقة. وخلال ٢٤ ساعة تتكاثر تلك الخلية الواحدة إلى مستعمرة عددها آلاف المليارات من المليارات، تفوق عدد نجوم المجرة. هذه هي حقيقة النمو الهندسي.

السؤال الموجّه: كيف تتساعد العمليات ذات القيم الابتدائية الصغيرة تصاعداً سريعاً؟ وكيف نتنبأ رياضياً بآثارها التراكمى عبر الزمن؟

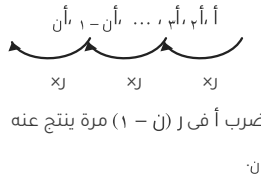
لاحظ!

المتتابعة التي نحصل على كل حد فيها بضرب الحد السابق في عدد ثابت r تُسمى **متتابعة هندسية**، ويُسمى العدد الثابت r **الأساس**.

مثال: متتابعة هندسية حدها الأول ١ وأساسها ٢

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

الحد العام للمتتابعة الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r هو $a \cdot r^{n-1}$.



استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد العام للمتتابعات الهندسية الآتية $\{a_n\}$.

(أ) الحد الأول ٢، والأساس ٣

(ب) ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ...

(ج) ٤، ٦، ٩، $\frac{27}{4}$ ، ...

٢ المتتابعة الآتية متتابعة هندسية. أوجد الأساس والعدين المناسبين فيها.

$$1, 12, 24, \dots$$

طريقة الحل

$$أ_n = أ_{n-1} \times 2$$

$$١ (أ) أ_n = أ_{n-1} \times 2$$

(ب) ليكن ر الأساس. بما أن الحد الأول ٥ والحد الثاني ١٠:

$$١٠ = ٥ر$$

$$٢ = ر$$

إذن، بما أنها متتابعة هندسية حدها الأول ٥ وأساسها ٢:

$$أ_n = ٥ \times 2^{n-1}$$

(ج) ليكن ر الأساس. بما أن الحد الأول -٤ والحد الثاني -٦:

$$-٦ = -٤ر$$

$$٣/٢ = ر$$

إذن، بما أنها متتابعة هندسية حدها الأول -٤ وأساسها -٣/٢:

$$أ_n = -٤ \left(-\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

٢ ليكن ر الأساس المطلوب.

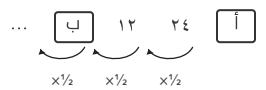
$$٢٤ = ر١٢، إذن ر = ٢$$

بما أن $\boxed{أ}$ مضروباً في $\frac{1}{2}$ يعطي ٢٤: $٢٤ \div \frac{1}{2} = ٤٨$

وبما أن ١٢ مضروباً في $\frac{1}{2}$ يعطي $\boxed{ب}$: $١٢ \times \frac{1}{2} = ٦$

إذن الأساس: $\frac{1}{2}$ ، $\boxed{أ}$: ٤٨، $\boxed{ب}$: ٦

استخدم القوسين () عندما يكون الأساس عدداً سالباً أو كسراً.



حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

- (أ) الحدّ الأول ٣، والأساس ٤
(ب) الحدّ الأول ٥، والأساس ٢
- (ج) الحدّ الأول ٨، والأساس $-\frac{1}{3}$
(د) ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...
- (هـ) ٨-، ١٢-، ١٨-، ٢٧-، ...
(و) ٢، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{9}$ ، $\frac{2}{27}$ ، ...

٢ المتتابعة الآتية متتابعة هندسية. أوجد الأساس والعدين المناسبين فيها.

$$\dots, \boxed{أ}, ١٨, ٦, \boxed{ب}, \dots$$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

- (أ) الحدّ الأول ٥، والأساس ٢
(ب) الحدّ الأول ٢، والأساس ٥
- (ج) الحدّ الأول ٧، والأساس ٤
(د) الحدّ الأول ٢، والأساس ٣
- (هـ) الحدّ الأول ٣، والأساس -٥
(و) الحدّ الأول ٤، والأساس $-\frac{1}{3}$
- (ز) الحدّ الأول ٤، والأساس $\frac{1}{3}$
(ح) الحدّ الأول ٣، والأساس $-\frac{1}{3}$
- (ط) الحدّ الأول ٦، والأساس $\frac{1}{3}$
(ي) ٣، ٦، ١٢، ٢٤، ...
- (ك) ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...
(ل) ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ...
- (م) ٤٨، ٢٤، ١٢، ٦، ...
(ن) $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{8}$ ، $\frac{9}{16}$ ، ...
- (س) $٣\sqrt{128}$ ، $٣\sqrt{16}$ ، $٣\sqrt{4}$ ، ...
(ع) ٣، $-\frac{10}{3}$ ، $-\frac{70}{4}$ ، $-\frac{370}{8}$ ، ...
- (ف) ٩، $3\sqrt{3}$ ، ٣، $\sqrt{3}$ ، ...
(ص) ٥، $-\frac{1}{3}$ ، $-\frac{2}{9}$ ، $-\frac{4}{27}$ ، ...

٢ المتتابعات الآتية متتابعات هندسية. أوجد الأساس والعدين المناسبين

$$١ \text{ و } \boxed{أ} \text{ و } \boxed{ب}.$$

- (أ) $\dots, \boxed{أ}, ٩, ٣, \dots$
(ب) $\dots, \boxed{أ}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
- (ج) $\dots, \boxed{أ}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$
(د) $\dots, \boxed{ب}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$

★ التحدي

في متتابعة هندسية تزايدية، إذا كان $أ_٣ + أ_٥ = ٨٠$ ، $أ_٤ = ٢٤$ ، فأوجد $أ_٧$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

المتتابعة الهندسية (٢)

الفصل الثاني المتتابعات

٨-٢

الرياضيات

لاحظ!

❗ الحد العام للمتتابعة الهندسية التي حدها الأول $أ$ وأساسها $ر$ هو $أر^{n-1} = أر^{١-٢}$

❗ عندما تكون المتتابعة $أ$ ، $ب$ ، $ج$ متتابعة هندسية بهذا الترتيب:

$$\underline{ب^٢ = أ ج}$$

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد العام للمتتابعات الهندسية الآتية { $أ_n$ }.

(أ) الحد الرابع ٢٤، والحد السادس ٩٦ (ب) الحد الثالث ١٢، والحد السادس ٩٦

٢ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ٢، ٨، $س$ ، متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة $س$

٣ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ٦، $أ$ ، $ب$ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوّن $أ$ ، $ب$ ، ١٦ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتي $أ$ و $ب$

طريقة الحلّ

١ (أ) ليكن الحد العام $أ_n = أر^{n-1}$

• بما أن الحد الرابع ٢٤، فإن $أ_٤ = ٢٤$ (١)

• وبما أن الحد السادس ٩٦، فإن $أ_٦ = ٩٦$ (٢)

من (١) و (٢): $أ_٦ \neq ر \cdot أ_٤$ وبقسمة (٢) على (١):

$$\frac{أ_٦}{أ_٤} = \frac{٩٦}{٢٤}$$

$$ر^٢ = ٤، إذن ر = ٢ \pm$$

من (١): عندما $ر = ٢$ ، فإن $أ_٤ = ٢٤ = أ \cdot ٢^٣$ أي $أ = ٣$

وعندما $ر = -٢$ ، فإن $أ_٤ = ٢٤ = أ \cdot (-٢)^٣$ أي $أ = -٣$

$$\underline{إذن أن = ٣ \times ٢^{n-٢} \text{ أو } = (-٣) \times (-٢)^{n-١}}$$

نواتج التعلّم

حساب الحد العام للمتتابعة الهندسية، وتعيين حدود معيّنة فيها.

$$أ_٤ = أر^٣ = ٢٤$$

$$أ_٦ = أر^٥ = ٩٦$$

اختصر الكسر.

(ب) ليكن الحد العام أن $أر^n - ١$

بما أن الحد الثالث ١٢، فإن $أر^٢ = ١٢$ (١)

وبما أن الحد السادس ٩٦، فإن $أر^٥ = ٩٦$ (٢)

من (١) و (٢): $أر^٥ \neq ٠$ ، $أر^٢ \neq ٠$ وبقسمة (٢) على (١):

$$\frac{أر^٥}{أر^٢} = \frac{٩٦}{١٢}$$

$$ر^٣ = ٨$$

وبما أن ر عدد حقيقي، فإن $ر = ٢$

وبالتعويض في (١): $أ٤ = ١٢$ ، أي $أ = ٣$

$$\text{إذن أن } ٣ \times (٢-١)^{٨-١} = ١٦$$

٢ بما أن ٢، س، ٨ تُكوّن متتابعة هندسية بهذا الترتيب، فإن $س = ١٦$

وبحلّ ذلك: س = ١٦

٣ بما أن ٦، أ، ب تُكوّن متتابعة حسابية بهذا الترتيب، فإن $أ٢ = ٦ + ب$ (١)

وبما أن أ، ب، ١٦ تُكوّن متتابعة هندسية بهذا الترتيب، فإن $ب٢ = ١٦$ (٢)

من (١): $ب = ٢ - أ$ (١) وبالتعويض في (٢) والتبسيط: $أ٤ - ٤٠ + ٣٦ = ٠$

وبحلّ ذلك: $أ = ٩$ ، ٩

ومن (١): عندما $أ = ٩$ يكون $ب = ١٢$ ؛ وعندما $أ = ١$ يكون $ب = ٤$

$$\text{إذن } ٩ = أ، ١٢ = ب \text{ أو } ١ = أ، ٤ = ب$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحد العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحد الثالث ١٨، والحد الخامس ١٦٢

(ب) الحد الثاني ٦، والحد الخامس ٤٨

(ج) الحد الثالث ١٢، والحد السابع ١٩٢

٢ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ١، س، ١٢ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٣ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ٢، أ، ب متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوّن أ، ب، ١٨ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتي أ وب

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدّ العام للمتتابعات الهندسية الآتية {أن}.

(أ) الحدّ الثاني ٦، والحدّ الرابع ٥٤

(ب) الحدّ الثالث ٢٧، والحدّ الخامس ٢٤٣

(ج) الحدّ الثالث ٢٨، والحدّ الخامس ١١٢

(د) الحدّ الثاني ١٤، والحدّ الخامس ١١٢

(هـ) الحدّ الرابع ١٦، والحدّ السابع ١٢٨

(و) الحدّ الثالث ٢٠، والحدّ السادس ١٦٠

(ز) الحدّ الثاني ٣، والحدّ السادس ٧٦٨

(ح) الحدّ الثالث ٩، والحدّ السابع $\frac{729}{16}$

(ط) الحدّ الرابع $\frac{2}{9}$ ، والحدّ الثامن ١٨

٢ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة ١، ٥، ٢٥ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٣ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة $\frac{1}{3}$ ، ٨، ٨ متتابعة هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمة س

٤ عندما تُكوّن الأعداد الثلاثة أ، ب، ٢ متتابعة حسابية بهذا الترتيب، وتُكوّن أ، ٢، ب متتابعة

هندسية بهذا الترتيب، أوجد قيمتي أ وب

★ التحدي — ميزانية مبادرة الطاقة الخضراء

تخطّط إدارة الاستدامة في إحدى الشركات لميزانية ثلاثية السنوات للتخلّص التدريجي من الوقود الأحفوري. وهي تتابع مخصّصات التمويل السنوية عبر ثلاث مراحل متتالية، وفق نموذجين اقتصاديين مختلفين:

النموذج ١ (توسّع خطّي): في الظروف المستقرّة، يكون تمويل السنة الأولى محدودًا عند ٥٠ مئة ألف جنيه (دين البنية التحتية الابتدائي)، تليه السنة الثانية أ والسنة الثالثة ب. وهذه الأعداد الثلاثة تُكوّن متتابعة حسابية.

النموذج ٢ (تدرّج تراكمي): إذا حدث اختراق في الطاقة النظيفة، تتغيّر الميزانية، فتُكوّن مخصّصات السنة الثانية أ، والسنة الثالثة ب، وميزانية سنة رابعة مُتوقّعة قدرها ٤٠ مئة ألف جنيه متتابعة هندسية. حدّد قيمتي الميزانية بالضبط لأ (السنة الثانية) وب (السنة الثالثة) بحيث يتحقّق النموذجان معًا في الوقت نفسه، لتنتقل الشركة انتقاليًا سلسًا.

مجموع المتتابة الهندسية (١)

الفصل الثاني المتتابعات

٩-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

حساب مجموع متتابة هندسية مؤلفة من n حدًا.

القانون الذي يُستعمل عندما يكون الأساس r أصغر من ١

القانون الذي يُستعمل عندما يكون الأساس r أكبر من ١

لاحظ!

مجموع المتتابة الهندسية من n التي حدها الأول a وأساسها r ، من الحد الأول حتى الحد n ، هو:
عندما $r \neq 1$:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع M للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحد الأول ٤، والأساس ٣، وعدد الحدود ٥

(ب) الحد الأول ٨، والأساس $\frac{1}{3}$ ، وعدد الحدود ٦

٢ أوجد المجموع M_n من الحد الأول حتى الحد n للمتتابة الهندسية الآتية.

٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...

طريقة الحلّ

١ (أ) بما أن $a = 4$ ، $r = 3$ ، $n = 5$:

$$S_5 = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{4(243 - 1)}{2} = 484$$

(ب) بما أن $a = 8$ ، $r = \frac{1}{3}$ ، $n = 6$:

$$S_6 = \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8\left(1 - \frac{1}{729}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{8 \cdot \frac{728}{729} \cdot \frac{3}{2}}{1} = \frac{32 \cdot 728}{729} = \frac{23456}{729}$$

$$= \frac{23456}{729}$$

٢ بما أن $a = 2$ ، $r = 3$:

$$M_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2(3^n - 1)}{2} = 3^n - 1$$

بما أن الأساس r أكبر من ١،
استعمل $M_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

بما أن الأساس r أصغر من ١،
استعمل $M_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

اضرب البسط والمقام في ٢

بما أن الأساس r أصغر من ١،
استعمل $M_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع m للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدّ الأول ٣، والأساس ٢، وعدد الحدود ٥

(ب) الحدّ الأول ٦، والأساس -٢، وعدد الحدود ٤

(ج) الحدّ الأول ٦، والأساس $\frac{1}{3}$ ، وعدد الحدود ٦٢ أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ n للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدّ الأول ٣، والأساس -٢

(ب) ٨، -٤، ٢، -١، ...

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع m للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدّ الأول ٥، والأساس ٣، وعدد الحدود ٤

(ب) الحدّ الأول ١، والأساس -٣، وعدد الحدود ٤

(ج) الحدّ الأول ١، والأساس $\frac{1}{3}$ ، وعدد الحدود ٣

(د) الحدّ الأول ٣، والأساس ٢، وعدد الحدود ١٠

(هـ) الحدّ الأول ٢، والأساس -٣، وعدد الحدود ٦

(و) الحدّ الأول ١، والأساس $\frac{1}{3}$ ، وعدد الحدود ٨٢ أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ n للمتتابعات الهندسية الآتية.

(أ) الحدّ الأول ٧، والأساس ٢

(ب) الحدّ الأول ٢، والأساس $\frac{1}{3}$

(ج) ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...

(د) ١، -٣، ٩، -٢٧، ...

(هـ) الحدّ الأول ٤، والأساس ٢

(و) الحدّ الأول ١٦، والأساس $-\frac{1}{3}$

(ز) ١، -٢، ٤، -٨، ...

★ التحدي

تُصمّم شركة للتقنيات البيئية مرشّحات ماء متتالية، يحتجز كلُّ مرحلة منها ثلث ما تبقى من اللدائن الدقيقة مقارنةً بالمرحلة السابقة. ويتدرّج مقياس الترشيح تدريجًا هندسيًّا: ١، ٣، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{9}$ ، ... ملجم/لتر مُزالة في كل مرحلة. احسب الكتلة الكليّة للملوّثات المُزالة إذا كان النظام يستعمل ٤ مراحل ترشيح في المجموع.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

مجموع المتتابة الهندسية (٢)

الفصل الثاني المتتابعات

١٠-٢

الرياضيات

استعدّ

ناتج التعلّم

حساب الحدّ العام للمتتابة الهندسية، وإيجاد حدود معيّنة فيها، وكذلك مجموع حدودها كلّها أو بعضها.

أوجد الحدّ الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث يساوي ٣٥، والمجموع من الحدّ الثالث حتى الحدّ الخامس يساوي ١٤٠

٢ المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث يساوي ٢١، والمجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ السادس يساوي ١٨٩

٣ الحدّ الثالث ٤، والمجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ الثالث يساوي ٧

طريقة الحلّ

١ ليكن أ الحدّ الأول ور الأساس.

بما أن المجموع من الحدّ الأول حتى الثالث ٣٥، فإن $أ + أر + أر^2 = ٣٥$ (١)

وبما أن المجموع من الحدّ الثالث حتى الخامس ١٤٠، فإن $أر^3 + أر^4 + أر^5 = ١٤٠$ (٢)

من (٢): $أ(أر^3 + أر^4 + أر^5) = ١٤٠$

وبالتعويض بـ (١): $١٤٠ = ٣٥ر$

وبحلّ ذلك: $ر = ٤$

عندما $ر = ٤$ ، من (١): $أ + ٤أ + ١٦أ = ٣٥$ ، وبحلّ ذلك $أ = ٥$

وعندما $ر = ٤$ ، من (١): $أ - ٤أ + ١٦أ = ٣٥$ ، وبحلّ ذلك $أ = \frac{٣٥}{١٢}$

إذن $أ = ٥$ ، $ر = ٤$ أو $أ = \frac{٣٥}{١٢}$ ، $ر = ٤$

٢ ليكن أ الحدّ الأول ور الأساس.

بما أن المجموع من الحدّ الأول حتى الثالث ٢١، فإن $أ + أر + أر^2 = ٢١$ (١)

وبما أن المجموع من الحدّ الأول حتى السادس ١٨٩، فإن $أ + أر + أر^2 + أر^3 + أر^4 + أر^5 = ١٨٩$ (٢)

من (٢): $أ(أ + أر + أر^2 + أر^3 + أر^4 + أر^5) = ١٨٩$

وبالتعويض بـ (١): $١٨٩ = ٢١ر$

وبحلّ ذلك في مجموعة الأعداد الحقيقية: $ر = ٩$

من (١): $أ + ٩أ + ٨١أ = ٢١$ ، وبحلّ ذلك $أ = \frac{٢١}{٩١}$ ، إذن $أ = \frac{٢١}{٩١}$ ، $ر = ٩$

حوّلها إلى صورة يمكن التعويض فيها بـ (١).

حوّلها إلى صورة يمكن التعويض فيها بـ (١).

٣ ليكن الحد الأول، r الأساس.

بما أن الحد الثالث 4 ، فإن $Ar^2 = 4$ (١)

وبما أن المجموع من الحد الأول حتى الثالث 7 ، فإن $A + Ar + Ar^2 = 7$ (٢)

وبما أن $r \neq 0$ ، فمن (١): $A = \frac{4}{r^2}$

وبالتعويض في (٢): $\frac{4}{r^2} + r \times \frac{4}{r^2} + r \times \frac{4}{r^2} = 7$

$$4 + 4r + 4r^2 = 7r^2$$

وبحل ذلك: $r = 2$ ، $r = \frac{2}{3}$

عندما $r = 2$ ، من (١): $A = \frac{1}{4}$ ، وبحل ذلك $A = \frac{1}{4}$

وعندما $r = \frac{2}{3}$ ، من (١): $A = \frac{9}{4}$ ، وبحل ذلك $A = \frac{9}{4}$

إذن $A = \frac{1}{4}$ ، $r = 2$ أو $A = \frac{9}{4}$ ، $r = \frac{2}{3}$

حاول

أوجد الحد الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 21 ، والمجموع من الحد الثالث حتى الخامس يساوي 84

٢ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 26 ، والمجموع من الحد الأول حتى السادس يساوي 728

٣ الحد الثاني 3 ، والمجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 13

تدرب

أوجد الحد الأول والأساس للمتتابعات الهندسية الآتية.

١ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 9 ، والمجموع من الحد الرابع حتى السادس يساوي 72

٢ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 9 ، والمجموع من الحد الثالث حتى الخامس يساوي 36

٣ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 78 ، والمجموع من الحد الثالث حتى الخامس يساوي 702

٤ مجموع الحد الأول والحد الثاني يساوي 3 ، والمجموع من الحد الأول حتى الرابع يساوي 51

٥ المجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي 65 ، والمجموع من الحد الأول حتى السادس يساوي 1820

اضرب الطرفين في r

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حل قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

- ٦ مجموع الحد الأول والحد الثاني يساوي ٨٠، والمجموع من الحد الأول حتى الرابع يساوي ٨٠٠
- ٧ الحد الثاني ٦، والمجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي ٢١
- ٨ الحد الثالث ١٢، والمجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي ٩
- ٩ الحد الثالث ٢٠، والمجموع من الحد الأول حتى الثالث يساوي ٣٥

★ التحدي

إذا كانت من مجموع أول n حدًا من متتابة هندسية، وكان $m = ٢٥٥$ ، $m = ٦٣$ ،
 $٨ - أ = ٧$ ، $٦٤ = ٧$ ، فأوجد ١

تأمل

كيف يُغيّر تغيير الأساس r من قيمة أكبر من ١ إلى قيمة بين ٠ و ١ تغييرًا جوهريًا السلوك
 الواقع الذي تُتمدجه المتتابة الهندسية؟

رمز التجميع 3 (١)

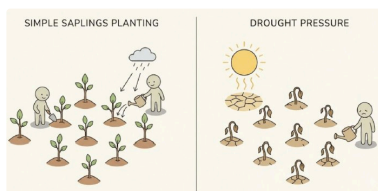
الفصل الثاني المتتابعات

١١-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

استعمال رمز التجميع في التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها في متتابعات مختلفة.



المفهوم ٣ . التجميع

في علم الأحياء البيئي، يتبع تعافى الغابات نمطًا رياضيًا ذا قوتين. فبعد حريق غابة، يزرع المحافظون على البيئة ٢٠٠ شتلة. ولتسريع الاستعادة يونسعون جهودهم، فيضيفون ١٠٠ شتلة إلى الحصة كل عام تالي (تزايد خطي، متتابعة حسابية: ٢٠٠، ٣٠٠، ٤٠٠، ...). وفي الوقت نفسه تفرض الضغوط الطبيعية كالجفاف ثمنها: إذ لا ينجو إلا ٦٠٪ من الأشجار من عام إلى الذي يليه (اضمحلال أسي، متتابعة هندسية أساسها ٠.٦).

وحساب مجموع الأشجار الباقية بعد عقد كامل يقتضى تتبّع كيف تضمحلّ دورة الزراعة المتوسّعة في كل عام اضمحلالاً مستمرًا. والرياضيات تُبسّط هذه العملية المتداخلة برمز التجميع، فتُتيح إطارًا موحّدًا لتحليل النمو الخطي والاضمحلال الأسي معًا.

السؤال الموجّه: كيف تُبسّط العمليات على المتتابعات — خضرب الحدود أو جمع المجاميع المتداخلة — للوصول إلى قانون جبري واضح؟

لاحظ!

١! لمتتابعة حدّها ن (الحدّ العام) هو أن، يُعبّر عن المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن بالصورة

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

مثال: $\sum_{k=1}^4 7k = 7 + 14 + 21 + 28$

مثال: المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ الثامن لمتتابعة حدّها ن (الحدّ العام) هو ٣ن:

$$\sum_{k=1}^8 3k$$

المجموع من الحدّ الأول حتى الرابع لمتتابعة حدّها العام ٧ن.

غيّر ن إلى ك

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١! اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام $\sum$

(أ) $\sum_{k=1}^5 2k$ (ب) $\sum_{k=1}^3 (k^2 - 3)$ (ج) $\sum_{k=1}^4 3k$ (د) $\sum_{k=1}^3 2$

٢! عبّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع $\sum$

(أ) $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)$ (ب) $26 + 27 + 28 + \dots + 105$

طريقة الحل

(أ) عوّض بك = ١، ٢، ٣، ٤، ٥ في $\sum_{k=1}^2$ واكتبها حدودًا في مجموع.

$$\sum_{k=1}^2 2k = 2 + 4 = 6$$

(ب) عوّض بك = ١، ٢، ٣ في $\sum_{k=1}^3$ واكتبها حدودًا في مجموع.

$$\sum_{k=1}^3 (3 - k) = 3 - 1 + 3 - 2 + 3 - 3 = 3$$

(ج) عوّض بك = ١، ٢، ٣، ٤ في $\sum_{k=1}^3$ واكتبها حدودًا في مجموع.

$$\sum_{k=1}^4 3k = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$$

(د) المتتابة التي حدّها ن يساوي ٢ هي ٢، ٢، ٢، ...

$$\sum_{k=1}^3 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

(أ) في المسائل التي يكون فيها الحد الأخير معبّرًا عنه بدلالة ن، غيّر ن إلى ك فقط واكتبها داخل $\sum$

(أسفل $\sum$ يُكتب ك = ١، وأعلى ن)

$$\sum_{k=1}^n (1 - k)$$

(ب) للتعبير برمز $\sum$ تحتاج الحد العام أن ورقم الحد الأخير.

أوجد الحد العام أولًا: الحد العام هو أن = (٥ + ن) ٢

ثم أوجد رقم الحد الأخير: ١٥ هو الحد العاشر. إذن

$$\sum_{k=1}^{10} 2(5 + k)$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام $\sum$

$$(أ) \sum_{k=1}^6 (1 + 2k) \quad (ب) \sum_{k=1}^3 (3k^2 + 2) \quad (ج) \sum_{k=1}^4 2k \quad (د) \sum_{k=1}^6 3$$

٢ عبّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع $\sum$

$$(أ) ٥ + ٨ + ١١ + ... + (٣ + ٢)$$

(ب) المجموع من الحد الأول حتى الحد ن للمتتابة أن = ٢ + ن + ١

$$(ج) ٢٤ + ٢٥ + ٢٦ + ... + ٢١٣$$

$$(د) ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٢٩$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ اكتب مجاميع المتتابعات الآتية على صورة مجموع حدود دون استخدام Σ

(د) $\sum_{k=1}^4 k^2$	(ج) $\sum_{k=1}^3 (3 - k^2)$	(ب) $\sum_{k=1}^4 (4 - k^2)$	(أ) $\sum_{k=1}^3 k^3$
(ح) $\sum_{k=1}^3 (3 + k^5)$	(ز) $\sum_{k=1}^3 k^3$	(و) $\sum_{k=1}^4 (k^2 - 2k)$	(هـ) $\sum_{k=1}^3 (3 + k^2)$
(ي) $\sum_{k=1}^4 k$	(ك) $\sum_{k=1}^3 k$	(س) $\sum_{k=1}^4 k$	(ط) $\sum_{k=1}^4 (3 - k^2)$

٢ عبّر عن التعبيرات الآتية باستخدام رمز التجميع Σ

(أ) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$	(ب) $1 + 7 + 25 + \dots + (3n - 2)$	(ج) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$
(د) مجموع n حدًا الأولى للمتتابعة $1 - 7 - 13 - 19 - \dots$	(هـ) مجموع n حدًا الأولى للمتتابعة $5 + 11 + 17 + 23 + \dots$	(و) مجموع n حدًا الأولى للمتتابعة $3 - 2 - 1 - 0 - 1 - 2 - 3 - \dots$
(ز) $27 + 28 + 29 + \dots + 221$	(ح) $7 + 13 + 19 + \dots + 218$	(ط) $10 + 11 + 12 + \dots + 220$
(س) $8 + 16 + 24 + \dots + 56$	(ك) $7 + 13 + 19 + \dots + 73$	(ي) $4 + 9 + 14 + \dots + 119$

★ التحدي

شركة ناشئة في التقنيات الخضراء توسّع شبكتها من محطات الشحن العاملة بالطاقة الشمسية في منطقة حضرية. تُركّب الشركة لوّحًا شمسيًا واحدًا في (الأسبوع ١)، و في (الأسبوع ٢)، و في (الأسبوع ٣)، و لوّحًا في (الأسبوع ٤). اكتب تعبيرًا رياضيًا واحدًا باستخدام رمز التجميع يُمثّل مجموع الألواح المُركّبة تراكميًا من الأسبوع ١ حتى الأسبوع ٤.

رمز التجميع Σ (٢)

الفصل الثانى المتتابعات

١٢-٢

الرياضيات

لاحظ!

! قوانین رمز التجميع Σ

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad (ج ثابت)$$

$$\sum_{k=1}^n (1 + n) = n(1 + n)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

! خواص رمز التجميع Σ (حيث c ثابت لا يعتمد على k)

$$\sum_{k=1}^n c = cn \quad \text{مثال:} \quad \sum_{k=1}^n 5 = 5n$$

$$\sum_{k=1}^n (a + b) = \sum_{k=1}^n a + \sum_{k=1}^n b \quad \text{مثال:} \quad \sum_{k=1}^n (4 + 2k) = \sum_{k=1}^n 4 + \sum_{k=1}^n 2k$$

$$\sum_{k=1}^n (a - b) = \sum_{k=1}^n a - \sum_{k=1}^n b \quad \text{مثال:} \quad \sum_{k=1}^n (3 - 2k) = \sum_{k=1}^n 3 - \sum_{k=1}^n 2k$$

استعد

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \sum_{k=1}^n (3 - k) \quad (ب) \sum_{k=1}^n (4 + k)$$

$$(ج) 1 \times 3 + 2 \times 8 + 3 \times 13 + \dots + n(2n - 1)$$

$$(د) \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

طريقة الحل

$$(أ) \sum_{k=1}^n (3 - k) = 3n - \sum_{k=1}^n k$$

$$(ب) \sum_{k=1}^n (4 + k) = 4n + \sum_{k=1}^n k$$

$$= 4n + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 4n + \frac{n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{8n + n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + 9n}{2}$$

نواتج التعلم

استعمال رمز التجميع فى التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها فى متتابعات مختلفة.

لا تفك الأقواس: أخرج الكسر والعامل المشترك.

$$(ج) ١ \times ٣ + ٢ \times ٨ + ٣ \times ١٣ + \dots + (٥ - ٢) \times ٢$$

اكتبها برمز التجميع Σ

$$\sum_{k=1}^n (٥ - ٢) \times ٢ =$$

افكك التعبير داخل التجميع.

$$\sum_{k=1}^n (٥ \times ٢ - ٢ \times ٢) =$$

$$٥ \times \sum_{k=1}^n ٢ - ٢ \times \sum_{k=1}^n ٢ =$$

لا تفك الأقواس: أخرج الكسر والعامل المشترك.

$$٥ \times ٢ \times \sum_{k=1}^n ١ - ٢ \times (١ + ٢ + \dots + ٢) =$$

$$= ١٠ \times \frac{n(n+1)}{2} - ٢ \times \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{10n(n+1) - 2n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{8n(n+1)}{2} = 4n(n+1)$$

$$(د) \sum_{k=1}^4 (٢ - ١) =$$

عوّض بـ n في القانون.

$$= \sum_{k=1}^4 ٢ - \sum_{k=1}^4 ١ =$$

$$= ٢ \times ٤ - ١ \times ٤ = ٨ - ٤ = ٤$$

$$= ٤$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \sum_{k=1}^3 ٣$$

$$(ب) \sum_{k=1}^n (٣ - ٢) =$$

$$(ج) \sum_{k=1}^n (١ - ٣) =$$

$$(هـ) \sum_{k=1}^n (٣ - ٢) =$$

$$(د) ١ \times ٣ + ٢ \times ٥ + ٣ \times ٧ + \dots + (٢ + ١) \times ١$$

تدرب

أوجد المجاميع الآتية.

- (أ) $\sum_{k=1}^n 6$ (ب) $\sum_{k=1}^n (-4)$ (ج) $\sum_{k=1}^n 1$
- (د) $\sum_{k=1}^n (4k - 1)$ (هـ) $\sum_{k=1}^n (3k + 2)$ (و) $\sum_{k=1}^n (6k - 3)$
- (ز) $\sum_{k=1}^n k(2 - k)$ (ح) $\sum_{k=1}^n k(2k - 2)$ (ط) $\sum_{k=1}^n (1 - k)^2$
- (م) $\sum_{k=1}^{20} (2k - 7)$ (ن) $\sum_{k=1}^8 (4k + 5)$ (س) $\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$
- (ي) $1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \dots + n(n+3)$
- (ك) $1 \times 5 + 2 \times 8 + 3 \times 11 + \dots + n(3n+2)$
- (ل) $2 \times 5 + 3 \times 6 + 4 \times 7 + \dots + (n+1)(1+n)$

★ التحدي

أوجد المجموع الآتي:

$$\sum_{i=2}^8 (2^i + 2 + 5)$$

رمز التجميع Σ (٣)

الفصل الثاني المتتابعات

١٣-٢

الرياضيات

لاحظ!

! قوانين رمز التجميع Σ

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} (1+n) \right\} = \frac{1}{2} (1+n) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

! مجموع المتتابعة الهندسية

$\sum_{k=1}^n r^{k-1}$ أرك r هو المجموع من الحد الأول حتى الحد n لمتتابعة هندسية حدها الأول 1 وأساسها r . إذن:

$$\text{عندما } r > 1: \sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\text{وعندما } r < 1: \sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

! المتتابعة المُعَبَّر عنها بأن $r^{k-1} = 1 \times r^{k-1}$ يمكن كتابتها أن $1 \times r^{k-1}$ فهي متتابعة هندسية حدها الأول 1 وأساسها r .

مثال: أن $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ الحد الأول: 1 ، الأساس: -1

! والمتتابعة المُعَبَّر عنها بأن $r^k = 1 \times r^k$ يمكن كتابتها أن $1 \times r^k$ فهي متتابعة هندسية حدها الأول r وأساسها r .

مثال: أن $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ الحد الأول: 1 ، الأساس: -1

استعدّ

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \sum_{k=1}^n (1+k)^2 \quad (ب) \sum_{k=1}^n 2 \times (-3)^{k-1} \quad (ج) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

طريقة الحلّ

$$(أ) \sum_{k=1}^n (1+k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (1^2 + 2k + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (1 + 2k + k^2) = \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

نواتج التعلّم

استعمال رمز التجميع في التعبير عن المتتابعات الرياضية وحساب قيمها في متتابعات مختلفة.

تذكّر أنها «مرئع» $\sum_{k=1}^n$.

افكك التعبير داخل التجميع.

لا تفك الأقواس: أخرج الكسر والعامل المشترك.

حلّ إلى عوامل إن أمكن.

الحذ الأول: ٢. الأساس: ٣-

$$\bullet \sum_{k=1}^n (3-k) \times 2 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\{n(3-1)-1\}2}{2} = \frac{\{n(3-1)-1\}2}{(3-1)-1} =$$

$$\frac{n(3-1)-1}{2} =$$

$$\sum_{k=1}^n 2 \quad (\text{ج})$$

اكتبها على الصورة أرن-١.

$$\bullet \sum_{k=1}^n 2 \times 4 \times 1 - 1 =$$

الحذ الأول: ٤. الأساس: ٤

$$\bullet \frac{(1-n)4}{1-4} =$$

$$\frac{(1-n)4}{3} =$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

حاول

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \sum_{k=1}^n k^2 (k-2)$$

$$(ب) \sum_{k=1}^n 4(1-k)$$

$$(ب) \sum_{k=1}^n 3 \times (2-k) - 1$$

$$(د) \sum_{k=1}^n (5-k)$$

تدرّب

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \sum_{k=1}^n k(2-k)$$

$$(ب) \sum_{k=1}^n k^2 (k+2)$$

$$(ج) \sum_{k=1}^n k(2+k)$$

$$(د) \sum_{k=1}^n k^2 (3-k)$$

$$(هـ) \sum_{k=1}^n 6 \times 3 - k$$

$$(و) \sum_{k=1}^n 2 \times (1-k) - 1$$

$$(ز) \sum_{k=1}^n 4 \times 2 - k - 1$$

$$(ح) \sum_{k=1}^n 8 \times (3-k) - 1$$

$$(ط) \sum_{k=1}^n 3 - k - 1$$

$$(ي) \sum_{k=1}^n (2-k) - k - 1$$

$$(ك) \sum_{k=1}^n (2-k) - k - 1$$

$$(ل) \sum_{k=1}^n 3 - k - 1$$

$$(م) \sum_{k=1}^n (3-k)$$

$$(ن) \sum_{k=1}^n 2 - k$$

$$(س) \sum_{k=1}^n 2 - k$$

$$(ع) \sum_{k=1}^n (3-k)$$

★ التحدي

أوجد المجموع الآتي:

$$\sum_{n=2}^9 (2n + 7)$$

مجموع المتتابعات الكسرية

الفصل الثاني المتتابعات

١٤-٢

الرياضيات

لاحظ!

خطوات إيجاد مجموع المتتابعات الكسرية

١ حوّل كل حدّ باستخدام القانون الآتي:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} \quad \text{مثال: } \frac{1}{\frac{1}{10} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{40}} = 40$$

٢ اختصر الحدود التي مجموعها صفر، واحسب الباقي.

٣ للمتتابعات التي تحوي $\sqrt{\quad}$ في المقام، اجعل المقام نسبيًا أولًا.٤ وعندما يُعبّر عن مجموع متتابعة فيها كسور أو $\sqrt{\quad}$ برمز التجميع Σ ، أعد كتابته على صورة مجموع حدود.

استعدّ

أوجد المجاميع الآتية.

$$\frac{1}{(2+n^3)(1-n^3)} + \dots + \frac{1}{11 \times 8} + \frac{1}{8 \times 5} + \frac{1}{5 \times 2} \quad (\text{أ})$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{k}} + \frac{1}{2+\sqrt{k}} \quad \sum_{k=1}^n \quad (\text{ب})$$

طريقة الحلّ

حوّل كل حدّ باستخدام القانون.

أخرج $\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ عاملًا مشتركًا.

اختصر الحدود التي مجموعها صفر، واحسب الباقي.

اجعل المقام نسبيًا أولًا.

أعد كتابته على صورة مجموع حدود.

اختصر الحدود التي مجموعها صفر، واحسب الباقي.

$$\frac{1}{(2+n^3)(1-n^3)} + \dots + \frac{1}{11 \times 8} + \frac{1}{8 \times 5} + \frac{1}{5 \times 2} \quad (\text{أ})$$

$$\left(\frac{1}{2+n^3} - \frac{1}{1-n^3} \right) \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{8} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} =$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2+n^3} - \frac{1}{1-n^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{1}{2} =$$

$$\left(\frac{1}{2+n^3} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} =$$

$$\frac{n}{(2+n^3)2} =$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{k}} + \frac{1}{2+\sqrt{k}} \quad \sum_{k=1}^n \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1+\sqrt{k} - 2+\sqrt{k}}{(1+\sqrt{k} - 2+\sqrt{k})(1+\sqrt{k} + 2+\sqrt{k})} \quad \sum_{k=1}^n =$$

$$\frac{1+\sqrt{k} - 2+\sqrt{k}}{(1+k) - (2+k)} \quad \sum_{k=1}^n =$$

$$\frac{(1+\sqrt{k} - 2+\sqrt{k})}{1+k} \quad \sum_{k=1}^n =$$

$$(1+\sqrt{1} - 2+\sqrt{1}) + \dots + (\cancel{3} - \cancel{2}) + (\cancel{4} - \cancel{3}) + (\cancel{5} - \cancel{4}) + (\cancel{6} - \cancel{5}) = 3 - 2 = 1$$

حاول

أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \quad \frac{1}{(2+n)(1+n)} + \dots + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2}$$

$$(ب) \quad \frac{1}{(1+n^3)(1-n^2)} + \dots + \frac{1}{7 \times 6} + \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{5 \times 4}$$

$$(ج) \quad \frac{1}{(5+n)(3+n)} + \dots + \frac{1}{8 \times 7} + \frac{1}{7 \times 6} + \frac{1}{6 \times 5}$$

$$(د) \quad \frac{1}{\sqrt{k} + 1 + \sqrt{k}} \sum_{k=1}^n$$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \quad \frac{1}{(1+n)n} + \dots + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$$

$$(ب) \quad \frac{1}{(2+n^2)n^2} + \dots + \frac{1}{8 \times 7} + \frac{1}{7 \times 6} + \frac{1}{6 \times 5}$$

$$(ج) \quad \frac{1}{(2+n)n} + \dots + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2}$$

$$(د) \quad \frac{1}{1 - \sqrt{k} + \sqrt{k}} \sum_{k=1}^n$$

$$(هـ) \quad \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

٢ أوجد المجاميع الآتية.

$$(أ) \quad \frac{1}{(3+n)(2+n)} + \dots + \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3}$$

$$(ب) \quad \frac{1}{(1+n^3)(2-n^3)} + \dots + \frac{1}{10 \times 9} + \frac{1}{9 \times 8} + \frac{1}{8 \times 7}$$

$$(ج) \quad \frac{1}{(4+n^3)(2-n^3)} + \dots + \frac{1}{13 \times 12} + \frac{1}{12 \times 11} + \frac{1}{11 \times 10}$$

$$(د) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{k} + 1 - \sqrt{k}} \sum_{k=1}^n$$

$$(هـ) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1} + \sqrt{2}}$$

★ التحدي

أوجد بالخطوات:

$$\frac{1}{(2+2)^2} \sum_{k=2}^{30}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

مجموع
(متتابعة حسابية) × (متتابعة هندسية)

الفصل الثاني المتتابعات

لاحظ!

! لإيجاد المجموع M ل (متتابعة حسابية) $\times$ (متتابعة هندسية بالأساس r)، استخدم $M - rM$

استعد

أوجد المجموع الآتي M .

$$M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1})$$

طريقة الحل

المجموع المطلوب إيجاده هو مجموع (متتابعة حسابية بالحد الأول ٣ والأساس ٢) $\times$ (متتابعة هندسية بالحد الأول ١ والأساس ٣).

$$M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1})$$

اضرب طرفي المعادلة في الأساس ٣ للمتتابعة الهندسية.

$$3M = 3 \times 3 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + 9 \times 11 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})$$

اطرح طرفي المعادلتين.

$$M - 3M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$-2M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$-2M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$-2M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$-2M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$-2M = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})]$$

$$M = 3 \times n$$

حاول

أوجد المجموع الآتي M .

$$M = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots + (1 + n) \times (1 - 3^{n+1})$$

ناتج التعلم

يوجد مجموع حاصل ضرب
متتابعة حسابية في متتابعة
هندسية.

أخطاء شائعة

$$\begin{aligned} &+ 2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) \\ &- 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})] \\ &= 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})] \\ &= 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})] \\ &= 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+1}) - 3 \times [1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 9 + \dots + (1 + 2n) \times (1 - 3^{n+2})] \end{aligned}$$

لقد نسيت تغيير إشارة الحد
الأخير إلى السالب عند طرح $3M$
من M .

استخدم $M - rM$.

اكتب المعادلات بحيث تتوافق
قوى الأساس عمودياً.

أضف حدوداً لتسهيل عملية
الطرح.

المجموع من الحد الثاني إلى الحد
ن لمتتابعة هندسية بالحد الأول ٢
والأساس ٣. (المجموع من الحد
الأول إلى الحد ن) - (الحد الأول)

اقسم طرفي المعادلة على -2
(انتبه إلى الإشارة).

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حل قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

تدرب

أوجد المجاميع الآتية م.

$$١ = م \quad ١ \quad ١ \times ١ + ٢ \times ٢ + ٣ \times ٣ + ٤ \times ٤ + \dots + ن \times ٢ - ١$$

$$٢ = م \quad ٢ \quad ١ \times ٣ + ٣ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٥ \times ٧ + \dots + (١ - ٢) \times ٣$$

★ التحدي

أوجد المجموع الآتي ٥ ، ٥ + ٩ ، ٥ + ٩ + ١٣ ، ٥ + ٩ + ١٣ + ١٧ ، ... (١ + ك) +

متابعة حذها العام مجموع

الفصل الثاني المتتابعات

١٦-٢
الرياضيات

لاحظ!

احسب الحد رقم ك في متتابعة يُعبّر عن كل حدّ فيها بصورة مجموع باستخدام رمز التجميع Σ .

استعدّ

حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ٣ ، ٥ + ٣ ، ٧ + ٥ + ٣ ، ٩ + ٧ + ٥ + ٣ ، ...

(أ) أوجد الحد رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحد الأول حتى الحد ن.

طريقة الحلّ

أنشئ قانوناً مع مراعاة الانتظام.

احسب باستخدام رمز التجميع Σ .

بما أنها المجموع من الحد الأول إلى الحد ك، نستخدم المتغيّر.

ضع أن داخل Σ من $\sum_{k=1}^n$ أن

(أ) الحد رقم ك في هذه المتتابعة هو:

$$أ\text{ن} = ٣ + ٥ + ٧ + \dots + (٢ + ك١)$$

$$= \sum_{i=1}^k (٢ + ١)$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} (١ + ك١) + ك$$

حساب ذلك يعطى أن $ك(٢ + ١)$

(ب) من (أ)، المجموع من الحد الأول حتى الحد ن هو:

$$م\text{ن} = \sum_{k=1}^n ك(٢ + ١)$$

$$= \sum_{k=1}^n (٢ + ١)ك = \frac{١}{٢} (١ + ن) (١ + ٢ن) + ٢ \times \frac{١}{٢} (١ + ن) =$$

حساب ذلك يعطى من $\frac{١}{٢} (١ + ن) (٧ + ٢ن)$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ١ ، ٣ + ١ ، ٥ + ٣ + ١ ، ٧ + ٥ + ٣ + ١ ، ...

١ أوجد الحد رقم ك.

٢ أوجد المجموع من الحد الأول حتى الحد ن.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ١ ، ٥ + ١ ، ٩ + ٥ + ١ ، ١٣ + ٩ + ٥ + ١ ، ...

(أ) أوجد الحدّ رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

٢ حلّ المسائل الآتية للمتتابعة ٢ ، ٤ + ٢ ، ٦ + ٤ + ٢ ، ٨ + ٦ + ٤ + ٢ ، ...

(أ) أوجد الحدّ رقم ك.

(ب) أوجد المجموع من الحدّ الأول حتى الحدّ ن.

★ التحدي

أوجد الحدّ العام للمتتابعة {أن} التي مجموع أول ن حذًا من حدودها مُعطى بالقانون

$$م_n = ٢ن^٢ + ٥ن$$

مجموع المتتابعة والحد العام

الفصل الثاني المتتابعات

١٧-٢

الرياضيات

لاحظ!

ليكن M_n المجموع من الحد الأول A_1 إلى الحد n للمتتابعة $\{A_n\}$.

عندما $n \leq 2$ ، $A_n = M_n - M_{n-1}$.

الحد الأول هو $A_1 = M_1$.

تحقق مما إذا كان A_n المحصول عليه بشرط $n \leq 2$ يصح أيضًا للحد الأول بالتعويض $n = 1$ في قانون A_n .

إذا صح $\Rightarrow$ اترك A_n كما هو.

إذا لم يصح $\Rightarrow$ اكتب A_1 وأن M_n .

مثال: إذا كان A_n المحصول عليه من $M_n - M_{n-1}$ هو $A_n = 2n^2 - n + 1$ ، (١)

وكان A_1 المحصول عليه من M_1 هو $A_1 = 0$ ، (٢)، فالتعويض $n = 1$ في (١) يعطي $A_1 = 1$ ، وهو لا يصح.

إذن، الحد العام هو $A_n = 0$ ، وأن $A_n = 2n^2 - n + 1$ عندما $n \leq 2$.

استعدّ

أوجد الحد العام للمتتابعة $\{A_n\}$ حيث المجموع M_n من الحد الأول إلى الحد n مُعطى بالقوانين الآتية.

(ب) $M_n = n^2 - 1$

(أ) $M_n = 2n^2 - 3n$

طريقة الحلّ

(أ) عندما $n \leq 2$ ،

$A_n = M_n - M_{n-1}$

$= (2n^2 - 3n) - (2(n-1)^2 - 3(n-1)) = 4n - 2$ ، (١)

الحد الأول هو $A_1 = M_1$

$= 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$ ، (٢)

من (١) و(٢)، $A_n = 4n - 2$ يصح أيضًا عندما $n = 1$

إذن، الحد العام هو $A_n = 4n - 2$

نواتج التعلم

يستنتج مجموع المتتابعة إذا كان حدّها العام مجموع بعض حدودها، ويربط بين مجموع المتتابعة وحدّها العام.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = M_n - M_0$$

أخطاء شائعة

$A_n = M_n - M_{n-1}$

$= (2n^2 - 3n) - (2(n-1)^2 - 3(n-1))$

$= 4n - 2$ ، (١)

إذن، الحد العام هو

$A_n = 4n - 2$

لقد أغفلت الشرط المسبق

$n \leq 2$ وأخفقت في إجراء التحقق

النهائي عند $n = 1$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

$A_n = M_n - M_{n-1}$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

تحقق بالتعويض $n = 1$ في القانون (١).

(ب) عندما $n \leq 2$.

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$= (1 - 1^{n-1}) - (1 - 1^{n-2}) =$$

$$= 1 - 1^{n-1} - 1 + 1^{n-2} =$$

$$= 1 - 1^{n-1} \times 1 - 1 + 1^{n-2} \times 1 =$$

$$= 1 - 1^{n-1} \times 1 - 1 + 1^{n-2} \times 1 = (1)$$

الحد الأول هو $a_1 = 1$

$$= 1 - 1^{n-1} \times 1 = 1 - 1^{n-1} = (2)$$

من (1) و (2)، أن $a_n = 1 - 1^{n-1}$ يصح أيضًا عندما $n = 1$

إذن، الحد العام هو $a_n = 1 - 1^{n-1}$

حاول

أوجد الحد العام للمتتابعة $\{a_n\}$ حيث المجموع من n من الحد الأول إلى الحد n مُعطى بالقوانين الآتية.

1 $a_n = 2n + 5$

2 $a_n = 3n - 1$

3 $a_n = 3n^2 + 2n + 6$

تدرب

أوجد الحد العام للمتتابعة $\{a_n\}$ حيث المجموع من n من الحد الأول إلى الحد n مُعطى بالقوانين الآتية.

1 $a_n = 2n$

2 $a_n = 2n - 4$

3 $a_n = 2n^2 + 2n - 1$

4 $a_n = 2n - 1$

5 $a_n = 5n - 2$

6 $a_n = 7n - 1$

7 $a_n = 3n - 1$

8 $a_n = 2n^2 + 2n - 3$

★ التحدي

أوجد الحد العام للمتتابعة $\{a_n\}$ حيث المجموع من n من الحد الأول إلى الحد n مُعطى بالقانون الآتي.

$$a_n = 3n^2 + 2n - 1$$

تأمل

كيف غير تفكيرك متتابعة مركبة معقدة (حسابية×هندسية) إلى أجزائها الأبسط (المكون الحسابي والمكون الهندسي) نظرتك إلى التعامل مع المسائل متعددة الخطوات المُربكة في الحياة أو في العلوم؟

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

$$a_n = 1 - 1^{n-1}$$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

متتابعات الفروق

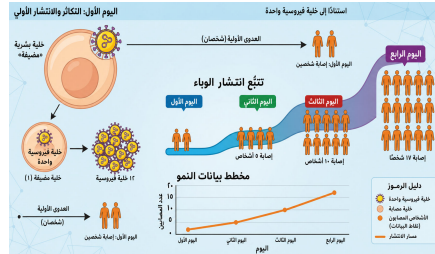
الفصل الثاني المتتابعات

١٨-٢
الرياضيات

نواتج التعلم

يوجد الحد العام باستعمال متتابعات الفروق.

المفهوم ٤ - متتابعات متقدّمة



تأمل كيف يتكاثر فيروس واحد داخل جسم مصاب، وكيف تتابع وزارة الصحة انتشار وباء. ففي اليوم الأول قد يصاب شخصان. وفي اليوم الثاني ه أشخاص، وفي اليوم الثالث ١٠، وفي اليوم الرابع ١٧. وإذا دققت النظر في التغير يومًا بعد يوم، وجدت أن الفيروس لا ينتشر بسرعة ثابتة، وأن تسارع انتشاره يسير على نمط خفيّ يمكن التنبؤ به. وتحليل طبقات التغير هذه يتنبأ علماء الأوبئة بذروة الإصابات، ويوزعون موارد المستشفيات توزيعًا فعالًا.

السؤال الموجّه: كيف نكتشف نمطًا ثابتًا خفيًا في متتابعة عددية والفروق الأولى بين حدودها تتغير باستمرار؟

لاحظ!

المتتابعة المكوّنة من الفروق بين الحدود المتجاورة تُسمى **متتابعة الفروق**.

مثال: متتابعة الفروق للمتتابعة ١٠، ٨، ٤، ٢، ٠، ١٠، ... هي

٢-، ٤-، ٦-، ٨-، ...

بالنسبة للمتتابعات التي يصعب تقدير حدّها العام، يمكن أحيانًا إيجادها من الحد الأول ومتتابعة الفروق.

$$\text{عندما } n \leq ٢, \quad a_n = ١ + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

تحقق ممّا إذا كانت تصحّ عند $n = ١$ بالتعويض $n = ١$ في قانون a_n ومقارنتها بـ $a_١$ المعطى.

$$\begin{aligned} & a_1 = ١, a_2 = ١, a_3 = ١, \dots, a_n = ١ - b_{n-1} \\ & a_n = ١ + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \end{aligned}$$

استعدّ

أخطاء شائعة

$$أ_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} ب_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (١ - ك) =$$

$$= 2 + \frac{1}{٢} \times (١ + ن) \times ن - (١ + ن) =$$

$$= 2 + ٢ن - ٢ - ن =$$

$$= ٢ن + ٢$$

لقد فاتك استبدال جميع حالات ن
ب ن - ١ في القانون.

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية {أ_n}.

١ ٢ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٣ ، ٣٨ ، ٥٧ ، ...

٢ ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٥ ، ٤٢ ، ١٢٣ ، ...

طريقة الحلّ

١

لتكن {ب_n} متتابعة الفروق للمتتابعة المعطاة.

$$\{أ_n\} : ٢ ، ٥ ، ١٢ ، ٢٣ ، ٣٨ ، ٥٧ ، ...$$

$$\{ب_n\} : ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ...$$

بما أنّ {ب_n} متتابعة حسابية حدّها الأول ٣ وأساسها ٤:

$$ب_n = ٣ + (١ - ن) \times ٤$$

$$= ١ - ٤ن$$

إذن، عندما $٢ \leq ٢$.

$$أ_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} ب_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (١ - ك) = (١ - ن) - \{١ + (١ - ن)\} \times \frac{١}{٢} + ٢ = (١ - ن) - (١ - ن) =$$

$$= 2 + ٢ن - (١ - ن) - (١ - ن) = ٢ + ٢ن - ٢ - ن + ١ = ١ + ٢ن - ٢ = ٢ن - ١$$

يصحّ هذا القانون أيضًا عندما $١ = ١$.

$$إذن، أ_n = ٢ن - ١$$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

استخدم القانون مع الأخذ بعين الاعتبار أنه مجموع حتى الحدّ

$$(١ - ن)$$

$$\sum_{k=1}^n (١ - ك) = (١ - ن) \times \frac{١}{٢} \times (١ + ن) - (١ + ن) =$$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

تأكد من تعويض $١ = ١$ في الصيغة المستنتجة لأنّ للتحقق من أنها تساوي المُعطى.

$$أ_١ = ٢ \times ١ - ١ = ١$$

٢

لتكن $\{b_n\}$ متتابعة الفروق للمتتابعة المعطاة.

$$\{a_n\}: ٢, ٣, ٦, ١٥, ٤٢, ١٢٣, \dots$$

$$\{b_n\}: ١, ٣, ٩, ٢٧, ٨١, \dots$$

بما أن $\{b_n\}$ متتابعة هندسية حدّها الأول ١ وأساسها ٣:

$$b_n = 1 \times 3^{n-1}$$

إذن، عندما $n \leq ٢$.

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3 - 3^n}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 3^n}{2} = \frac{4 - 3^n}{2}$$

يصحّ هذا القانون أيضًا عندما $n = ١$

$$\text{إذن، } a_n = \frac{4 - 3^n}{2}$$

حاول

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية $\{a_n\}$.

$$(ب) ٥, ٧, ١١, ١٩, ٣٥, \dots$$

$$(أ) ٢, ١٠, ٢٤, ٤٤, ٧٠, ١٠٢, \dots$$

تدرب

أوجد الحدّ العام للمتتابعات الآتية $\{a_n\}$.

$$(ب) ٥, ٨, ٩, ٨, ٥, ٠, \dots$$

$$(أ) ١, ٢, ٥, ١٤, ٤١, ١٢٢, \dots$$

$$(د) ١, ٦, ١٥, ٢٨, ٤٥, ٦٦, \dots$$

$$(ج) ٢, ٣, ١, ٥, ٣, ١٣, \dots$$

$$(هـ) ٥, ٤, ٧, ٢, ٢٥, ٥٦, \dots$$

★ التحدي

يتابع فريق أورام كتلة نسيجية سنّة أسابيع، ويسجّل حجمها بالمليتر المكعب مم^٣ كالآتي:
١, ٣, ٧, ١٣, ٢١, ٣١, ... أوجد قانونها العام a_n . وإذا تجاوز الحجم ١٣٠ مم^٣ في الأسبوع ١٢، لزم إجراء جراحة عاجلة. احسب $a_{١٢}$ لتحديد هل يحتاج المريض إلى الجراحة.

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

هذه الصورة مقبولة لأنه سيُستخدم Σ .

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

استخدم القانون مع الأخذ بعين الاعتبار أنه مجموع حتى الحدّ $(n-١)$.

$$\sum_{k=1}^n 3^k = 1 - 3^{n+1} = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

يُعدّ ذلك استنتاجًا إن لم يُكتب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

المتتابعات المجمّعة

الفصل الثاني المتتابعات

١٩-٢

الرياضيات

لا حظ!

في المتتابعات المجمّعة، انظر في انتظام المتتابعة قبل التجميع وانتظام عدد الحدود الموجودة في كل مجموعة.

استعدّ

نواتج التعلّم

يحلّ مسائل متنوّعة بتقسيم المتتابعة إلى مجموعات، ليوجد حدًا بعينه أو مجموع حدود مجموعة بعينها.

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

٢ | ٤ ، ٦ ، ٨ | ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ | ٢٠ ، ٢٢ ، ...

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

٢ أوجد مجموع الحدود الموجودة في المجموعة ن.

٣ أوجد في أي مجموعة وفي أي موضع يقع العدد ٨٨.

طريقة الحلّ

لتكن {أن} هي المتتابعة قبل التجميع. بما أنها متتابعة حسابية بالحدّ الأول ٢ والأساس ٢، فإنّ $أ_n = ٢ن$
 لتكن {بن} هي متتابعة عدد الحدود في كل مجموعة. بما أنها متتابعة حسابية بالحدّ الأول ١ والأساس ٢، فإنّ $ب_n = ١ - ٢ن$

المجموعة الثالثة

المجموعة الثانية

المجموعة الأولى

المتتابعة قبل التجميع.

متتابعة أعداد الحدود في كل مجموعة.

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة بإيجاد موضع الحدّ الأخير من المجموعة التاسعة في {أن}.

المجموعة التاسعة المجموعة العاشرة

٢ | ٤ ، ٦ ، ٨ | ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٨ | ... | ٠ ، ... | ٠ ، ...

خمس حدود

ثلاثة حدود

حد واحد

مجموع عدد الحدود حتى المجموعة التاسعة هو:

$$٨١ = \{٢ \times (١ - ٩) + ١ \times ٢\} \times ٩ \times \frac{١}{٢}$$

إذن، بما أنّ الحدّ الأول من المجموعة العاشرة هو الحدّ الثاني والثمانون في {أن}:

$$١٦٤ = ٨٢ \times ٢$$

$$أ_n = ٢ن$$

انظر في المجموع من الحدّ الأول إلى الحدّ التاسع في {بن}.

$$٢ن(١ - ٩) + ١ \times ٢ = ٨١$$

أوجد المجموع باستخدام ① الحد الأخير، ② الحد الأول، و ③ عدد حدود المجموعة ن.

① أوجد الحد الأخير من المجموعة ن.

إيجاد موضع الحد الأخير من المجموعة n في $\{A_n\}$:

$$(1) \dots \dots \dots \bar{U} = \{2 \times (1 - U) + 1 \times 2\} U \frac{1}{2}$$

إِذْنِ، الْحَدِّ الْأَخِيرِ مِنَ الْمَجْمُوعَةِ نَ هُوَ ٢ن^٢.

② أوجد الحد الأول من المجموعة ن باستخدام الحد الأخير من المجموعة (ن - ١).

مشابهة للسؤال ١

المجموعة (ن - ١) المجموعة ن

$$\dots \quad | \quad \circ \quad , \quad \dots \quad , \quad \circ \quad \quad | \quad \circ \quad , \quad \dots$$

من (١)، الحد الأخير من المجموعة $(n - 1)$ هو الحد $(n - 1)^2$ في $\{A_n\}$.

إذن، الحد الأول من المجموعة n هو الحد $\{(n-1)^2 + 1\}$ في $\{A_n\}$. أي الحد $(n^2 - 2n + 2)$ ، وبذلك:

$$(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2})2$$

③ عدد الحدود في المجموعة n هو $2^n - 1$

إذن، المجموع المطلوب هو مجموع متتابعة حسابية بالحد الأخير $2n$ ^٢، والحد الأول

$2(n^2 - n + 2)$ ، وعدد الحدود $n - 1$:

$$\underline{(1 + j - 2j)(1 - j)^2} = \{2j^2 + (2 + j^2 - 2j)^2\}(1 - j)^2 \frac{1}{2}$$

٣ أوّلًا، أوجد موضع العدد ٨٨ في {أ_ن}.

حلّ ۲ن = ۸۸ يعطى ن = ۴۴

هنا، من r ، الحدّان الأخيران من المجموعتين $(n - 1)$ و n هما الحدّ $(n - 1)$ والحدّ n في $\{A_n\}$ على الترتيب.

عَوَّضُ أَعْدَادًا مَحْدَدَةً فِي نِ الْتَحْقُقِ مِنْ أَيِّ مَجْمُوعَةٍ يَنْتَمِي إِلَيْهَا الْحَدُّ الرَّابِعُ وَالْأَرْبَعُونَ.

بما أن $26 = 36$ و $27 = 49$ ، فإنَّ الحدَّ الرابع والأربعين في المجموعة السابعة.

المجموعة السابعة

المجموعة السادسة

... ، ٨٨ ، ... (الحدّ رقم ٤٩) |

... (الحدّ رقم ٣٦) |

(الحدّ رقم ٤٤)

بما أن $44 - 36 = 8$ ، فإن العدد ٨٨ هو **الحَدّ الثامن من المجموعة السابعة**.

حاول

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

$$١ | ٣ | ٥ | ٧ | ٩ | ١١ | ١٣ | ١٥ | ١٧ | ١٩ | ٢١ | ٢٣ | \dots$$

١ أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

٢ أوجد مجموع الحدود الموجودة في المجموعة العاشرة.

٣ أوجد في أي مجموعة وفي أي موضع يقع العدد ١٠١.

تدرّب

قسّم متتابعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعات كما هو موضح أدناه. حلّ المسائل الآتية.

$$١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | \dots$$

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

(ب) أوجد مجموع الحدود الموجودة في المجموعة العاشرة.

(ج) أوجد في أي مجموعة وفي أي موضع يقع العدد ١٢٤.

$$١ | ٤ | ٧ | ١٠ | ١٣ | ١٦ | ١٩ | ٢٢ | ٢٥ | ٢٨ | ٣١ | ٣٤ | ٣٧ | ٤٠ | \dots$$

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة العاشرة.

(ب) أوجد مجموع الحدود الموجودة في المجموعة العاشرة.

(ج) أوجد في أي مجموعة وفي أي موضع يقع العدد ١٠٠.

★ التحدي

$$٢ | ٦ | ١٠ | ١٤ | ١٨ | ٢٢ | ٢٦ | ٣٠ | ٣٤ | \dots$$

(أ) أوجد الحدّ الأول من المجموعة الثانية عشرة.

(ب) استنتج قاعدة لمجموع حدود المجموعة ن.

(ج) عيّن في أي مجموعة يقع العدد ٢٠٢. وفي أي موضع منها.

(د) امتداد التحدي: أوجد مجموع حدود المجموعات من الأولى إلى الثانية عشرة.

تأمل

عند تحليل متتابعة غير مألوفة من بيانات واقعية، ما المؤشرات أو القرائن البصرية التي تدفعك إلى اختيار طريقة متتابعة الفروق بدل طريقة المتتابعات المجمّعة؟

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

علاقات التكرار (١)

الفصل الثاني المتتابعات

٢٠٢
الرياضيات

نواتج التعلم

يحلّ علاقات التكرار
بمستوياتها المختلفة.
ليستنتج حدود المتتابعة.

المفهوم ٥ - علاقات التكرار والاستقراء



حين يصف الطبيب مضاداً حيوياً، فالغاية أن تبقى في دم المريض كقمية علاجية من الدواء. وفي كلّ ٢٤ ساعة يتناول المريض جرعة جديدة، بينما يمثل جسمه نسبة ثابتة ممّا في الدم ويتخلّص منها. ولضمان بقاء الدواء فعالاً دون بلوغ الحدّ السامّ، يلزم علماء الأدوية نمذجة هذه الدورة اليومية. فكمية الدواء غداً تتوقّف مباشرةً على الكمية الباقية اليوم. وهذا التوقّف خطوة بخطوة هو جوهر علاقة التكرار. ولإثبات بقاء هذا النمط آمناً عبر عدد غير منتهٍ من الأيام، يستعمل الرياضيون أثراً منطقيّاً متسلسلاً كأحجار الدومينو، يسقى الاستقراء الرياضي.

السؤال الموجّه: كيف تثبت رياضياً أن عملية متكرّرة خطوة بخطوة تظلّ مستقرّة ويمكن التنبؤ بها إلى ما لا نهاية؟

لاحظ!

! تتحدّد المتتابعة (أن)، ويمكن إيجاد u_n ، u_{n+1} ، u_{n+2} ، ... بالترتيب، إذا كان الشرطان الآتيان مُعظّيين.

(أ) الحدّ الأول

(ب) علاقة لإيجاد u_{n+1} من u_n (ن $= 1, 2, 3, \dots$)

يُسمّى (ب) أعلاه **علاقة تكرار**. فيما يلي، يُفترض أن علاقات التكرار تصحّ لـ $n = 1, 2, 3, \dots$.

! علاقات التكرار التي تمثّل المتتابعات الحسابية والهندسية.

$u_{n+1} = u_n + d \Rightarrow$ متتابعة حسابية بالأساس د.

$u_{n+1} = r \cdot u_n \Rightarrow$ متتابعة هندسية بالأساس ر.

إضافة د إلى u_n يعطي u_{n+1}

ضرب u_n في ر يعطي u_{n+1}

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثانى إلى الرابع للمتتابعة $\{أ_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$أ_٢ = ٢, أ_n = ١ + أ_{n-١} + ٣$$

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{أ_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$(أ) أ_١ = ١, أ_n = ١ + أ_{n-١} + ٢ \quad (ب) أ_١ = ٢, أ_n = ١ + أ_{n-١} + ٣$$

طريقة الحلّ

١ يُوجد الحدّ الثانى بالتعويض $ن = ١$ فى علاقة التكرار المعطاة.

$$أ_٢ + ٣ = ١ + أ_١$$

$$أ_٢ + ٣ = ١ + ٢$$

$$أ_٢ = ٠$$

يُوجد الحدّ الثالث باستخدام الحدّ الثانى. وبالمثل، يُوجد الحدّ الرابع باستخدام الحدّ الثالث.

$$أ_٣ + ٣ = ١ + أ_٢$$

$$أ_٣ + ٣ = ١ + ٠$$

$$أ_٣ = -٢$$

$$أ_٣ + ٣ = ١ + أ_٢$$

$$أ_٣ + ٣ = ١ + ٠$$

$$أ_٣ = -٢$$

$$\text{إذن، } أ_١ = ١, أ_٢ = ٠, أ_٣ = -٢, أ_٤ = -٥$$

٢ (أ) بما أنّ المتتابعة $\{أ_n\}$ متتابعة حسابية بالحدّ الأول $١ -$ والأساس ٥ :

$$أ_n = أ_١ + (ن - ١) \times ٥$$

$$أ_n = ١ + (ن - ١) \times ٥$$

$$أ_n = ٥ن - ٤$$

(ب) بما أنّ المتتابعة $\{أ_n\}$ متتابعة هندسية بالحدّ الأول ٢ والأساس ٣ :

$$أ_n = أ_١ \times ٣^{ن-١}$$

$$أ_n = ٢ \times ٣^{ن-١}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثاني إلى الرابع للمتتابعة $\{a_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (ب) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (ب) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(ج) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (د) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الحدود من الثاني إلى الرابع للمتتابعة $\{a_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (ب) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(ج) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (د) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(هـ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (و) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

٢ أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (ب) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(ج) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (د) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(هـ) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (و) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

$$(ز) \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots \quad (ح) \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, \dots$$

★ التحدي

حلّ علاقة التكرار الآتية لإيجاد a_n :

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{عندما } n \geq 3$$

بالشروط الابتدائية: $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نواتج التعلم

يحلّ علاقات التكرار
بمستوياتها المختلفة،
ليستنتج حدود المتابعة.

د(ن) هو الحد العام لمتابعة
الفروق $\{ \Delta_n \}$.

تعبير بدلالة n . يمكن تحويلها إلى

$$A_n = A_{n-1} + 1 - D(n).$$

لا حظ!

! علاقات التكرار حيث تكون متابعة الفروق معلومة

$$\dots (j) + i = 1 + i$$

عندما $n \geq 2$ ، $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k$ (ك).....

استعدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابة $\{a_n\}$ المحدّدة بالشروط الآتية.

$$3 - 2 + 1 = 1 + 1, 1 = 1$$

طريقة الحل

بما أن $A_n - A_{n-1} = 3 - 2n$ ، فإن الحدّ العام لمتتابة الفروق $\{A_n\}$ هو $3 - 2n$

إذن، عندما $n \leq 2$:

$$(3 - k) \sum_{j=k}^{1-n} 1 + 1 = n$$

$$(1 - j)^3 - \{1 + (1 - j)\}(1 - j)^{\frac{1}{2}} \times 2 + 1 =$$

$$\gamma(\gamma - \dot{\gamma}) = \xi + \dot{\gamma}\xi - \gamma\dot{\gamma} =$$

هذه الصيغة تنطبق أيضًا عندما $n = 1$

إذن، $٢(٢ - ن) = أ_n$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحدّدة بالشروط الآتية.

$$\gamma \dot{U} + \gamma \dot{I} = \gamma_1 + \gamma \dot{I} \quad , \quad \gamma = \gamma \dot{I} \quad (1)$$

$$u_3 + u_1^f = u + u_1^f, u = u^f(\text{ب})$$

تدرب

أوجد الحد العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحددة بالشروط الآتية.

- (أ) $a_1 = 2, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$
 (ب) $a_1 = 2, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$
 (ج) $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$
 (د) $a_1 = 2, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$
 (هـ) $a_1 = 2, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$
 (و) $a_1 = 4, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$

★ التحدي

شركة ناشئة تبدأ باحتياطي نقدي قدره ٤٠٠,٠٠٠ جنيه (أ = ٤ من مئات الألوف). وتتفق أن ألف جنيه في نهاية كل ربع سنة:

$$a_1 = 4, a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$$

أوجد صيغة صريحة للحد العام a_n للتنبؤ باحتياطي الشركة النقدي في بداية أي ربع سنة.

علاقات التكرار (٣)

الفصل الثاني المتتابعات

٢٢-٢

الرياضيات

نواتج التعلم

يحلّ علاقات التكرار
بمستوياتها المختلفة.
ليستنتج حدود المتتابعة.

لاحظ!

خطوات إيجاد الحدّ العام من علاقة تكرار على الصورة $u_n = a u_{n-1} + b$.

- ١ استبدل جـ بكلّ من u_n و u_{n-1} في علاقة التكرار.
- ٢ حلّ المعادلة الناتجة من ١.
- ٣ عوّض بالحلّ الناتج من ٢ في $u_n = a u_{n-1} + b$ ف $(u_n - \frac{b}{a-1}) = a(u_{n-1} - \frac{b}{a-1})$.
- ٤ بفرض $u_n - \frac{b}{a-1} = v_n$ تكون $\{v_n\}$ متتابعة هندسية أساسها a .
- ٥ أوجد الحدّ العام لـ $\{u_n\}$ باستخدام الحدّ العام لـ $\{v_n\}$.

استعدّ

أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{u_n\}$ المحدّدة بالشروط الآتية.

$$u_1 = 1, u_n + 3 = 4u_{n-1}$$

طريقة الحلّ

باستبدال جـ بكلّ من u_n و u_{n-1} في علاقة التكرار المعطاة $u_n + 3 = 4u_{n-1}$:

$$u_n - 3 = 4u_{n-1} - 6$$

بحلّ هذه المعادلة نجد جـ = ٢ -

$$\text{إذن، } u_n + 1 = 4(u_{n-1} + 1) \dots (1)$$

هنا، بفرض $u_n + 1 = v_n$ (٢)، يمكن التعبير عنها بـ $u_n + 1 = 4v_{n-1}$

بالتعويض في (١) نجد $v_n = 4v_{n-1}$ ، إذن $\{v_n\}$ متتابعة هندسية أساسها ٤

كذلك، الحدّ الأول لـ $\{v_n\}$ هو، من (٢)، $v_1 = u_1 + 1 = 2$

$$v_1 = 2$$

$$v_n = 2 \times 4^{n-1}$$

$$\text{إذن، } v_n = 2 \times 4^{n-1} \dots (3)$$

$$v_n = 2 \times 4^{n-1}$$

بالتعويض في (٢) نجد $u_n + 1 = 2 \times 4^{n-1}$

$$\underline{u_n = 2 \times 4^{n-1} - 1}$$

عوّض جـ = ٢ - في
 $u_n + 3 = 4u_{n-1}$ ف
 $u_n - 1 = 4(u_{n-1} - 1)$

$\{v_n\}$ متتابعة هندسية حدّها
الأول ٢ وأساسها ٤

حاول

أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحدّدة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 1, \quad a_n + 5 = a_{n+1} \quad (ب) \quad a_1 = 4, \quad a_n - 2 = a_{n+1}$$

تدرب

أوجد الحدّ العام للمتتابعة $\{a_n\}$ المحدّدة بالشروط الآتية.

$$(أ) \quad a_1 = 2, \quad a_n + 2 = a_{n+1} \quad (ب) \quad a_1 = 3, \quad a_n + 4 = a_{n+1}$$

$$(ج) \quad a_1 = 3, \quad a_n + 3 = a_{n+1} \quad (د) \quad a_1 = 2, \quad a_n - 3 = a_{n+1}$$

$$(هـ) \quad a_1 = 1, \quad a_n + \frac{1}{2} = a_{n+1} \quad (و) \quad a_1 = 2, \quad a_n - \frac{2}{3} = a_{n+1}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات

الفصل الثانى المتطابقات

٢٣-٢
الرياضيات

نواتج التعلم

يطبق مبدأ الاستقراء الرياضى
لإثبات صحة المساواة
والمتطابقات الرياضية.

لاحظ!

البرهان بالاستقراء الرياضى

خطوات إثبات أن «الشرط (أ) يتحقق لجميع الأعداد الطبيعية ن»
[1] أثبت أن (أ) يتحقق عندما $n = 1$
[2] افترض أن (أ) يتحقق عندما $n = k$ ، واكتب المعادلة التى تتحقق عندئذ.
بتحويل تلك المعادلة، أثبت أن (أ) يتحقق أيضًا عندما $n = k + 1$

استعدّ

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات أن $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

طريقة الحلّ

لتكن المتطابقة المعطاة هى (أ).

[1] عندما $n = 1$:

الطرف الأيمن $= 1$ ، الطرف الأيسر $= 1 \times \frac{1}{2} \times (1 + 1) = 1$

إذن، (أ) يتحقق عندما $n = 1$

[2] افترض أن (أ) يتحقق عندما $n = k$:

$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (1)

عندما $n = k + 1$ ، من (1):

الطرف الأيمن $= 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1)$

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

الطرف الأيسر $= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

إذن، (أ) يتحقق أيضًا عندما $n = k + 1$

من [1] و [2]، يتحقق (أ) لجميع الأعداد الطبيعية.

استنتج التعبير الذى يتحقق لـ
 $n = k + 1$ باستخدام (1).

لا تُفك الأقواس: استخرج العامل
 $\frac{1}{2}(k+1)$.

حول إلى الصورة المتحصل عليها
بتعويض $n = k + 1$ فى الطرف
الأيسر لـ (أ).

حاول

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات الآتية.

$$(أ) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(ب) \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

تدرب

استخدم الاستقراء الرياضى لإثبات المتطابقات الآتية.

$$(أ) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(ب) \quad 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(ج) \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(د) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

الاستقراء الرياضي لإثبات المتباينات

الفصل الثاني المتتابعات

٢٤-٢
الرياضيات

لاحظ!

عند إثبات متطابقات أو متباينات تتضمن n ، اضرب طرفي التعبير المفترض في n .

استعدّ

عندما n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 ، أثبت المتباينة الآتية.

$$n^2 < 2^n$$

طريقة الحل

لتكن المتباينة المعطاة هي (أ).

[1] عندما $n = 4$ ، الطرف الأيمن $= 2^4 = 16$ ، الطرف الأيسر $= 4 \times 3 = 12$.

إذن، تصح (أ) عند $n = 4$.

[2] بافتراض $k \leq 4$ وأن (أ) تصح عند $n = k$.

$$k^2 < 2^k$$

بضرب الطرفين في 2 نحصل على

$$k^2 + k < 2^k \dots (1)$$

هنا، بمقارنة 2^k و $3(k+1)$:

$$\text{عندما } k \leq 4, \quad 2^k - 3(k+1) = 2^k - 3k - 3 = 3 - k - k^2$$

$$= 3 - k - k^2 < 0$$

إذن، $2^k < 3(k+1) \dots (2)$

من (1) و (2)، بما أن $2^k + k < 2^k + 3(k+1) < 2^{k+1}$.

$$2^k + k < 2^{k+1}$$

وهذا يبين أن (أ) تصح أيضًا عندما $n = k + 1$.

من [1] و [2]، تصح (أ) لجميع الأعداد الطبيعية الأكبر من أو المساوية لـ 4 .

نواتج التعلم

يطبق مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات صحة المتباينات الجبرية.

بما أننا أثبتنا هذا لـ $n \leq 4$ فأكثر، أثبت أنه يتحقق عندما $n = 4$.

باستخدام هذا التعبير، أثبت (أ) لـ $n = k + 1$ وهو $2^k + k < 2^{k+1}$.

بما أن الطرف الأيسر عند تعويض $n = k + 1$ في (أ) هو $3(k+1)$ ، أثبت أن $2^k + k < 3(k+1) < 2^{k+1}$.

حاول

عندما n عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٣، أثبت المتباينة الآتية.

$$n^3 < n^2 + 1$$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ عندما n عدد طبيعى، أثبت المتباينة الآتية.

$$n^3 < n^2 + 1$$

٢ عندما n عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٤، أثبت المتباينة الآتية.

$$n^2 < n^3 + 1$$

★ التحدى

عندما $h < 0$ ون عدد طبيعى أكبر من أو يساوى ٣، أثبت المتباينة الآتية.

$$(1 + h)^n < 1 + nh^2$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

إثبات كون العدد مضاعفًا باستخدام الاستقراء الرياضي

٢٥-٢
الرياضيات

الفصل الثاني المتتابعات

لاحظ!

عند إثبات أن عددًا ما مضاعف لـ ٩، استخدم التعبير المفترض لتبين أنه يأخذ الصورة $9 \times$ (عدد صحيح).

استعدّ

أثبت أن $3n$ مضاعف لـ ٩، استخدم التعبير المفترض لتبين أنه يأخذ الصورة $9 \times$ (عدد صحيح).

طريقة الحلّ

لتكن (١) هي « $3n$ مضاعف لـ ٩».

[١] عندما $n = 1$

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 1 = 3$$

إذن، (١) يتحقق عندما $n = 1$.

[٢] بافتراض أن (١) يتحقق عندما $n = k$ ، يمكن التعبير عنه باستخدام العدد الصحيح m كما يلي:

$$3k = 3(2 + k) + 3(1 + k) + 3$$

بالنظر إلى حالة $n = k + 1$:

$$3(k + 1) = 3(2 + k + 1) + 3(1 + k + 1) + 3$$

$$3k + 3 = 3(2 + k) + 3(1 + k) + 3 + 3$$

$$3k + 3 = 3(2 + k) + 3(1 + k) + 6$$

وبما أن m مضاعف لـ ٩، فإن $3(2 + k) + 3(1 + k) + 6$ مضاعف لـ ٩.

إذن، (١) يتحقق عندما $n = k + 1$ أيضًا عندما $n = k$.

من [١] و [٢]، يتحقق (١) لجميع الأعداد الطبيعية.

نواتج التعلم

يطبق مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات صحة قابلية القسمة.

٣٦ مضاعف للعدد ٩

باستخدام هذه المعادلة، أثبت أن (١) يتحقق عندما $n = k + 1$

بما أن
 $3k = 3(2 + k) + 3(1 + k) + 3$
 $3k + 3 = 3(2 + k + 1) + 3(1 + k + 1) + 3$
 $3(k + 1) = 3(2 + k + 1) + 3(1 + k + 1) + 3$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

أثبت أن $3n$ مضاعف لـ ٩، استخدم التعبير المفترض لتبين أنه يأخذ الصورة $9 \times$ (عدد صحيح).

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أثبت أنّ $2^n - 3^n + 6$ مضاعف للعدد ٦ لجميع الأعداد الطبيعية n . باستخدام الاستقراء الرياضي.

٢ أثبت أنّ $4^n - 3$ يقبل القسمة على ٣ لجميع الأعداد الطبيعية n . باستخدام الاستقراء الرياضي.

★ التحدي

أثبت أنه لأي عدد صحيح $n \geq 1$:

$$(n+1)^n - 1 \text{ مضاعف لـ } n^2.$$

علاقات التكرار والاستقراء الرياضي

الفصل الثاني المتتابعات

٢٦-٢
الرياضيات

استعدّ

نواتج التعلّم

يوظّف الاستقراء الرياضي
لإثبات علاقات تكرار
المتتابعات والتحقّق من
صحتها.

بالنسبة للمتتابعة {أ_ن} المحدّدة بالشرطين أ_١ = ٣ وأ_ن + ١ = $\frac{1 - 2^n}{1 + n}$ ، حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد أ_٢، أ_٣، أ_٤ وقدر الحدّ العام لهذه المتتابعة.

٢ أثبت أنّ التقدير في ١ صحيح باستخدام الاستقراء الرياضي.

طريقة الحلّ

١ من علاقة التكرار المعطاة:

{أ_ن: ٣، ٤، ٥، ٦، ...}

$$أ_١ = \frac{1 - 2^1}{1 + 1} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{وبالمثل، } أ_٢ = ٥، أ_٣ = ٦$$

إذن، يمكننا تقدير أ_ن = ٢ + ن

٢ لتكن أ_ن = ٢ + ن هي (أ).

[١] عندما ن = ١، بتعويض ن = ١ في (أ) نحصل على:

$$٣ = ٢ + ١ = أ_١$$

إذن، يتحقّق (أ) عندما ن = ١

[٢] بافتراض أنّ (أ) يتحقّق عندما ن = ك،

$$أ_ك = ٢ + ك$$

عندئذٍ، بإيجاد أ_ن + ١ من علاقة التكرار المعطاة:

$$أ_ك + ١ = \frac{1 - 2^{ك+1}}{1 + ك + 1}$$

$$= \frac{1 - 2(٢ + ك)}{١ + ك} =$$

$$٣ + ك =$$

$$= ٢ + (١ + ك)$$

وهذا يبيّن أنّ (أ) يتحقّق أيضًا عندما ن = ك + ١

من [١] و [٢]، يتحقّق (أ) لجميع الأعداد الطبيعية.

إذن، التقدير في ١ صحيح.

عوّض أ_ن = ٢ + ك

حوّل إلى الصورة المتحصّل عليها
بتعويض ن = ك + ١ في الطرف
الأيسر لـ (أ).

حاول

بالنسبة للمتتابعة {أ_ن} المحددة بـ $1 = 1$ وأ_ن + ١ = أ_ن^٢ + ٢أ_ن - ٢، حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد أ_١، أ_٢، أ_٣، أ_٤ وقدر الحد العام.

٢ أثبت أن التقدير فى ١ صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ بالنسبة للمتتابعة {أ_ن} المحددة بـ $1 = 1$ وأ_ن + ١ = أ_ن^٢ - أ_ن^٢ + ٢(١ + ن)، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد أ_١، أ_٢، أ_٣، أ_٤ وقدر الحد العام.

(ب) أثبت أن التقدير فى (أ) صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

٢ بالنسبة للمتتابعة {أ_ن} المحددة بـ $1 = 1$ وأ_ن + ١ = $\frac{4 - \text{أ}_\text{ن}}{3 - \text{أ}_\text{ن}}$ ، حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد أ_١، أ_٢، أ_٣، أ_٤ وقدر الحد العام.

(ب) أثبت أن التقدير فى (أ) صحيح باستخدام الاستقراء الرياضى.

★ التحدى

ثلاثة أعداد أ ، ب ، ج بهذا الترتيب تكوّن متتابعة هندسية أساسها ر. وإذا كانت أ ، ب ، ج بهذا الترتيب تكوّن متتابعة حسابية، فعين القيم الممكنة لـ ر.

🧠 تأمل

كيف يساعدنا الاستقراء الرياضى على التأكد من صحة قانون عامّ لمتتابعة مُعرّفة بعلاقة تكرار؟ اشرح إجابتك.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نواتج التعلم

يتعرّف العدد المركّب
ع = أ + ب ت ويميّز مكوناته:
الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

الأعداد المركبة

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١-٣

الرياضيات



المفهوم ١ العدد المركّب

حين يتابع الفّي الطبي قلب المريض برسم القلب الكهربائي (ECG)، تظهر على الشاشة موجات منتظمة متتابعة. وعلى نحو مشابه، يستعين جهاز الرنين المغناطيسي بمجالات مغناطيسية قوية وموجات راديوية ليكوّن صورًا دقيقة لأعضاء الجسم من الداخل.

هذه الإشارات الحيوية موجات في حقيقتها، وتتبعها يقتضي تتبّع سعتها وزمنها (فرق الطور) معًا. والأعداد المألوفة تعجز عن حمل المعلوماتين في آن واحد، لكنّ إطارًا رياضيًا فريدًا يحلّ المشكلة إذ يعامل العدد نقطةً إحدائية في المستوى.

السؤال الموجّه: كيف تعيننا الأعداد المركبة على توسيع فهمنا للرياضيات، فنحلّ مسائل تبدو مستحيلة بالأعداد الحقيقية وحدها؟

لاحظ!

! العدد الذي يساوي مربّعه - ١ يُرمز إليه ب ت، أي أنّ ت = -١

! العدد المعرّف عنه في الصورة أ + ب ت باستخدام عددين حقيقيين أ، ب يُسمّى عددًا مركّبًا.

الجزء أ يُسمّى **الجزء الحقيقي**، والجزء ب يُسمّى **الجزء التخيلي**.

عندما ب = ٠، يصبح أ + ب ت عددًا حقيقيًا.

وعندما ب ≠ ٠، يُسمّى أ + ب ت عددًا تخيليًا.

! تساوي عددين مركّبين

• عندما تكون أ، ب، ج، د أعدادًا حقيقية، إذا كان أ + ب ت = ج + د ت، فإنّ

أ = ج، ب = د

• وعندما تكون أ، ب عددين حقيقيين، إذا كان أ + ب ت = ٠، فإنّ أ = ٠، ب = ٠.

الأعداد المركبة

الأعداد الحقيقية	الأعداد التخيلية
٧، -٣٧	٨ ت، -٣ ت

الأعداد الحقيقية أيضًا جزء من الأعداد المركبة.

الأعداد الحقيقية أيضًا جزء من الأعداد المركبة.

ت غير مشمولة في الجزء التخيلي.

الجزآن الحقيقي والتخيلي في الطرفين متساويان.

٠ + ٠ ت = ٠

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكلّ من الأعداد المركّبة الآتية.

$$(أ) ٣ - ٢ت \quad (ب) \frac{٣\sqrt{٤} - ٤}{٣} \quad (ج) ٨ - ٢ت \quad (د) ٢ت$$

٢ أوجد قيمتي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحقّقان المعادلة الآتية.

$$(٢ + ت)س + (١ + ت)ص = ٣ + ٢ت$$

طريقة الحل

ت غير مشمولة في الجزء التخيلي.

١ (أ) $٣ - ٢ت$ الجزء الحقيقي: ٣، الجزء التخيلي: -٢

عبّر عنه في الصورة أ + بت أوّلًا.

$$(ب) \frac{٣\sqrt{٤} - ٤}{٣} - \frac{٤}{٣} = \frac{٣\sqrt{٤} - ٤}{٣} \quad \text{الجزء الحقيقي: } \frac{٤}{٣}, \text{ الجزء التخيلي: } -\frac{٣\sqrt{٤}}{٣}$$

$$(ج) ٨ - ٢ت = ٨ - ٠ت \quad \text{الجزء الحقيقي: } ٨, \text{ الجزء التخيلي: } ٠$$

$$(د) ٢ت = ٠ + ٢ت \quad \text{الجزء الحقيقي: } ٠, \text{ الجزء التخيلي: } ٢$$

فكّ الطرف الأيمن ورتّبه في الصورة أ + بت.

$$٢ (٢ + ت)س + (١ + ت)ص = ٣ + ٢ت$$

$$٢س + ٢تس + ص + تس = ٣ + ٢ت$$

قارن الجزأين الحقيقي والتخيلي في الطرفين.

$$(٢س + ص) + (٢تس + تس) = ٣ + ٢ت$$

إذن،

$$\begin{cases} ٢س + ص = ٣ \\ ٢تس + تس = ٢ت \end{cases}$$

وبحلّ هذه المنظومة نحصل على $س = ١, ص = ٤$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكلّ من الأعداد المركّبة الآتية.

$$(أ) ٥ - ٣ت \quad (ب) \frac{٣\sqrt{١} - ١}{٢} \quad (ج) ١ \quad (د) ٣ت$$

٢ أوجد قيمتي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحقّقان المعادلتين الآتيتين.

$$(أ) (٦ - س) + (٣ + ٢ت)ص = ٠ \quad (ب) (٢ + ٣)س + (٤ - ت)ص = ٧ - ٦ت$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكلٍّ من الأعداد المركبة الآتية.

(أ) $٢ + ٥٠$

(ب) $١٣ + ٢٥ - ت$

(ج) $\frac{٢ - \sqrt[٣]{٧} - ت}{٣}$

(د) $\frac{٣\sqrt[٣]{٧} - ٧}{٣}$

(هـ) $٤ -$

(و) $\frac{١}{٤}$

(ز) $\sqrt[٣]{٧} - ت$

(ح) $- ت$

٢ أوجد قيمتي العددين الحقيقيين س، ص اللتين تحققان المعادلات الآتية.

(أ) $(٢س + ص) + (٣س - ت) = ٧ + ٨$ (ب) $(١ + س) - ٥ = (٢ص + ١) + ت$

(ج) $(٢ - س) + (س + ت) = ٠$ (د) $(٣ + ت)س + (١ - ت)ص = ٣ + ٧$

(هـ) $(١ - ت)(س + ت) = ٢ + ت$

★ التحدي



مهندس صوت يبرمج مُلخَقًا لصدى ستيريو تتعقَّب فيه الأعدادُ المركبةُ شِدَّةَ الموجات الصوتية وزمنها. ولتوسيط الصوت تمامًا بين السَّماعة اليسرى (مُعَامِل الشِدَّة س) والسَّماعة اليمنى (مُعَامِل الشِدَّة ص)، يجب أن يتوازن المساران الصوتيان وفق المعادلة: $(١ + ت)س = (س + ت)ص$

أوجد القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين س، ص.

العمليات على الأعداد المركبة (١)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٢-٣

الرياضيات

لاحظ!

يمكن إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة بالطريقة نفسها المستخدمة في التعبيرات الجبرية. ومع ذلك، إذا ظهرت t^2 ، عوض بـ $t^2 = 1 - t$

ينبغي حساب قوى t بالتعبير عنها بدلالة t^2

مثال: $t^4 = (t^2)^2 = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2 = 1 - 2t + (1-t) = 2 - 3t$

استعد

احسب ما يأتي.

$$(أ) (t^2 - 3) - (t + 2) \quad (ب) (2 - t) \quad (ج) t^6 + t^7 + t^{17}$$

طريقة الحل

$$(أ) (t^2 - 3) - (t + 2) = t^2 - 3 - t - 2 = t^2 - t - 5$$

$$= t^2 - t - 5$$

$$(ب) (2 - t) = 2 - t$$

$$= t^2 - t - 5$$

$$= t^2 - t - 5$$

$$= t^2 - t - 5$$

$$(ج) t^6 + t^7 + t^{17} = t^6 + t^7 + t^{17}$$

$$= t^6 + t^7 + t^{17}$$

$$= t^6 + t^7 + t^{17}$$

$$= t^6 + t^7 + t^{17}$$

$$= t^6 + t^7 + t^{17}$$

حاول

احسب ما يأتي.

$$(أ) (t^2 + 4) + (t^6 + 3) \quad (ب) (2 - t)(3 + t) \quad (ج) t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$$

نواتج التعلم

يتعرّف العدد المركب

$C = A + Bt$ ويميّز مكوّنيه:

الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

ويجري العمليات الحسابية

(الجمع والطرح والضرب

والقسمة) على الأعداد المركبة.

ويضع الناتج في أبسط صورة.

عندما يكون الأسّ فرديًا، عبّر عنه باستخدام t^2 .

احسب بمعاملة t كمتغيّر.

أجب في الصورة $A + Bt$

عوض $t^2 = 1 - t$

عبّر عن كل قوة من قوى t باستخدام t^2

تصورات خاطئة

خلط الجزأين الحقيقي والتخيلي:

جمع الحدود غير المتشابهة أو

طرحها معًا بدل إبقاء الجزء

الحقيقي والجزء التخيلي

منفصلين.

أخطاء في الضرب: نسيان أن

$t \times t = t^2 = 1 - t$ عند فكّ

الأقواس.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ

قسم «حاول» ثم ناقشوا

الإجابة.

تدريب

احسب ما يأتي.

(أ) $(٧ + ٤ت) - (٣ + ٥ت)$

(ج) $(٣ - ٥ت) - (٣ - ٣ت)$

(هـ) $(٨ + ٥ت) + (٣ + ٢ت)$

(ز) $٢(١ - ٢ت)$

(ط) $٣(٢ - ٢ت) + ٣(٢ + ٢ت)$

(ك) $٩ت + ١٤ت + ١١$

(ب) $(٦ - ٥ت) + (٣ + ٤ت)$

(د) $(٣ + ٢\sqrt{٧}ت)(٣ + ٢\sqrt{٧}ت)$

(و) $\left(\frac{٢}{٧} + \frac{١}{٤}ت\right) - \left(\frac{١}{٤}ت - \frac{٢}{٥}\right)$

(ح) $\left(٢ - \frac{٢}{٥}ت\right)\left(٢ + \frac{٢}{٥}ت\right)$

(ي) $٥ت + ٣ت + ٢$

(ل) $١٥ت + ١٨ت + ١٢ت$

★ التحدي

إذا كان s عددًا حقيقيًا، فحل المعادلة:

$$(٧ - ٧ت)(٧ت + ٢س) = ١٤س٢ت٤٠$$

العمليات على الأعداد المركبة (٢)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٣-٣

الرياضيات

لاحظ!

❗ الأعداد المركبة $أ + ب٢$ و $أ - ب٢$ تُسمى **المرافقات المركبة**.

❗ حاصل ضرب الأعداد المركبة المرافقة يصبح عددًا حقيقيًا.

مثال: $(٢ + ٣ت)(٢ - ٣ت) = ٩ - ٩ت٢$

$$= ٩ - ٩(-١)$$

$$= ٩ + ٩ = ١٨$$

❗ بالنسبة للتعبيرات الكسرية التي تحتوي على أعداد تخيلية في المقام، اضرب أولًا كلاً من البسط والمقام في **المرافق المركب للمقام** لجعل المقام عددًا حقيقيًا.

مثال:
$$\frac{(٢-٣ت)(١-٣ت)}{(٢+٣ت)(٢-٣ت)} = \frac{١-٣ت}{١٨}$$

استعد

حل المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركب لكلٍّ من الأعداد المركبة الآتية.

(أ) $٢ + ٣ت$ (ب) $٧ - ١١\sqrt{٢}ت$ (ج) ٦ (د) $-٥ت$

٢ احسب ما يأتي وأجب في الصورة $أ + ب٢$.

(أ) $\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}$ (ب) $\frac{٣-٣ت}{٢}$

طريقة الحل

١ اعكس إشارة الجزء التخيلي.

(أ) $٢ - ٣ت$ (ب) $٧ + ١١\sqrt{٢}ت$ (ج) ٦ (د) $-٥ت$

(أ) $\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}$

$$= \frac{٢(٢+٣ت)}{(٢+٣ت)(٢-٣ت)} = \frac{٢(٢+٣ت+٤-٩ت)}{٢٢-٩ت٢} =$$

$$= \frac{٤+٦ت-١٨ت-٣٦}{٢٢-٩} = \frac{٤-١٢ت-٣٢}{١٣} =$$

$$= \frac{٣}{١٣} - \frac{١٢}{١٣}ت$$

نواتج التعلم

يتعرّف العدد المركب

$ع = أ + ب٢$ ويميّز مكوّنيه:

الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

ويجري العمليات الحسابية

(الجمع والطرح والضرب

والقسمة) على الأعداد المركبة.

ويضع الناتج في أبسط صورة.

إشارات أجزائها التخيلية متعاكسة.

مرافق $٢ + ٣ت$ هو $٢ - ٣ت$

مرافق $-٥ت$ هو $٥ت$

اضرب البسط والمقام في $٢ + ٣ت$

أجب في الصورة $أ + ب٢$

اضرب البسط والمقام في -٢

بسط الكسر.

أجب في الصورة أ + ب.ت.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل
قسم «حاول» ثم ناقشوا
الإجابة.

$$(ب) \frac{ت-٣}{ت٢}$$

$$\frac{٢ت٢+ت٦-}{٢ت٤-} = \frac{(ت٢-)(ت-٣)}{(ت٢-)(ت٢)} =$$

$$\frac{(١-)\times ٢+ت٦-}{(١-)\times ٤-} =$$

$$\frac{ت٦-٢-}{٤} =$$

$$\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢} =$$

حاول

حل المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركب لكلٍّ من الأعداد المركبة الآتية.

(أ) $٤ - ت$ (ب) $\sqrt{٢} + ت\sqrt{١٠}$ (ج) ٢ (د) $٨ - ت$

٢ احسب ما يأتي وأجب في الصورة أ + ب.ت.

(أ) $\frac{ت+٣}{ت٢+١}$ (ب) $\frac{ت-١}{ت}$

تدريب

حل المسائل الآتية.

١ اذكر المرافق المركب لكلٍّ من الأعداد المركبة الآتية.

(أ) $٤ + ٣$ (ب) $٨ + ٩$ (ج) $\sqrt[٣]{٨ + ت}$

(د) ٥ (هـ) $١٥ -$ (و) $\sqrt[٧]{٧}$

(ز) $٥٠ -$ (ح) $٥٠ -$

(ط) $\sqrt[٦]{٦}$

٢ احسب ما يأتي وأجب في الصورة أ + ب.ت.

(أ) $\frac{ت+١}{ت-١}$ (ب) $\frac{ت+٣}{ت+٢}$ (ج) $\frac{ت+٥\sqrt[٥]{٥}}{ت-٥\sqrt[٥]{٥}}$ (د) $\frac{ت٥}{ت٢+١}$

(هـ) $\frac{ت٥}{ت٣+٤}$ (و) $\frac{ت٣-١}{ت٢-٣}$ (ز) $\frac{١}{ت}$ (ح) $\frac{ت+٢}{ت٣}$

★ التحدي

أجر العملية المبينة واكتب إجابتك في الصورة القياسية.

$$٢٠٢٧ \left(\frac{ت(١٢-١٠)}{(ت٤+١-)(ت+٢)} \right)$$

الجذور التربيعية للأعداد السالبة

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٤-٣

الرياضيات

نواتج التعلم

يحسب الجذور التربيعية للأعداد السالبة والأعداد المركبة.

لاحظ!

عندما $0 < \sqrt{a}$ ، $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

عندما يكون داخل الجذر التربيعي عددًا سالبًا، احسب بعد التعبير عنه في **صورة بدلالة ت**.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ عبّر عن الجذرين التربيعيين لـ -٦ بدلالة ت.

٢ احسب ما يأتي.

(أ) $\sqrt{-٦} \times \sqrt{-١٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{-١٨}}{\sqrt{-٣}}$

طريقة الحل

١ الجذران التربيعيان لـ -٦ هما $\pm \sqrt{-٦} = \pm i\sqrt{٦}$

(أ) $\sqrt{-٦} \times \sqrt{-١٢}$

$= i\sqrt{٦} \times i\sqrt{١٢}$

$= i^2 \sqrt{٦ \times ١٢}$

$= -١ \times \sqrt{٧٢}$

$= -\sqrt{٧٢} = -(١٢ \times ٢) = -١٢ \times ٢ = -٢٤$

(ب) $\frac{\sqrt{-١٨}}{\sqrt{-٣}}$

$= \frac{i\sqrt{١٨}}{i\sqrt{٣}}$

$= \frac{\sqrt{١٨}}{\sqrt{٣}}$

$= \sqrt{\frac{١٨}{٣}} = \sqrt{٦} = ٢\sqrt{٣}$

عبّر أولاً بدلالة ت

عوّض $t^2 = -١$

اضرب البسط والمقام في -٣ (أو أبسط: في ت).

تصورات خاطئة

الظن بأن $\sqrt{-١}$ غير معرّف أو مستحيل: قد يعتقد الطلاب أن الأعداد السالبة لا جذور تربيعية لها إطلاقاً. بدل إدراك أن الأعداد المركبة توسّع النظام العددي ليصبح ذلك ممكناً.

الخلط في الإشارات: يفترض

بعضهم أن $\sqrt{-١} = -\sqrt{١}$ وهذا غير صحيح: والصورة

الصحيحة $\sqrt{-١} = i$.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ عبّر عن الأعداد الآتية بدلالة ت.

$$(أ) \sqrt{7} \quad (ب) \sqrt{27} \quad (ج) \sqrt{12} \quad (د) \text{ الجذران التربيعيان لـ } -12$$

٢ احسب ما يأتي.

$$(أ) \sqrt{3} \times \sqrt{6} \quad (ب) \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} \quad (ج) (\sqrt{2} + 3) \quad (د) \sqrt{2} + 3$$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ عبّر عن الأعداد الآتية بدلالة ت.

$$(أ) \sqrt{2} \quad (ب) \sqrt{9}$$

$$(ج) \sqrt{45} \quad (د) \sqrt{24}$$

$$(هـ) \sqrt{36} \quad (و) \text{ الجذران التربيعيان لـ } -2$$

$$(ز) \text{ الجذران التربيعيان لـ } -18 \quad (ح) \text{ الجذران التربيعيان لـ } -16$$

٢ احسب ما يأتي.

$$(أ) \sqrt{2} \times \sqrt{6} \quad (ب) \sqrt{28} \times \sqrt{35}$$

$$(ج) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \quad (د) \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$$

$$(هـ) \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} \quad (و) \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{98}$$

$$(ز) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \quad (ح) (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)$$

★ التحدي

$$\text{حلّ: } (2س - 8) = 10$$

تأمل

بالنظر إلى أنّ توسيع نظامنا العددي من المستقيم الحقيقي إلى المستوى ثنائي البعد أتاح لنا حساب أمور كممانعة الأنسجة ومعالجة الصوت، كيف يغيّر ذلك نظرتك إلى ما يجعل مفهومًا رياضيًا «حقيقيًا» في مقابل «تخيّل»؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حلول المعادلات التربيعية

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

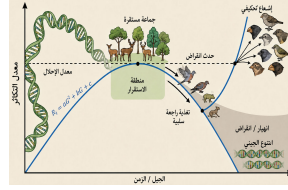
٥-٣

الرياضيات

نواتج التعلم

يحلّ المعادلات التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة.

المفهوم ٢ - المعادلات التربيعية



يدرس علماء الأحياء التطورية كيف تنتشر السمات الوراثية في المجتمعات الحيوية مع مرور الزمن، ليحدّدوا هل يتكيّف النوع أم يستقرّ أم يواجه الانقراض. ولنمذجة التفاعلات بين المتغيّرات الوراثية المنافسة تحت الانتخاب الطبيعي، يستعملون الرياضيات لتمثيل معدّلات التكاثر وأثار الأجيال. وعند نقطة التوازن بين السمات الوراثية والضغط البيئي، تتخذ المعادلات صورة تعبيرات تربيعية تساعد على التنبؤ بما إذا كان المجتمع مستقرًا أم معرضًا للانهايار.

السؤال الموجّه: كيف تساعدنا المعادلات التربيعية على تحديد ما إذا كان نظام في علوم الحياة أو الهندسة سيبقى مستقرًا أم ينهار؟

لاحظ!

❗ عندما يكون داخل الجذر التربيعي سالبًا، عبّر عنه في **صورة بدلالة**

❗ كيفية حلّ المعادلات التربيعية.

(أ) الحلّ باستخدام مفهوم الجذور التربيعية.

$$\text{حلول } \text{س}^2 = \text{أ} \text{ هي } \text{س} = \pm \sqrt{\text{أ}}$$

$$\text{بالنسبة لـ } (\text{س} + \text{م})^2 = \text{أ}, \text{ حوّل إلى } \text{س} + \text{م} = \pm \sqrt{\text{أ}}, \text{ إذن } \text{س} = -\text{م} \pm \sqrt{\text{أ}}$$

(ب) الحلّ باستخدام التحليل إلى عوامل.

$$\text{حلول } \text{س}(\text{س} - \text{أ}) = 0 \text{ هي } \text{س} = 0 \text{ أو } \text{أ}$$

$$\text{حلول } (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب}) = 0 \text{ هي } \text{س} = \text{أ} \text{ أو } \text{ب}$$

$$\text{حلّ } (\text{س} - \text{أ})^2 = 0 \text{ هو } \text{س} = \text{أ}$$

$$\text{حلول } (\text{أس} - \text{ب})(\text{جس} - \text{د}) = 0 \text{ هي } \text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ أو } \frac{\text{د}}{\text{ج}}$$

(ج) الحلّ باستخدام القانون العام.

$$\text{حلول } \text{أس}^2 + \text{بس} + \text{ج} = 0 \text{ هي } \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أج}}}{2\text{أ}}$$

استعد

حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $٠ = ٨ + ٢$ (ب) $٠ = ٩ - ٧س - ٢$ (ج) $٠ = ١١ + ٢س + ٦\sqrt{٢}$

طريقة الحل

كوّن الصورة «س» = «.

(أ) $٠ = ٨ + ٢$

أزل التربيع من الطرف الأيمن وأضف $\pm\sqrt{}$ إلى الطرف الأيسر.

$٨ - = ٢س$

عبّر بدلالة ت.

$٨ - \sqrt{\pm} = ٢س$

$٨ \sqrt{\pm} = ٢س$

$٢ \sqrt{\pm} = ٢س$

استخدم طريقة الضرب التبادلي.

(ب) $٠ = ٩ - ٧س - ٢$

$٠ = (٩ - ٢س)(١ + س)$

$١ - = ٩$ أو ٩

استخدم القانون العام.

(ج) $٠ = ١١ + ٢س + ٦\sqrt{٢}$

$\frac{١١ \times ٢ \times ٤ - ٢(٦\sqrt{٢})}{٢ \times ٢} = ٢س$

عبّر بدلالة ت.

$\frac{٦٤ - \sqrt{\pm} + ٦\sqrt{٢}}{٤} = ٢س$

$\frac{٦٤ \sqrt{\pm} + ٦\sqrt{٢}}{٤} = ٢س$

بسط الكسر.

$\frac{٨ \pm ٦\sqrt{٢}}{٤} = ٢س$

$\frac{٤ \pm ٦\sqrt{٢}}{٢} = ٢س$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $٠ = ٤ + ٢$

(ب) $٨ - = ٢(٣ - س)$

(ج) $٠ = ٣ - ٥س + ٢$

(د) $٠ = ٥ + ٢س + ٣\sqrt{٢}$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $٠ = ٤٩ + ٢س$

(ب) $٠ = ٤ - ٢س٩$

(ج) $٥ = ٢(٢ - س)$

(د) $٦ - = ٢(٦ + س)$

(هـ) $٠ = س٧ + ٢س٢$

(و) $٠ = ١٢ - س٥ + ٢س٢$

(ز) $٠ = ١ + س + ٢س$

(ح) $٠ = ٣ + س٥ - ٢س٣$

(ط) $٠ = ٥ + س٣\sqrt{٢} - ٢س٣$

(ي) $٠ = ١ + س٢\sqrt{٢} + ٢س٣$

٢ حلّ المعادلات التربيعية الآتية.

(أ) $٠ = ٢ + س - ٢س$

(ب) $١٨ - = ٢(٤ + س)$

(ج) $٠ = ١٢ - ٢س٣$

(د) $٠ = ١ - س٤ - ٢س٣$

(هـ) $٠ = ١٥ + س٨ - ٢س$

(و) $٠ = ٣ + ٢س٤$

(ز) $٠ = ١ + س٥\sqrt{٢} - ٢س٣$

(ح) $٠ = ١٥ + س١٢ - ٢س٦$

(ط) $٧ = ٢(٣ - س)$

★ التحدي

يدرس فريق بحثي اهتزازات غشاء رقيق في جهاز طّي يستعمل الموجات فوق الصوتية. والعلاقة بين سعة الاهتزاز $س$ ومعدّل انتقال الطاقة $ر$ تُعطى بالصيغة:

$$٢ + س٣\sqrt{٢} + ٢س٣ = ر$$

حدّد قيم $س$ التي تجعل النظام يبلغ حالة الاتزان (حين يكون معدّل انتقال الطاقة صفرًا). ثم وضح معنى النتيجة.

مميّز المعادلات التربيعية

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

٦-٣

الرياضيات

لاحظ!

التعبير المستخدم لتحديد نوع وعدد حلول المعادلة التربيعية $أس^٢ + بس + ج = ٠$ يُسمّى **المميّز**، ويُرمّز له بـ $د$.

$$د = ب^٢ - ٤أج$$

عندما $د < ٠$ ، يكون لها **حلّان حقيقيان مختلفان**.
عندما $د = ٠$ ، يكون لها **حلّ مكرّر (حلّ حقيقي واحد)**.
عندما $د > ٠$ ، يكون لها **حلّان تخيليان مختلفان**.

وعندما $د \leq ٠$ ، يكون لها حلول حقيقية.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $٣س^٢ + ٤س + ٧ = ٠$

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت $م$ التي تجعل المعادلة التربيعية $٢س^٢ + مس + م - ٣ - ٩ = ٠$ ذات حلول حقيقية.

٣ لتكن $ك$ ثابتاً حقيقياً. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $٢س^٢ + كس + ٣ - ك = ٠$

طريقة الحل

١ لتكن $د$ مميّز المعادلة $٣س^٢ + ٤س + ٧ = ٠$

$$د = ٤^٢ - ٦٨ = ١٦ - ٨٤ = ٧ \times ٣ \times ٤ - ٦٨ > ٠$$

إذن، يكون لها حلّان تخيليان مختلفان.

نواتج التعلّم

يحدّد طبيعة الجذرين باستخدام المميّز، ويوظّف ذلك في حلّ المسائل الرياضية.

تصورات خاطئة

سوء تفسير النتيجة. $د > ٠$:
الظنّ بأنه «لا حلول إطلاقاً»،
والصواب حلّان مركّبان. $د = ٠$:
الظنّ بأنه «لا حلول»، والصواب
حلّ حقيقي واحد مكرّر. $د < ٠$:
الظنّ بأن الحلّ «واحد فقط»،
والصواب حلّان حقيقيان
مختلفان.

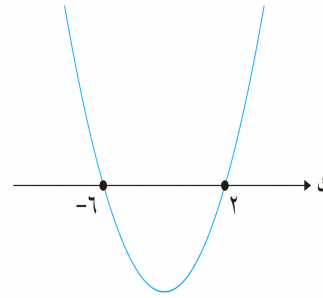
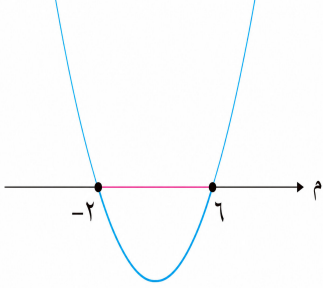
داخل الجذر التربيعي في القانون التربيعي.

عندما $د \leq ٠$ تكون الحلول حقيقية.

عوّض $أ = ٣$ ، $ب = ٤$ ، $ج = ٧$ في المميّز.

عوّض أ ب ، $p = -$ ، $p = 2$ في المميّز.

اعكس إشارة المتباينة.



٢ لتكن Δ مميّز المعادلة $س^2 - م س + م^2 - ٣ - ٩ = ٠$ وبما أنّ $٠ \leq ٠$.

$$(٢ - م)٤ - (٣ - م - ٩) \leq ٠$$

$$٢٣ - م١٢ + ٣٦ \leq ٠$$

$$٢٣ - م١٢ \geq ٣٦$$

$$٢٣ - م١٢ \geq ٣٦$$

$$٢٣ - م١٢ \geq ٣٦$$

$$\text{إذن: } ٢ - م \geq ٣٦$$

٣ لتكن د مميّز المعادلة $س^2 + ك س - ٣ = ٠$

$$د = ٤ - (٣ - ك)$$

$$١٢ - ك + ٢ = ٠$$

$$(٦ + ك)(٢ - ك) = ٠$$

$$[١] \text{ عندما } د < ٠, \text{ أي } (٢ - ك)(٦ + ك) < ٠$$

بحلّ هذه المتباينة نجد: عندما $ك > ٦$ أو $ك < ٢$ يكون لها حلّان حقيقيان مختلفان.

$$[٢] \text{ عندما } د = ٠, \text{ أي } (٢ - ك)(٦ + ك) = ٠$$

بحلّ هذه المعادلة نجد: عندما $ك = ٦$ أو $ك = ٢$ يكون لها حلّ مكرّر.

$$[٣] \text{ عندما } د > ٠, \text{ أي } (٢ - ك)(٦ + ك) > ٠$$

بحلّ هذه المتباينة نجد: عندما $ك > ٦$ أو $ك < ٢$ يكون لها حلّان تخيليان مختلفان.

تلخيص ما سبق:

عندما $ك > ٦$ أو $ك < ٢$ يكون لها حلّان حقيقيان مختلفان.

عندما $ك = ٦$ أو $ك = ٢$ يكون لها حلّ مكرّر.

عندما $ك > ٦$ أو $ك < ٢$ يكون لها حلّان تخيليان مختلفان.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلات التربيعية الآتية.

$$(أ) ٣س^2 - ٥س + ٤ = ٠ \quad (ب) ٤س^2 - ٧س - ٢ = ٠ \quad (ج) ٢٥س^2 - ١٠س + ١ = ٠$$

$$٢٥س^2 - ١٠س + ١ = ٠$$

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل المعادلة التربيعية $س^2 - ٢م س + ٢ = ٠$

ذات حلّين تخيليين مختلفين.

٣ لتكن أ ثابتًا حقيقيًا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $س^2 - أ س + ٣ = ٠$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد طبيعة حلول المعادلات التربيعية الآتية.

$$\begin{aligned} \text{(أ)} \quad ٠ &= ٣ + س^٢ & \text{(ب)} \quad ٠ &= ٩س^٢ - ١٢س + ٤ & \text{(ج)} \quad ٠ &= ٤س^٢ - ٨س + ٥ \\ \text{(د)} \quad ٠ &= ٤س^٢ - ٤س + ١ & \text{(هـ)} \quad ٠ &= ٣س^٢ - ٥س + ٥ & \text{(و)} \quad ٠ &= ٢س^٢ - س - ٢ \end{aligned}$$

٢ حلّ المسائل الآتية.

(أ) أوجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^٢ - (١ + أ)س + ٤ = ٠$ حلًا مكرّرًا.

(ب) أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^٢ + (٦ + م)س - م٢ = ٠$ حلّين تخيليين مختلفين.

(ج) أوجد مجموعة قيم الثابت م التي تجعل للمعادلة التربيعية $س^٢ - ٢م٢ + م٣ - ٣ = ٠$ حلولًا حقيقية.

★ التحدي

حلّ المسائل الآتية.

(أ) لتكن أ ثابتًا حقيقيًا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية $س^٢ + أس - أ = ٠$.

(ب) لتكن ك ثابتًا حقيقيًا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية

$$س^٢ - (ك + ٢)س + ك^٢ = ٠$$

(ج) لتكن أ ثابتًا حقيقيًا. حدّد طبيعة حلول المعادلة التربيعية

$$س^٢ - ٢(أ - ١)س + أ^٢ - ٣أ + ٤ = ٠$$

العلاقة بين الجذرين والمعاملات (١)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٧-٣

الرياضيات

لاحظ!

العلاقة بين الجذور والمعاملات

عندما يكون حلاً (جذرا) أس^٢ + بس + ج = ٠ هما α ، β .

$$\frac{\beta}{\alpha} = \beta + \alpha$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \beta\alpha$$

لإيجاد قيم التعبيرات المتعلقة بحلول المعادلات التربيعية، أوجد أولاً قيمتي $\beta + \alpha$ و $\beta\alpha$.

أعد كتابة التعبير المعطى بدلالة $\beta + \alpha$ و $\beta\alpha$ ، وحل باستخدام العلاقة بين الجذور والمعاملات.

وعلى وجه الخصوص، كثيراً ما تُستخدم التحويلات الآتية.

$$\beta\alpha^2 - \alpha(\beta + \alpha) = \beta^2 + \alpha$$

$$(\beta + \alpha)\beta\alpha^3 - \alpha(\beta + \alpha) = \beta^3 + \alpha$$

استعد

حل المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلّي المعادلة التربيعية $3x^2 - 6x - 5 = 0$.

٢ لتكن α و β حلّي المعادلة التربيعية $2x^2 - 6x - 3 = 0$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(أ) $\beta^2 + \alpha$ (ب) $\beta^3 + \alpha$

(ج) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ (د) $(1 + \beta)(1 + \alpha)$

طريقة الحل

١ $3x^2 - 6x - 5 = 0$

من العلاقة بين الجذور والمعاملات، مجموع الحلين هو $-\frac{(-6)}{3} = 2$

وحاصل ضرب الحلين هو $-\frac{(-5)}{3} = \frac{5}{3}$

نواتج التعلم

يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظفها في حل المسائل الرياضية.

تصورات خاطئة

الخلط بين المجموع وحاصل الضرب: يبدّل بعض الطلاب بينهما فيظنون أن حاصل الضرب $-\frac{b}{a}$ والمجموع $\frac{c}{a}$. وإهمال المعامل أ: يفترض بعضهم أن الصيغتين -ب وج فحسب، فينسى القسمة على أ

$$٢س٢ - ٦س - ٣ = ٠$$

أوجد أولًا قيمتي $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$.

$$\frac{٢}{٣} - = \beta\alpha, ٣ = \beta + \alpha$$

$$\beta\alpha٢ - ٢(\beta + \alpha) = ٢\beta + ٢\alpha \text{ (أ)}$$

$$\left(\frac{٢}{٣} -\right) \times ٢ - ٢٣ =$$

$$١٢ = ٣ + ٩ =$$

$$(\beta + \alpha)\beta\alpha٣ - ٢(\beta + \alpha) = ٢\beta + ٢\alpha \text{ (ب)}$$

$$٣ \times \left(\frac{٢}{٣} -\right) \times ٣ - ٢٣ =$$

$$\frac{٨١}{٢} = \frac{٢٧}{٢} + ٢٧ =$$

$$\frac{(\beta + \alpha)٢}{\beta\alpha} = \frac{\alpha٢ + \beta٢}{\beta\alpha} = \frac{٢}{\beta} + \frac{٢}{\alpha} \text{ (ج)}$$

$$\frac{٤-}{٢} = \frac{٣ \times ٢}{\frac{٢}{٣} -} =$$

$$١ + \beta + \alpha + \beta\alpha = (١ + \beta)(١ + \alpha) \text{ (د)}$$

$$\frac{٥}{٢} = ١ + ٣ + \frac{٣}{٢} - =$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

$$١ \text{ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلّي المعادلة التربيعية } ٤س٢ + ٢س - ٧ = ٠$$

$$٢ \text{ لتكن } \alpha \text{ و } \beta \text{ حلّي المعادلة التربيعية } ٢س٢ - ٤س + ٣ = ٠. \text{ أوجد قيمة التعبيرات الآتية.}$$

$$٣\beta + ٣\alpha \text{ (ب)}$$

$$٢\beta + ٢\alpha \text{ (أ)}$$

$$(١ - \beta)(١ - \alpha) \text{ (د)}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta\alpha} \text{ (ج)}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب حلّي المعادلات التربيعية الآتية.

$$\text{(أ) } ٠ = ٢ + س + س^٢ \quad \text{(ب) } ٠ = ٣س - ٧س^٢ - ٦س^٣ \quad \text{(ج) } ٠ = ٣ - ٥س + س^٢$$

٢ لتكن α و β حلّي المعادلة التربيعية $س^٢ - ٢س + ٣ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

$$\begin{aligned} \text{(أ) } & ٢\alpha + ٢\beta & \text{(ب) } & ٣\alpha + ٣\beta \\ \text{(ج) } & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} & \text{(د) } & (٢ + \beta)(٢ + \alpha) \end{aligned}$$

٣ لتكن α و β حلّي المعادلة التربيعية $س^٣ + ٦س - ١ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

$$\begin{aligned} \text{(أ) } & ٢\alpha + ٢\beta & \text{(ب) } & ٣\alpha + ٣\beta \\ \text{(ج) } & \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} & \text{(د) } & (٢ - \beta)(٢ - \alpha) \end{aligned}$$

★ التحدي

لتكن α و β حلّي المعادلة التربيعية $س^٢ - ٢س + ٣ = ٠$. أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

$$\begin{aligned} \text{(أ) } & ٢\beta\alpha + \beta^٢\alpha & \text{(ب) } & ٢(\beta - \alpha) \\ \text{(ج) } & ٣\beta + ٣\alpha & \text{(د) } & \frac{٢\alpha}{\beta} + \frac{٢\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

العلاقة بين الجذور والمعاملات (٢)

(العلاقة بين الجذرين)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٨-٣

الرياضيات

لاحظ!

❗ في المسائل التي تكون فيها العلاقة بين الحليين معلومة، لتكن α هي أحد الحليين، وللآخر، عبر عنه بدلالة α .

استعد

إذا كان الفرق بين حلي المعادلة التربيعية $x^2 - (p-1)x + 6 = 0$ يساوي ٥، أوجد قيمة الثابت m والحليين.

طريقة الحل

لتكن إحدى حلي $x^2 - (p-1)x + 6 = 0$ هي α ، يمكن التعبير عن الحل الآخر β + α

من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = p - 1 \dots\dots (أ) \\ \alpha\beta = 6 \dots\dots (ب) \end{array} \right\}$$

بحل (ب) نجد $\alpha = 2, 3$

عندما $\alpha = 2$ ، من (أ)، $\beta = 3$

كذلك، الحل الآخر في هذه الحالة هو $\alpha + \beta = 2 + 3 = 5$

عندما $\alpha = 3$ ، من (أ)، $\beta = 0$

كذلك، الحل الآخر في هذه الحالة هو $\alpha + \beta = 3 + 0 = 3$

إذن.

عندما $\alpha = 2$ ، الحليان هما ٢، ٣

عندما $\alpha = 3$ ، الحليان هما ٣، ٠

نواتج التعلم

يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظفها في حل المسائل الرياضية.

عوض $\alpha = 2$ في (أ) لإيجاد الحل.

عوض $\alpha = 3$ في (أ) لإيجاد الحل.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان أحد حلّي المعادلة التربيعية $s^2 - 8s + k = 0$ يساوي ٣ أمثال الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت k والحلّين.

٢ إذا كان الفرق بين حلّي المعادلة التربيعية $s^2 - (m+1)s + 2 = 0$ يساوي ١، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان أحد حلّي المعادلة التربيعية $s^2 + 6s + m = 0$ يساوي ٢ مثلي الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

٢ إذا كان أحد حلّي المعادلة التربيعية $s^2 - 8s + m = 1$ يساوي ٢ مثلي الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

٣ إذا كان الفرق بين حلّي المعادلة التربيعية $s^2 + 6s + m = 0$ يساوي ٤، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

٤ إذا كان الفرق بين حلّي المعادلة التربيعية $s^2 + 4s + m = 3$ يساوي ١، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

٥ إذا كانت نسبة حلّي المعادلة التربيعية $s^2 - 2s + m = 0$ هي ٢ : ٣، أوجد قيمة الثابت m والحلّين.

٦ إذا كان أحد حلّي المعادلة التربيعية $s^2 - 6s + k = 0$ هو مربع الحلّ الآخر، أوجد قيمة الثابت k والحلّين.

★ التحدي

للمعادلتين $s^2 + أس + ب = 0$ و $s^2 + بس + ج = 0$ جذر مشترك لا يساوي صفرًا، وأ $ب \neq 0$. أثبت أنّ الجذرين الآخرين هما جذرا المعادلة التربيعية $s^2 + جس + أب = 0$ ، حيث $ج \neq 0$.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تحليل التعبيرات التربيعية إلى عوامل

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

لاحظ!

لنكن α و β حلّي أس ٢ بـ $س + ج = ٠$. يمكن تحليلها إلى عوامل على النحو الآتي:

$$\text{أس } ٢ \text{ بـ } س + ج = \underline{\underline{أ(س - \alpha)(س - \beta)}}$$

استعد

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركبة.

(أ) $٢س٢ - ٣س + ٢ = ٠$

(ب) $٤س٢ + ٣س - ٣ = ٠$

طريقة الحل

(أ) بحلّ $٢س٢ - ٣س + ٢ = ٠$ باستخدام القانون التربيعي نجد أنّ $س = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤}$

إذن.

$$\left(\frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} - س \right) \left(\frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} - س \right) = ٢س٢ - ٣س + ٢$$

(ب) $٤س٢ + ٣س - ٣ = ٠$ نجد أنّ $س = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤}$

$(٣ + \sqrt{٧})(١ - س) = ٣س٢ + ٣س - ٣$

وبحلّ $٣س٢ + ٣س - ٣ = ٠$ نجد أنّ $س = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤}$

إذن، $٣س٢ + ٣س - ٣ = (٣ + \sqrt{٧})(١ - س)$

وبذلك، $٤س٢ + ٣س - ٣ = (٣ + \sqrt{٧})(١ - س)$

حاول

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركبة.

(أ) $٢س٢ + ٢س + ٥ = ٠$

(ب) $٢س٢ - ٦س + ١ = ٠$

(ج) $٤س٢ - ٦س - ٦ = ٠$

نواتج التعلّم

يحلّل المقادير التربيعية إلى عواملها في مجموعة الأعداد المركبة.

تصورات خاطئة

نسيان معامل $س٢$: كثيرًا ما يحاول الطلاب تفكيك الحد الأوسط بلا نظر إلى المعامل الرئيسي أ. وافترض أن كل تربيعية تُحلّ بسهولة: يظنّ بعضهم أن كل معادلة تربيعية تُحلّ إلى أعداد صحيحة. مُهملين الحالات التي لا يكون فيها المميز مربعًا كاملًا.

أحرص على عدم نسيان المعامل الخاص بـ $س٢$.

أحرص على عدم نسيان المعامل الخاص بـ $س٢$.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل على مجموعة الأعداد المركّبة.

$$(أ) \text{ س}^٢ + ٤\text{س} + ٥ \quad (ب) \text{ س}^٢ + ٤\text{س} + ٢$$

$$(ج) \text{ س}^٢ - ٤\text{س} + ٧ \quad (د) \text{ س}^٢ - ٢\text{س} - ١$$

$$(هـ) \text{ س}^٣ - ٥\text{س} + ٣ \quad (و) \text{ س}^٢ - ٢\text{س} - ١$$

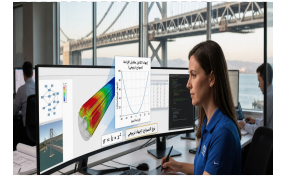
$$(ز) \text{ س}^٤ - ٩ \quad (ح) \text{ س}^٤ - ٣\text{س}^٢ + ٢$$

★ التحدي — إجهاد كابل جسر معلق

يصمّم مهندس جسراً معلقاً، ويضع نموذجاً للإجهاد على أحد كابلاته. ويتوقّف الإجهاد على مربع الإزاحة $\text{س}^٢$ ، ويُعبّر عن اتزان القوى كلّها بالمعادلة الآتية:

$$\text{م(س)} = ٦\text{س}^٤ - ٧\text{س}^٢ - ٣$$

حلّ المعادلة لتعيين القيم الممكنة لـ س ، وفتر ما تعنيه هذه القيم في سياق ثبات الكابل تحت الحمل.



المعادلات التربيعية ذات الحليين المعطيين

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٠-٣

الرياضيات

نواتج التعلم

يكون معادلة تربيعية إذا علم جذراها.

لاحظ!

معادلة تربيعية واحدة بحليين هما α ، β هي

$$س^٢ - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$$

استعد

حل المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة بمعاملات صحيحة لها العددين $\frac{١}{٣}$ و $\frac{١}{٣}$ حليين لها.

٢ أوجد عددين مجموعهما -١ وحاصل ضربهما ٢

٣ لتكن α ، β حلي المعادلة التربيعية $س^٢ + ٢س - ٤ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية معامل $س^٢$ فيها ١ ، لها $\alpha + ٢$ و $\beta + ٢$ حليين.

طريقة الحل

١ لمعادلة تربيعية حلاها $\frac{١}{٣}$ و $\frac{١}{٣}$

$$مجموع الحليين: $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$$$

$$حاصل ضرب الحليين: $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩}$$$

إذن، إحدى هذه المعادلات هي:

$$س^٢ - \frac{٢}{٣}س + \frac{١}{٩} = ٠$$

$$٩س^٢ - ٢س + ١ = ٠$$

٢ أنشئ معادلة تربيعية حلولها هما العددين. لتكن هذان العددين α ، β

$$\alpha + \beta = -١$$

$$\alpha\beta = ٢$$

بمعنى آخر، العددين هما حلا $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

$$بحل هذه المعادلة نجد $س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$$$

$$إذن، العددين هما $\frac{-٢ + \sqrt{٢٠}}{٢}$ ، $\frac{-٢ - \sqrt{٢٠}}{٢}$$$

إحدى المعادلات التربيعية التي جذراها α و β هي

$$س^٢ - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$$

اضرب طرفي المعادلة في ٩ لتصبح المعاملات أعدادًا صحيحة.

إحدى المعادلات التربيعية التي جذراها α و β هي

$$س^٢ - (\alpha + \beta)س + \alpha\beta = ٠$$

٣ بما أنّ α, β حلّا س^٢ + ٢س - ٤ = ٠، من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = -2 \text{ (أ)} \\ \alpha\beta = -4 \text{ (ب)} \end{array} \right\}$$

لتكن المعادلة التربيعية المطلوبة س^٢ + بس + ج = ٠

وبما أنّ حلّي هذه المعادلة التربيعية هما $\alpha + 2$ ، $\beta + 2$ ، من العلاقة بين الجذور والمعاملات:

$$-(\alpha + 2) - (\beta + 2) = -b$$

$$\text{من (أ)، } \alpha + \beta = -2$$

$$-(\alpha + \beta + 4) = -b$$

$$-(\alpha + \beta) - 4 = -b$$

$$2 + (\beta + 2) = c$$

$$\text{من (أ) و (ب)، } \alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -4$$

$$4 + (\beta + 2) + \beta = c$$

$$-4 = -4 + (-2) \times 2 + c = c$$

إذن، المعادلة التربيعية المطلوبة هي س^٢ - ٢س - ٤ = ٠

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة لها العددان ٣ + ٢ و ٣ - ٢ حلّين.

٢ أوجد عددين مجموعهما وحاصل ضربهما كلاهما ١

٣ لتكن α, β حلّي المعادلة التربيعية س^٢ + ٣س - ٤ = ٠. أوجد معادلة تربيعية واحدة لها α^2 و β^2 حلّين.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أنشئ معادلة تربيعية واحدة لها العددين الآتيان حلين.

(أ) $١ - ٢$ ، (ب) $١ + ٤$ ، $١ - ٤$ ، (ج) $\frac{\sqrt{٧} - ٥}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٧} + ٥}{٣}$

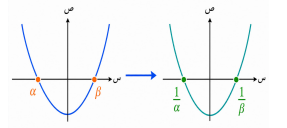
٢ أوجد عددين مجموعهما وحاصل ضربهما كما يأتي.

(أ) المجموع ٢، وحاصل الضرب ٥ (ب) المجموع ٤، وحاصل الضرب ٢

٣ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^٢ + ٢س + ٣ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية واحدة لها $\alpha + \beta^٣$ و $\alpha^٣ + \beta$ حلين.٤ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^٢ - ٢س + ٧ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية واحدة لها $\alpha^٢$ و $\beta^٢$ حلين.٥ لتكن α ، β حلّي المعادلة التربيعية $س^٢ + ٣س + ٤ = ٠$. أوجد معادلة تربيعية بمعاملات صحيحة لها $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ حلين.

★ التحدي

في الشكل المقابل: إذا كان α و β جذري المعادلة التربيعية،
فأنشئ معادلة تربيعية جذراها هما $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$.



إشارتا الحّين

الفصل الثالث الأعداد المركّبة والمعادلات

١١-٣

الرياضيات

لاحظ!

❗ في المسائل التي تكون فيها إشارتا حّلي المعادلة التربيعية معلومتين، كَوْن متباينات آنية من الشروط وحلّها.

(أ) حّان موجبان مختلفان: $\alpha < 0, \beta < 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$

(ب) حّان سالبان مختلفان: $\alpha < 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0$

(ج) حّان مختلفا الإشارة: $\alpha > 0, \beta > 0$

استعد

إذا كانت المعادلة التربيعية $2x^2 - 3x + 6 = 0$ لها حّان سالبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي m

طريقة الحل

لتكن α, β حّلي هذه المعادلة التربيعية، و Δ ممّيّزها.

من $0 < (2 - m) \times 1 \times 4 - (3 - m)^2$

$$0 < 24 - 4m - 9m^2$$

$$0 < 6 - m - 2m^2$$

$$0 < (3 - m)(2 + m)$$

إذن، $m > 2$ أو $m < 3$ (أ)

من $0 < 2 - m, 0 < \beta + \alpha$

إذن، $m > 0$ (ب)

من $0 < \beta\alpha, 0 < 6 + m$

إذن، $m < 6$ (ج)

وبإيجاد المدى المشترك بين (أ) و (ب) و (ج)،

نحصل على $2 < m < 6$

نواتج التعلّم

يستنتج العلاقات الرياضية بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملاتها، ويوظّفها في حلّ المسائل الرياضية أو في دراسة إشارتي الجذرين (حّلي المعادلة التربيعية).

أخطاء شائعة

من $0 < \beta + \alpha$ يُكتب $0 > m - 2$
فَيستنتج $m < 2$: هذا نسيان
لإشارة السالب في الصيغة.

لا حاجة إلى المميّز Δ هنا.

$$2x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{2}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المعادلة التربيعية $s^2 + 2ms + 2 = 0$ لها حلان موجبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي m

٢ إذا كان حلًا المعادلة التربيعية $s^2 - (3-m)s - 4 = 0$ مختلفي الإشارة، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي m

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المعادلة التربيعية $s^2 + 2(1-m)s + 2m^2 - 5m + 3 = 0$ لها حلان موجبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي m

٢ إذا كان حلًا المعادلة التربيعية $s^2 + 4ks - 3 = 0$ مختلفي الإشارة، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي k

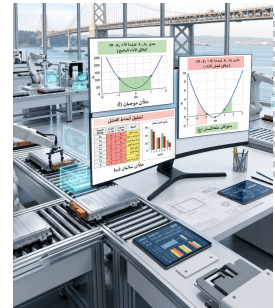
٣ إذا كانت المعادلة التربيعية $s^2 + ks + 2k + 5 = 0$ لها حلان سالبان مختلفان، أوجد مجموعة قيم العدد الحقيقي k

★ التحدي — كفاءة إنتاج البطاريات

في مصنع لإنتاج البطاريات، يتوقف معامل الكفاءة s على بارامتر تصميمي m . ونُتمدج العلاقة بين الكفاءة والبارامتر التصميمي بالمعادلة التربيعية:

$$s^2 + (1+m)s + 4 = 0$$

إذا كان للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان، فحلّ مجموعة قيم m في كل حالة: (أ) عندما يكون الحلان موجبين. وهو ما يمثل مستويات كفاءة ناجحة للبطارية. (ب) عندما يكون الحلان سالبين. وهو ما يمثل إخفاقًا في الأداء. (ج) عندما يكون أحد الحثين موجبًا والآخر سالبًا، وهو ما يمثل سلوكين متعاكسين للبطارية (نجاح في حالة وإخفاق في أخرى).



تأمل

كيف يساعدك تحليل خصائص المعادلة - كمعرفة عدد جذورها أو علاقتها بمجموع الجذور وحاصل ضربها - من دون حلّها حلًا كاملاً، على فهم الرياضيات فهماً أعمق؟

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نظرية الباقي (١)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٢-٣

الرياضيات

نواتج التعلم

يطبق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة.
ويستخدم نظرية الباقي في حل مسائل رياضية تتضمن دوال كثيرات الحدود.

تصورات خاطئة

الخط في المقسوم عليه: قد يعوّض الطالب بالقيمة الخطأ.
كان يستعمل $s = 2$ بدل $s = \frac{2}{3}$ مع $3s - 2$.

إذا كان

$f(s) \div (s - a) = q(s)$ والباقي r فإن
 $f(s) = q(s)(s - a) + r$ ومن ثم
 $f(a) = q(a)(a - a) + r = r$ لأن
 $a - a = 0$.

في الاقتصاد والعلوم الاجتماعية، كثيرًا ما يستعمل الباحثون نماذج انحدارٍ بكثيرات الحدود لتحليل الاتجاهات والتنبؤ بها. فقد يدرس الاقتصاديون كيف تتغير معدلات البطالة بمرور الزمن، أو كيف يتحول توزيع الدخل بين الفئات الاجتماعية المختلفة. وتوفّر كثيرات الحدود طريقةً مرنة لتقريب أنماط البيانات المركبة والتنبؤ بالنتائج المستقبلية. **نظرية الباقي**: تتيح تقييم النموذج سريعًا عند سنة معينة، كالتنبؤ بالبطالة في السنة الخامسة بحساب $f(5)$. و**نظرية العوامل**: تساعد على تحديد اللحظة التي يبلغ فيها النموذج الصفر، كأن تهبط معدلات الفقر إلى الصفر. و**القسمية التركيبية**: تقدّم طريقةً سريعة لاختبار القيم وتبسيط الحسابات عند تحليل مجموعات بيانات كبيرة.

السؤال الموجّه: كيف تساعد مبرهنات كثيرات الحدود الاقتصاديين وعلماء الاجتماع على اختبار القيم والتنبؤ بالاتجاهات المستقبلية بكفاءة؟

لاحظ!

! نظرية الباقي

الباقي عند قسمة كثير الحدود $f(s)$ على التعبير الخطي $s - a$ هو $f(a)$.
الباقي عند قسمة كثير الحدود $f(s)$ على التعبير الخطي $as + b$ هو $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

مثال: الباقي عند قسمة $f(s)$ على $s - 4$ هو $f(4)$.

الباقي عند قسمة $f(s)$ على $4s + 3$ هو $f\left(-\frac{3}{4}\right)$.

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة $3s^4 - 8s^3 + 5s^2 + 12$ على $3s - 2$.

٢ إذا كان الباقي عند قسمة $s^3 + 3s^2 + 1$ على $s + 3$ هو 4 ، أوجد قيمة a .

طريقة الحل

عوّض $s = \frac{2}{3}$

١ لتكن $f(s) = 3s^4 - 8s^3 + 5s^2 + 12$. الباقي عند القسمة على $3s - 2$ هو:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 12 = 12 + \left(\frac{2}{3}\right) \times 5 - \left(\frac{2}{3}\right) \times 8 - \left(\frac{2}{3}\right) \times 3 = 8$$

عوّض $s = -3$

٢ لتكن $f(s) = s^3 + 3s^2 + 1$. الباقي عند القسمة على $s + 3$ هو:

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 1 = 30 - 27 + 1 = 4$$

إذن، $4 = 30 - 27 + 1$

بحلّ هذه المعادلة نجد $a = \frac{13}{3}$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة $س^٣ - ٥س^٢ + ٤س - ١$ على $س^٢ - ١$ ٢ إذا كان الباقي عند قسمة $س^٣ + أس^٢ + ٣س + ١$ على $س - ٣$ هو ١، أوجد قيمة أ.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد الباقي عند قسمة $س^٣ + ٢س^٢ - ٣س - ٤$ على $س + ٢$ ٢ أوجد الباقي عند قسمة $س^٣ + ٣س^٢ - ٢س - ٥$ على $س + ٦$ ٣ أوجد الباقي عند قسمة $س^٦ - ٣س^٤ + ٢س^٢ - ٢$ على $س^٣ - ٢$ ٤ أوجد الباقي عند قسمة $س^٤ - ٣س^٢ - ٢س - ٤$ على $س^٢ + ٣$ ٥ إذا كان الباقي عند قسمة $س^٣ - ٣س^٢ + أس - ٤$ على $س + ١$ هو -٢، أوجد قيمة أ.٦ إذا كان الباقي عند قسمة $س^٣ + ٤س^٢ - ٥س + أ$ على $س + ٣$ هو ٨، أوجد قيمة أ.٧ إذا كان $س^٣ - ٣س^٢ + ٤س + أ$ قابلاً للقسمة على $س - ٢$ ، أوجد قيمة أ.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

★ التحدي — نموذج توزيع الدخل

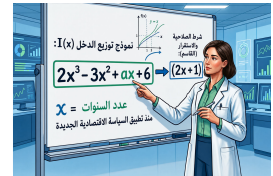
يُمنّج باحثُ توزيعِ الدخل في مجتمعٍ ما بكثير الحدود:

$$ف(س) = ٢س^٣ - ٣س^٢ + أس + ٦$$

حيث $س$ عدد السنوات منذ استحداث سياسة اقتصادية جديدة. ولكي يكون النموذج صحيحاً ومستقراً، يجب أن يكون قابلاً للقسمة على $(س + ١)$ ، وهو ما يمثّل قيدَ عداليةٍ في النظام.

١. أوجد قيمة أ التي تضمن قابلية القسمة.

٢. ناقش رياضياً: ما الذي يتغيّر لو كان المقسوم عليه $(س + ٢)$ بدلاً من ذلك؟ وكيف يؤثر اختيار المقسوم عليه في القيم الممكنة لأ؟ وهل يمكن أن يكون كثير حدود واحد قابلاً للقسمة على أكثر من عامل خطّي في الوقت نفسه؟ وبأي شروط؟



نظرية الباقي (٢)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٣-٣

الرياضيات

لاحظ!

! إذا قُسم $f(s)$ على تعبير تربيعي $(s - \alpha)(s - \beta)$.لتكن المحصلة $q(s)$ والباقي $أس + ب$ وعبر عنها بالصورة $f(s) = (s - \alpha)(s - \beta)q(s) + أس + ب$! $(s - \alpha)(s - \beta)q(s)$ تصير ٠ عند التعويض بـ α أو β .

استعد

إذا قُسم كثير الحدود $f(s)$ على $s - ١$ فكان الباقي ٣، وقُسم على $s + ٣$ فكان الباقي -٥ ، فأوجد الباقي عند قسمة $f(s)$ على $s^2 + ٢s - ٣$

طريقة الحل

لتكن المحصلة $q(s)$ والباقي $أس + ب$ عند قسمة $f(s)$ على $s^2 + ٢s - ٣$ • $f(s) = (s^2 + ٢s - ٣)q(s) + أس + ب$ $f(s) = (s - ١)(s + ٣)q(s) + أس + ب$ وبما أن الباقي عند القسمة على $s - ١$ هو ٣، فإن $f(١) = ٣$ • $f(١) = (١ - ١)(١ + ٣)q(١) + أ + ب = ٣$ $أ + ب = ٣ \dots\dots (١)$ وبما أن الباقي عند القسمة على $s + ٣$ هو -٥ ، فإن $f(-٣) = -٥$ • $f(-٣) = (-٣ - ١)(-٣ + ٣)q(-٣) + أ(-٣) + ب = -٥$ $-٣أ + ب = -٥ \dots\dots (٢)$ وبحلّ المعادلتين الآتيتين (١) و (٢) نجد $أ = ٢$ ، $ب = ١$ إذن، الباقي المطلوب هو $٢س + ١$

نواتج التعلم

يطبق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة. ويستخدم نظرية الباقي في حلّ مسائل رياضية تتضمّن دوال كثيرات الحدود.

درجة الباقي يجب أن تكون أقل من درجة المقسوم عليه.

حلّ المقسوم عليه التربيعي إلى عوامل.

الحدّ $(١ - ١)(١ + ٣)q(١) + أ + ب$ يساوي ٣.

الحدّ $(-٣ - ١)(-٣ + ٣)q(-٣) + أ(-٣) + ب$ يساوي -٥ .

حاول

إذا قُسم كثير الحدود $f(x)$ على $s - 2$ فكان الباقي ٣، وقُسم على $s + 3$ فكان الباقي -7 ، فأوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $s^2 + s - 6$

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا قُسم كثير الحدود $f(x)$ على $s - 1$ فكان الباقي ٥، وقُسم على $s + 2$ فكان الباقي -1 ، فأوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $(s - 1)(s + 2)$

٢ إذا قُسم كثير الحدود $f(x)$ على $s - 2$ فكان الباقي ٤، وقُسم على $s + 3$ فكان الباقي -1 ، فأوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $s^2 + s - 6$

★ التحدي

كثير الحدود $f(x)$ قابل للقسمة على $s - 1$ ، ويعطي باقيًا يساوي -4 عند قسمته على $s + 3$. أوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $s^2 + 2s - 3$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نظرية الباقي (٣)

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٤-٣

الرياضيات

لاحظ!

! إذا قُسم ف(س) على تعبير تربيعي (س - α)(س - β).

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب

وعبر عنها بالصورة ف(س) = (س - α)(س - β) ق(س) + أس + ب! (س - α)(س - β) ق(س) تصير ٠ عند التعويض بس α أو س = β .

استعد

كثير الحدود ف(س) يعطي باقيًا ٧س + ٦ عند قسمته على س^٢ - س - ٦، و ٤س - ٣ عند قسمته على س^٢ + ٢س - ٣. أوجد الباقي عند قسمة ف(س) على س^٢ + س - ٢

طريقة الحل

لتكن المحصلة ق(س) والباقي أس + ب عند قسمة ف(س) على س^٢ + س - ٢

$$ف(س) = (س^٢ + س - ٢) ق(س) + أس + ب$$

$$= (س + ٢)(س - ١) ق(س) + أس + ب \dots (١)$$

لتكن المحصلة ق_١(س) عند قسمة ف(س) على س^٢ - س - ٦. وبما أنَّ الباقي ٧س + ٦،

$$ف(س) = (س^٢ - س - ٦) ق_١(س) + ٧س + ٦$$

$$= (س + ٢)(س - ٣) ق_١(س) + ٧س + ٦$$

ومن ثَمَّ، ف(٢-) = ١٤ - ٦ = ٨، ومن (١) كذلك ف(٢-) = -٢ + أ + ب

$$\text{وبذلك، } -٨ + أ + ب = ٨ \dots (٢)$$

وعلى المنوال نفسه، لتكن المحصلة ق_٢(س) عند قسمة ف(س) على س^٢ + ٢س - ٣. وبما أنَّ الباقي ٤س - ٣،

$$ف(س) = (س^٢ + ٢س - ٣) ق_٢(س) + ٤س - ٣$$

$$= (س - ١)(س + ٣) ق_٢(س) + ٤س - ٣$$

ومن ثَمَّ، ف(١) = ٤ - ٣ = ١، ومن (١) كذلك ف(١) = أ + ب. وبذلك، أ + ب = ١ (٣)

وبحلّ المعادلتين الآتيتين (٢) و (٣) نجد أ = ٣، ب = -٢

إذن، الباقي المطلوب هو ٣س - ٢

نواتج التعلّم

يطبق نظرية الباقي في قسمة كثيرات الحدود بكفاءة. ويستخدم نظرية الباقي في حلّ مسائل رياضية تتضمّن دوال كثيرات الحدود.

درجة الباقي يجب أن تكون أقلّ من درجة المقسوم عليه.

راجع الدرس ٥-١: $م = ن \times ح + ر$

حاول

كثير الحدود $f(x)$ يعطي باقيًا $3x + 2$ عند قسمته على $x^2 - x - 2$ ، و $7x - 6$ عند قسمته على $x^2 + 2x - 3$. أوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x^2 - 1$.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ كثير الحدود $f(x)$ يعطي باقيًا $2x - 2$ عند قسمته على $x^2 - 2x - 3$ ، و $7x + 7$ عند قسمته على $x^2 - 4$. أوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x^2 - x - 2$.

٢ كثير الحدود $f(x)$ يعطي باقيًا $-x + 4$ عند قسمته على $x^2 - 3x + 2$ ، و $3x$ عند قسمته على $x^2 - 4x + 3$. أوجد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x^2 - 5x + 6$.

٣ كثير الحدود $f(x)$ يعطي باقيًا $x - 5$ عند قسمته على $(x + 1)^2$ ، و $6x$ عند قسمته على $x^2 - 2$. أوجد في هذه الحالة الباقي عند قسمة $f(x)$ على $(x + 1)^2(x - 2)$.

★ التحدي

أوجد بالضبط ما سيكون عليه الباقي عند قسمة $5^7 + 5^6$ على $x + 1$.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

القسمة التركيبية

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٥-٣

الرياضيات

لاحظ!

عند قسمة كثير الحدود على تعبير خطي س - أ، يُسهّل استخدام **القسمة التركيبية** إيجاد المحصلة والباقي.

استعد

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة $س^٣ + ٥س + ١١$ على $س + ٢$

طريقة الحل

خطوات القسمة التركيبية

١ استخرج معاملات $س^٣ + ٥س + ١١$

١ ٠ ٥ ١١

٢ بما أنّ القسمة على $س + ٢$ ، اكتب -٢

٢- ١ ٠ ٥ ١١

٣ انقل الرقم الأول ١ كما هو، واضربه في -٢ المكتوب على اليسار، واكتب الناتج في الصف الثاني.

٤ اجمع الرقمين عمودياً.

٢- ١ ٠ ٥ ١١
٢-
٢- ١

٥ كرّر الخطوتين ٣ و ٤ حتى تمتلئ نهاية الصف الثالث من اليمين.

٢- ١ ٠ ٥ ١١
٢- ٤ ١٨-
٢- ٩ ٧-

إذن، المحصلة والباقي المطلوبان هما:

المحصلة $س^٢ - ٢س + ٩$ ، الباقي -٧

نواتج التعلم

يستخدم القسمة التركيبية في تبسيط كثيرات الحدود وقسمتها.

تصورات خاطئة

نسيان إدراج معامل يساوي صفراً للحدود المفقودة (كحدّ $س^٢$)، والخلط بين معاملات المحصلة والباقي.

بما أنه لا يوجد حدّ $س^٢$ ، فإنّ معاملته يساوي ..

عند القسمة على $س - أ$ ، اكتب قيمة أ على اليسار.

من اليمين إلى اليسار: الباقي، ثم الحدّ الثابت للمحصلة، ثم معامل $س^٢$ ، ...، ثم معامل $س^٣$.

حاول

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة م على ن لكثيري الحدود الآتيين م ون.

$$(أ) \quad م = ٣س + ٥س - ٦, \quad ن = ١س - ١$$

$$(ب) \quad م = ٣س - ٥س - ٣س - ١, \quad ن = ٣س - ٣$$

تدرب

باستخدام القسمة التركيبية، أوجد المحصلة والباقي عند قسمة م على ن لكثيري الحدود الآتيين م ون.

$$(أ) \quad م = ٣س - ٥س + ٦, \quad ن = ٢س - ٢$$

$$(ب) \quad م = ٣س + ٢س - ٢س - ٣, \quad ن = ١س - ١$$

$$(ج) \quad م = ٤س - ٢س + ٢, \quad ن = ١س - ١$$

$$(د) \quad م = ٣س + ٥س - ٢س - ١٢, \quad ن = ٢س + ٢$$

★ التحدي

كثير الحدود ف(س) = $٤س - ٤س - ٣س - ١١س + ١٢س - ٣$ له جزء مقطوع أفقي عند $س = \frac{١}{٣}$ بتضاعف ٢. أوجد الأجزاء المقطوعة الأخرى لف(س).

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

نظرية العوامل

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٦-٣

الرياضيات

لاحظ!

! التحليل باستخدام نظرية العوامل

إذا كان كثير الحدود $f(s)$ قابلاً للقسمة على التعبير الخطي $s - a$ ، يمكن تحليله بالصورة $f(s) = (s - a)q(s)$.

! في التحليل باستخدام نظرية العوامل، أوجد قيمة a بحيث يكون $f(a) = 0$.

يسهل إيجاد قيم a بتعويض **±(مقسومات الحد الثابت)** بالترتيب.

مثال: مقسومات الحد الثابت ٦ في $s^3 + 2s^2 + 3s + 6$ هي ١، ٢، ٣، ٦. عوض $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ بالترتيب.

استعد

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل.

$$(ب) \quad s^4 - 6s^3 + 8s^2 + 8s - 16$$

$$(أ) \quad s^3 + 2s^2 - s - 2$$

طريقة الحل

بما أنّ الحدّ الثابت هو -2 ، عوض $\pm 1, \pm 2$ بالترتيب.

$$(أ) \quad \text{لتكن } f(s) = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

يمكن تحليلها على الصورة $f(s) = (s - 1)(s^2 + 3s + 2)$.

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 0$$

استخدم القسمة التركيبية.

$$\text{بقسمة } f(s) \text{ على } s - 1$$

حلّ الجزء التربيعي إلى عوامله.

$$f(s) = (s - 1)(s^2 + 3s + 2)$$

$$= (s - 1)(s + 1)(s + 2)$$

نواتج التعلّم

يطبّق نظرية العوامل في تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها.

$f(s)$ هي المحصلة عند قسمة $f(s)$ على $s - a$.

بما أنّ الحدّ الثابت هو -2 ، عوض $\pm 1, \pm 2$ بالترتيب.

يمكن تحليلها على الصورة $f(s) = (s - 1)(s^2 + 3s + 2)$.

استخدم القسمة التركيبية.

حلّ الجزء التربيعي إلى عوامله.

عوض $\pm 1, \pm 2, \pm 4 \dots$ بالترتيب.

$$(ب) \text{ لتكن } f(s) = s^4 - s^3 + s^2 + 8s - 16$$

$$f(2) = 2^4 - 2^3 + 2^2 + 8 \times 2 - 16 = 0$$

بقسمة $f(s)$ على $s - 2$.

حلّ الجزء التكعيبي إلى عوامله باستخدام نظرية العوامل.

$$f(s) = (s - 2)(s^3 - s^2 + 4s + 8)$$

$$\text{لتكن } q(s) = s^3 - s^2 + 4s + 8$$

عوض $\pm 1, \pm 2, \pm 4 \dots$ بالترتيب.

$$q(2) = 2^3 - 2^2 + 4 \times 2 + 8 = 0$$

بقسمة $q(s)$ على $s - 2$.

$$q(s) = (s - 2)(s^2 - s + 4)$$

$$\text{إذن، } f(s) = (s - 2)(s - 2)(s^2 - s + 4)$$

الجزء التربيعي لا يمكن تحليله أكثر من ذلك، لذا اترك الإجابة كما هي.

$$= \frac{(s - 2)^2 (s^2 - s + 4)}{(s - 2)^2 (s^2 - s + 4)}$$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل.

$$(ب) \text{ } s^3 - s^2 - 16s - 20$$

$$(أ) \text{ } s^3 - 2s^2 - 5s + 6$$

$$(د) \text{ } 2s^2 - 3s^3 - s - 2$$

$$(ج) \text{ } 2s^2 - 3s^3 - 5s - 2$$

$$(و) \text{ } s^4 - 4s^3 + 8s^2 - 8s + 3$$

$$(هـ) \text{ } s^4 + 3s^3 - 27s^2 + 13s + 42$$

تدريب

حلّ التعبيرات الآتية إلى عوامل.

- (أ) $٦ - ٣س - ٧س$ (ب) $٦ - ٣س + ٤س + ٢س$
- (ج) $٦ + ٣س + ٦س + ١١س$ (د) $٢ + ٣س - ٣س + ٢س$
- (هـ) $١٢ - ٣س + ٢س - ٨س$ (و) $٥ - ٣س - ٣س - ٩س$
- (ز) $٢ + ٣س - ٣س - ٢س$ (ح) $٤ + ٣س + ٢س - ٨س$
- (ط) $٣ + ٢س + ٧س + ٨س$ (ي) $٦ + ٣س + ٧س - ٢س$
- (ك) $٤ - ٣س + ٢س - ٢س$ (ل) $٢ + ٣س - ٣س + ٢س$
- (م) $٢٤ + ٣س - ٣س + ٥٠س$ (ن) $١٠ - ٣س - ٣س + ١٧س$
- (س) $٤٨ + ٣س - ٣س + ٢٠س$ (ع) $٦ - ٣س - ٣س + ١٣س$
- (ف) $٦ - ٣س - ٣س + ٢س$ (ص) $٢ - ٣س - ٣س + ٢س$

★ التحدي

لتكن ف(س) كثير الحدود المعرّف بف(س) = $٤س - ٣س + ٣س + ٢س + ١٢$. وبما أنّ كلّاً من (س - ١) و(س + ٢) عامل لـ ف(س):

١. أوجد القيمتين الدقيقتين للثابتين أ وب.

٢. ثم عيّن جميع جذور المعادلة ف(س) = ٠

تأمل

كيف يساعدنا تفكيك كثيرات الحدود إلى عوامل على فهم الرياضيات والأنظمة الواقعية فهماً أعمق؟

المعادلات ذات الدرجة العالية

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٧-٣

الرياضيات

نواتج التعلم

يحلّ المعادلات ذات الدرجة العالية.



المفهوم ٣ . المعادلات ذات الدرجة العالية

في الهندسة الطبية الحيوية، تتطلب نمذجة البنى الفيزيائية تجاوز المستقيمات المسطحة والقطوع المكافئة البسيطة. فعندما يصمّم الباحثون صمامات قلب صناعية، أو يُنمّجون سرعة سريان الدم في شريان متضيق، تتغيّر ديناميكا المائع تغيّرًا مركّبًا غير خطّي. ونُتمدّج هذه الظواهر بمعادلات كثيرات الحدود التكعيبيّة وذوات الدرجات الأعلى.

وخلالًا للمعادلات التربيعية التي تُنمّج قمّة واحدة أو قاعًا واحدًا فحسب، تستطيع المعادلة التكعيبيّة أن تُمسك بنظام يبدأ من خطّ أساس، ثم يشهد اندفاعًا مفاجئًا (كنبضة القلب)، ثم يستقرّ راجعًا إلى الاتزان.

السؤال الموجّه: كيف تُتيح لنا الخصائص الجبرية للمعادلات التكعيبيّة — كتعدّد نقاط الانعطاف، والجذور المتكرّرة، والجذور التكعيبيّة للواحد — أن تُنمّج الأنظمة بدقّة أكبر مما تُتيحه المعادلات التربيعية؟

لاحظ!

❗ معادلة من الدرجة n لها دائمًا n **حلًّا** عند النظر فيها ضمن نطاق الأعداد المركّبة (باستثناء حالات الحلول المتكرّرة).

❗ كيفية حلّ المعادلات التكعيبيّة والمعادلات من الدرجة الرابعة

❶ حلّ إلى عوامل

• للمعادلات التكعيبيّة: إذا أمكن تحويلها إلى $s^3 + a^2s + b^3 = 0$ استخدم $s^3 + a^2s + b^3 = (s + a)(s^2 - as + b^3/a)$

: وإلّا استخدم **نظرية العوامل**.

• للمعادلات من الدرجة الرابعة: إذا كانت تحتوي على حدود s^4 و s^2 والحدود الثابتة فقط عامل s^2 **كوحدة واحدة**.

: وإلّا استخدم **نظرية العوامل**.

❷ أوجد الحلول

• حلول $(s - \alpha)(s - \beta)(s - \gamma) = 0$ هي $s = \alpha, \beta, \gamma$

• وبالنسبة لـ $(s - a)(s^2 + bs + c) = 0$ ، إذا تعدّر تحليل $as^2 + bs + c$ إلى عوامل استخدم قانون الدرجة الثانية.

الحلول في هذه الحالة هي $s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

استعد

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $٠ = ٨ - ٣$

(ب) $٠ = ٦ + ٣س - ٢س٢ - ٣س٣$

(ج) $٠ = ١٨ - ٢س٧ - ٤س٤$

(د) $٠ = ١٦ - ٨س + ٢س٨ + ٣س٦ - ٤س٤$

طريقة الحل

(أ) $٠ = ٨ - ٣$

(س) $٠ = (٢ - س)(٢س + ٢س٢ + ٤س + ٤)$

إذن، الحلول المطلوبة هي $س = ٢, ٠, ١ \pm \sqrt[3]{٢}$

(ب) $٠ = ٦ + ٣س - ٢س٢ - ٣س٣$

(س) $٠ = (١ - س)(١ - س٢ - ٢س)$

(س) $٠ = (١ - س)(٣ - س)(٢ + س)$

إذن، الحلول المطلوبة هي $س = ١, ٣, ٢ -$

(ج) $٠ = ١٨ - ٢س٧ - ٤س٤$

(س) $٠ = ١٨ - ٢س٧ - ٢س٢$

(س) $٠ = (٢ + س)(٩ - س٢)$

س = ٢، ٩، أو س = ٢ -

إذن، الحلول المطلوبة هي $س = ٣ \pm \sqrt[2]{٢}, ٢$

(د) $٠ = ١٦ - ٨س + ٢س٨ + ٣س٦ - ٤س٤$

(س) $٠ = (٢ - س)(٢س٤ - ٢س٢ + ٨)$

(س) $٠ = (٢ - س)٢(٢س - ٢س٢ - ٤)$

إذن، الحلول المطلوبة هي $س = ٢, ٠, ١ \pm \sqrt[5]{٥}$

حاول

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $١ - ٣$

(ب) $٠ = ٤ + ٣س - ٢س٨ - ٤س٤$

(د) $٠ = ٢٠ - ١٦س - ٢س٢ - ٣س٣$

(و)

س = ٤ - ١٠س + ٣س٣٥ - ٢س٥٠ + ٢٤س٢

(ج) $٠ = ٢ - ٣س٣ - ٢س٢ - ٢س$

(هـ) $٠ = ٤ + ٢س٥ - ٤س٤$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المعادلات الآتية.

(أ) $٢٧ = ٣س$

(ب) $١٢٥ - = ٣س$

(ج) $١ = ٣س٨$

(د) $٠ = ٦ + ١١س + ٢س٦ + ٣س٣$

(هـ) $٠ = ١٢ - ٤س - ٢س٣ + ٣س٣$

(و) $٠ = ٢ + ٣س - ٢س٢ - ٣س٣$

(ز) $٠ = ٤ - ٢س - ٣س٣$

(ح) $٠ = ٤ - ٢س + ٢س٤ + ٣س٣$

(ط) $٠ = ١٠ - ٩س + ٢س٤ - ٣س٣$

(ي) $٠ = ١٢ - ٨س - ٢س٢ + ٣س٣$

(ك) $٠ = ٣ + ٨س + ٢س٧ + ٣س٢$

(ل) $٠ = ٨ + ١٢س + ٢س٦ + ٣س٣$

(م) $٠ = ٣٦ - ٢س٥ - ٤س٤$

(ن) $٠ = ٢٧ - ٢س٦ - ٤س٤$

(س) $٠ = ٢ - ٢س - ٤س٤$

(ع)

س $٠ = ١٨ + ٣٩س - ٢س٢٩ + ٣س٩ - ٤س٤$

(ف) $٠ = ٦ - ٢س + ٢س٣ + ٣س٤ - ٤س٤$

★ التحدي — اتران خزان مياه

لديك خزان مياه منزليّ. يدخل الماء إلى الخزان بمعدّلات مختلفة ويخرج منه بمعدّلات أخرى. وكلّها تتوقّف على مستوى الضغط س: الداخل (زيادة الماء) س٤ + س٢ + س والخارج (نقص الماء) س٣ + س٢. ولكي يبقى مستوى الماء في الخزان ثابتاً تماماً:

- اكتب المعادلة التي تُعبّر عن التوازن بين الداخل والخارج.
- حلّ المعادلة لإيجاد قيم س التي تُبقي مستوى الماء ثابتاً.
- حدّد ما إذا كانت الحلول أعداداً حقيقية فحسب، أم أن هناك حلولاً مركّبة أيضاً.



تعيين المعادلة التكعيبية

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٨-٣

الرياضيات

لاحظ!

! عند إعطاء حلٍّ لمعادلة تكعيبية، احسب بالتعويض بالحلّ في المعادلة المعطاة.

استعد

إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس + ٥ = ٠$ الحلّ $٢ + ت$ ، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.

طريقة الحل

عوض بالحلّ.

بما أنّ $س = ٢ + ت$ حلّ،

$$٠ = ٥ + (٢ + ت) + ب(٢ + ت) + أ(٢ + ت)^٣$$

حوّلها إلى الصورة أ + ب.ت.

$$٠ = (٣ + أ٣) + (٢ + ب٢) + (٧ + ٤ + ب + ١١)ت = ٠$$

إذن،

$$\begin{cases} ٣ + أ٣ = ٧ + ب٢ \\ ٧ + ٤ + ب + ١١ = ٠ \end{cases}$$

قارن الجزأين الحقيقي والتخيلي في الطرفين (انظر ١-٣).

$$\text{وبحلّ هذا نجد } أ = ٣ - ب، ١ = ٣ - ب$$

بما أنّ القوانين لا يمكن تطبيقها، استخدم نظرية العوامل.

$$٠ = ٥ + س + ٣س٣ - ٣س٣ + ٣س٣ + س٣ = ٥ + س + ٣س٣ - ٣س٣ + ٣س٣ + س٣$$

$$٠ = (٥ + س٤ - ٢س٤)(١ + س) \text{ نحصل على } (١ + س)$$

$$\text{إذن، } س = ١ - \text{أو } ٢ \pm$$

تلخيص ما سبق:

لا تُدرج $٢ + ت$ في الإجابة.

$$\underline{أ = ٣ - ب، ١ = ٣ - ب \text{ والحلان الآخران هما } س = ١ - \text{أو } ٢ - ت}$$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس + ٥ = ٠$ الحلان $٣ - ١$ ، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحل الآخر.

٢ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس - ٤ = ٠$ الحلّ $١ + ت$ ، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.

نواتج التعلّم

يحلّ المعادلات ذات الدرجة العالية، ويكوّن معادلات تكعيبية بناءً على معطيات مُعطاة.

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

- ١ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ - أس^٢ - س + ب = ٠$ الحلان ١ و ٢، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلّ الآخر.
- ٢ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس - ٨ = ٠$ الحلان ١ و ٢، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلّ الآخر.
- ٣ إذا كان أحد حلول المعادلة التكعيبية $س^٣ - كس^٢ + (٣ - ١)س - ٢٤ = ٠$ هو ٢، فأوجد قيمة العدد الحقيقي ك، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.
- ٤ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس - ٢٠ = ٠$ الحلّ ١ - ٣، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.
- ٥ إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + بس + ١٠ = ٠$ الحلّ ١ + ٢، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.

★ التحدي

إذا كان للمعادلة التكعيبية $س^٣ + أس^٢ + ب = ٠$ الحلّ ١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد قيمتي العددين الحقيقيين أ وب، وأوجد كذلك الحلين الآخرين.

الجذور التكعيبية للواحد

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

١٩-٣

الرياضيات

لاحظ!

العدد الذي يساوي ١ عند تكعيبه يُسمى **جذرًا تكعيبيًا للواحد**. وأحد هذه الجذور الذي هو عدد تخيلي يُرمز إليه بـ ω (أوميغا).

١ ω يمتلك الخصائص الآتية:

$$1 = \omega^3$$

$$0 = 1 + \omega + \omega^2$$

١ في الحسابات التي تُستخدم فيها ω ، استخدم أولاً $1 = \omega^3$ لتخفيض درجة ω .

بعد ذلك، إذا بقي ω^2 و ω ، استخدم $0 = 1 + \omega + \omega^2$ لإيجاد قيمة التعبير.

استعد

لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(ج) $\frac{1}{\omega} + \omega$

(ب) $\omega^4 + \omega^5$

(أ) ω^9

طريقة الحل

(أ) $\omega^9 = \omega^3 \times \omega^3 \times \omega^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

(ب) $\omega^4 + \omega^5 = \omega \times \omega^3 + \omega^2 \times \omega^3 = \omega \times 1 + \omega^2 \times 1 = \omega + \omega^2$

(ج) $\frac{1}{\omega} + \omega = \frac{\omega^2}{\omega^3} + \frac{\omega^3}{\omega^3} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^3} = \frac{0}{1} = 0$

حاول

لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(ج) $(\omega + 1)(\omega^2 + 1)$

(ب) $\omega + \omega^2$

(أ) ω^{10}

تدريب

١ لتكن ω أحد الجذور التكعيبية التخيلية للواحد، أوجد قيمة التعبيرات الآتية.

(ج) $1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}$

(ب) $\omega^2 + \omega^4 + \omega^5$

(أ) ω^3

نواتج التعلم

يوجد الجذور التكعيبية للواحد، ويطبق خواصها في تبسيط المقادير الجبرية.

★ التحدي

أوجد قيمة التعبير الآتي دون فك الأقواس مباشرة:
 $(\omega^2 - \omega + 1)(\omega^2 + \omega - 1)$

بما أن $1 = \omega^3$ ، $1 = \omega^3 \omega$ ، $0 = 1 + \omega + \omega^2$

وبما أن $\omega \neq 1$ ، $0 = 1 + \omega + \omega^2$

أنشئ ω^3 لاستخدام $1 = \omega^3$

بما أن $0 = 1 + \omega + \omega^2$ ، $1 - \omega^2 = \omega + \omega$

بما أن $0 = 1 + \omega + \omega^2$ ، $\omega - 1 = \omega^2 + \omega$

تعاون مع زميل

تعاون مع مجموعتك في حل قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

المعادلة التكعيبية ذات الجذور المتكررة

الفصل الثالث الأعداد المركبة والمعادلات

٢٠-٣
الرياضيات

نواتج التعلم

يحلّ المعادلات التكعيبية ذات الجذور المتكررة.

لاحظ!

❗ تُحلّ مسألة تحديد معادلة بحيث تملك معادلةً تكعيبية جذرًا مكرّرًا باستخدام **نظرية العوامل** أولًا لتحليل التعبير التكعيبي المعطى إلى الصورة $(س - أ)(س^٢ + ب س + ج)$.

❗ هناك حالتان تملك فيهما $(س - أ)(س^٢ + ب س + ج) = ٠$ جذرًا مكرّرًا.

٠ إذا كان $س^٢ + ب س + ج = ٠$ تملك $س = أ$ حلًا: **عوض $س = أ$ في $س^٢ + ب س + ج = ٠$**

٠ إذا كان $س^٢ + ب س + ج = ٠$ يملك جذرًا مكرّرًا: **أوجد الشرط الذي يجعل المميز Δ لـ $س^٢ + ب س + ج = ٠$ يساوي ٠**

استعد

أوجد قيمة الثابت $أ$ بحيث يكون للمعادلة $س^٣ - ٢س^٢ + (٣ - أ)س + أ = ٠$ جذرًا مكرّرًا.

طريقة الحل

حلّ

$س^٣ - ٢س^٢ + (٣ - أ)س + أ = ٠$ إلى عوامل باستخدام نظرية العوامل.

لتكن $ف(س) = س^٣ - ٢س^٢ + (٣ - أ)س + أ$ (١)

$ف(١ -) = ٠$

إذن، $ف(س) = (س + ١)(س^٢ - ٢س + ٣ - أ)$

$(س + ١)(س^٢ - ٢س + ٣ - أ) = ٠$ لها جذرًا مكرّرًا عندما:

$س^٢ - ٢س + ٣ - أ = ٠$ تملك $س = ١ -$ حلًا، أو $س^٢ - ٢س + ٣ - أ = ٠$ لها جذرًا مكرّرًا.

[١] عوض $س = ١ -$ في $س^٢ - ٢س + ٣ - أ = ٠$

$(١ -)^٢ - ٢(١ -) + ٣ - أ = ٠$

وبحلّ هذا نجد $أ = -٤$

وفي هذه الحالة تصير (١) $(س + ١)(س^٢ - ٢س + ٣ - أ) = ٠$ وهذا يحقق الشرط.

[٢] عندما تملك $س^٢ - ٢س + ٣ - أ = ٠$ جذرًا مكرّرًا، لتكن Δ ممّيز هذا التعبير:

$\Delta = (٣ - أ)^٢ - ٤(١ -) \times (١ -) = ٠$

وبحلّ هذا نجد $أ = \frac{٩}{٤}$

وفي هذه الحالة تصير (١) $(س + ١)(س^٢ - \frac{٩}{٤}س + \frac{١٣}{٤}) = ٠$ وهذا يحقق الشرط.

إذن، قيم $أ$ المطلوبة هي $أ = -٤$ ، $أ = \frac{٩}{٤}$

إذا كان $س^٢ - ٢س + ٣ - أ = ٠$ فلها $س = ١ -$ كحلّ.

حاول

أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس $3 - س^2 + (أ - ٢)س + أ = ٠$ جذر مكرر.

تدريب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس $3 - ٧س^2 + (أ + ٦)س - أ = ٠$ جذر مكرر.

٢ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس $3 - (أ + ١)س^2 + (٣ + أ)س - أ - ٥ = ٠$ جذر مكرر.

٣ أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس $3 + (أ - ١)س^2 - ٣(أ - ٢)س + أ - ٦ = ٠$ جذر مكرر.

★ التحدي

أوجد قيمة الثابت أ بحيث يكون لس $3 + (أ - ١)س^2 + (٣ - أ)س - أ + ٣ = ٠$ جذر مكرر.

تأمل

قد لا يكون للمعادلة التربيعية (مثل $س^2 + ١ = ٠$) حلول حقيقية. فلماذا يكون للمعادلة التكعيبية (مثل $س^3 + س + ١ = ٠$) حلّ حقيقي واحد على الأقل دائماً؟ وما الذي يكشفه هذا عن سلوك هذين النوعين من المعادلات؟

تعاون مع زميل

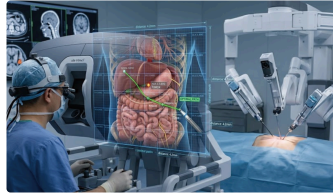
تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

التقسيم الداخلي والخارجي على خط الأعداد

١-٤
الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

المفهوم ١٠ أساسيات الهندسة الإحداثية



عندما يخطط الجراح لعملية جراحية روبوتية محدودة التوغل، تصير الدقة مسألة حياة أو موت. فذراع الروبوت تشق طريقها في فراغ ثلاثي الأبعاد داخل جسم الإنسان لتصل إلى ورم بعينه، وعليها ألا تتلف الأنسجة السليمة المحيطة أو الأوعية الدموية أو النهايات العصبية الحساسة.

ولتحقيق ذلك، ترسم برمجيات التصوير الطبى تشريح المريض على شبكة إحداثية دقيقة. ويُسند إلى كل معلم تشريحي وموضع شق وطرف أداة جراحية عنوانٌ عدديّ مضبوط من الإحداثيات. وبتتبع هذه المواضع الرياضية، يحدّد النظام الجراحي المسارات المثلى والمسافات ونقاط منتصف الحدود اللازمة لتنفيذ الإجراء بأمان.

السؤال الموجّه: كيف يتيح لنا تمثيل الفراغ المادى على شبكة من الأعداد أن نقسم المسارات بدقة، ونجد مواضع الاتزان، ونتحرك بأمان في بيئات مادية معقّدة؟

لاحظ!

❗ على خط الأعداد، يقابل عدد حقيقي واحد s النقطة f . في هذه الحالة، يُسمّى s إحداثي النقطة f ، وتُرمز النقطة f ذات الإحداثي s بالرمز $f(s)$.

❗ المسافة AB بين نقطتين $A(s_1)$ و $B(s_2)$ على خط الأعداد تُعطى بالعلاقة $AB = s_2 - s_1$.

❗ إذا كانت النقطة f على القطعة المستقيمة AB بحيث $AF : FB = m : n$ ، يُقال إنّ النقطة f تقسم القطعة المستقيمة AB **داخلياً** بالنسبة $m : n$.

❗ إذا كانت النقطة q على امتداد القطعة المستقيمة AB بحيث $AQ : QB = m : n$ ، يُقال إنّ النقطة q تقسم القطعة المستقيمة AB **خارجياً** بالنسبة $m : n$.

❗ بالنسبة للقطعة المستقيمة AB التي تصل بين نقطتين $A(s_1)$ و $B(s_2)$ على خط الأعداد:

(١) إحداثي النقطة f التي تقسم القطعة AB داخلياً بالنسبة $m : n$ هو

$$f = \left(\frac{n s_1 + m s_2}{n + m} \right)$$

(٢) إحداثي النقطة q التي تقسم القطعة AB خارجياً بالنسبة $m : n$ هو

$$q = \left(\frac{n s_1 - m s_2}{n - m} \right)$$

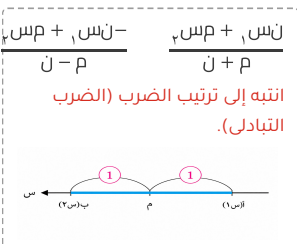
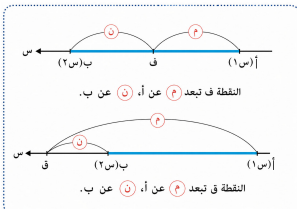
(٣) إحداثي نقطة المنتصف m هو (إذ تقسم القطعة AB داخلياً بنسبة ١ : ١):

$$m = \left(\frac{s_1 + s_2}{2} \right)$$

نواتج التعلّم

إيجاد إحداثي نقطة القسمة (الداخلية والخارجية) لقطعة مستقيمة على خط الأعداد.

بما أنّ المسافة لا تكون سالبة، نستخدم القيمة المطلقة.



استعدّ

لنقطتين أ(٤-) وب(٨)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثي النقطة ج التي تقسم القطعة أب داخلياً بالنسبة ١ : ٢

(ج) إحداثي النقطة د التي تقسم القطعة أب خارجياً بالنسبة ٣ : ٢

(د) إحداثي نقطة المنتصف م من القطعة أب.

طريقة الحلّ

$$(أ) \text{ أب} = |(-4) - 8|$$

$$= 12$$

(ب)

$$ج = \frac{8 \times 2 + (-4) \times 1}{1 + 2}$$

إذن، ج(٤)

(ج)

$$د = \frac{8 \times 2 + (-4) \times 3}{3 - 2}$$

إذن، د(٢٨-)

(د)

$$م = \frac{8 + (-4)}{2}$$

إذن، م(٢)

حاول

لنقطتين أ(٥-) وب(٧)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثي النقطة ج التي تقسم القطعة أب داخلياً بالنسبة ١ : ٢

(ج) إحداثي النقطة د التي تقسم القطعة أب خارجياً بالنسبة ٥ : ٢

(د) إحداثي نقطة المنتصف م من القطعة أب.

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ لنقطتين أ(٢-) وب(٦)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثي النقطة ج التي تقسم القطعة أب داخلياً بالنسبة ١ : ٣

(ج) إحداثي النقطة د التي تقسم القطعة أب خارجياً بالنسبة ٣ : ٥

(د) إحداثي نقطة المنتصف م من القطعة أب.

٢ لنقطتين أ(٤) وب(١٠)، أوجد المسافات أو الإحداثيات الآتية.

(أ) المسافة أب بين النقطتين.

(ب) إحداثي النقطة ج التي تقسم القطعة أب داخلياً بالنسبة ١ : ٢

(ج) إحداثي النقطة د التي تقسم القطعة أب خارجياً بالنسبة ٣ : ١

(د) إحداثي نقطة المنتصف م من القطعة أب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ الفرعين (ج) و(د) ثم ناقشوا الإجابة.

★ التحدي

البنية التحتية لمختبر أبحاث تحت السطح



يشغل فريق من علماء الأحياء البحرية موئل أبحاث غاطسًا مثبتًا على جدار خندق بحري رأسى مستقيم. ولتتبع المواضع على هذا الجدار السحيق، يستعملون محورًا مرجعيًا أحادي البعد مدورًا بالكيلومترات منسوبًا إلى مستوى سطح البحر (٠ كم). وتوجد الآن كبسولتا رصد رئيسيتان مثبتتان على جدار الخندق مباشرةً:

الكبسولة أ على عمق ٨ كم.

الكبسولة ب أقرب إلى السطح على عمق ٣ كم.

مستعينا بمعرفتك بقسمة القطعة المستقيمة، احسب المواضع والمسافات اللازمة لتوسيع شبكة أبحاثهم:

(أ) طول كبل الألياف الضوئية الواصل.

(ب) مصفوفة مجسات البيئة الداخلية - النقطة ج تقسم أب داخليًا بنسبة ١ : ٤

(ج) المحطة الخارجية في عمق الخندق - النقطة د تقسم أب خارجيًا بنسبة ٣ : ٤

(د) موقع مركز الإمداد الطارئ (م) - نقطة المنتصف م من أب

النقاط في المستوى الإحداثي

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢-٤
الرياضيات

لاحظ!

يُقسَّم المستوى الإحداثي إلى ٤ أرباع كما هو موضح في الشكل على اليمين، باستثناء المحورين الإحداثيين.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد الربع الذي تقع فيه النقاط الآتية.

- (أ) النقطة ز (٣، ٢) (ب) النقطة ح (٢، -٣) (ج) النقطة ث (-٢، ٣) (د) النقطة ي (-٢، -٣)

٢ للنقطة أ (-٣، ٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

- (أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س
(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص
(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

طريقة الحلّ

١ ارسم النقاط على المستوى الإحداثي للتوضيح.

- (أ) الربع الأول (ب) الربع الرابع
(ج) الربع الثاني (د) الربع الثالث

٢ غيّر إشارة الإحداثي الآخر.

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

ف (-٣، -٢)

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

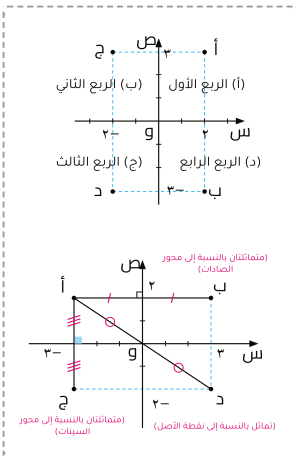
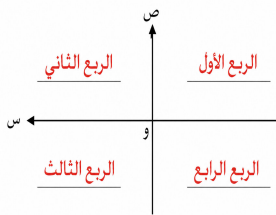
ق (٢، ٣)

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

ر (٣، -٢)

نواتج التعلّم

تحديد الربع الذي تقع فيه نقطة في المستوى الإحداثي.



حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ حدد الربع الذي تقع فيه النقاط الآتية.

(أ) النقطة أ(٢، -٤)

(ب) النقطة ب(١، ٢)

(ج) النقطة ج(٣، -٢)

(د) النقطة د(-٣، ١)

٢ للنقطة أ(١، -٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدد الربع الذي تقع فيه النقاط الآتية.

(أ) النقطة أ(-٣، ١)

(ب) النقطة ب(٢، -٨)

(ج) النقطة ج(٤، -٤)

(د) النقطة د(-٦، -٤)

(هـ) النقطة هـ(-٢، ٦)

(و) النقطة و(٣، -٣)

(ز) النقطة ز(-٥، ٧)

(ح) النقطة ح(١، -٤)

٢ للنقطة أ(-٤، ٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة

(ب) ق المتماثلة بالنسبة

(ج) ر المتماثلة بالنسبة

للمحور س

للمحور ص

لنقطة الأصل

٣ للنقطة أ(١، -٢)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة

(ب) ق المتماثلة بالنسبة

(ج) ر المتماثلة بالنسبة

للمحور س

للمحور ص

لنقطة الأصل

٤ للنقطة أ(-٣، ٤)، أوجد إحداثيات النقاط الآتية.

(أ) ف المتماثلة بالنسبة

(ب) ق المتماثلة بالنسبة

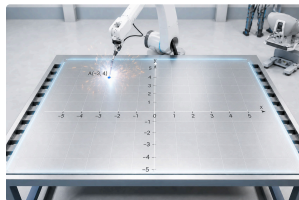
(ج) ر المتماثلة بالنسبة

للمحور س

للمحور ص

لنقطة الأصل

★ التحدي



ذراع لحام آلية مبرمجة عند النقطة أ(-٣، ٤) على لوح معدني. وللحام دعائم إسناد متطابقة. على الذراع أن تعكس هذه النقطة:

(أ) النقطة ف المتماثلة بالنسبة للمحور س

(ب) النقطة ق المتماثلة بالنسبة للمحور ص

(ج) النقطة ر المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

المسافة بين نقطتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٣-٤

الرياضيات

نواتج التعلم

حساب المسافة بين نقطتين.



لاحظ!

المسافة أب بين نقطتين أ(س_١، ص_١) وب(س_٢، ص_٢) هي

$$\sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$$

في المسائل التي تكون فيها المسافة بين نقطتين معلومة، رتب الطرفين.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين. أ(٢، ٦)، ب(٥، ١٠)

إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(٣، ٢) وب(س، ١) تساوي ٥، فأوجد قيمة س.

طريقة الحل

$$\sqrt{(٦ - ١٠)^2 + (٢ - ٥)^2}$$

$$= \sqrt{٢٤ + ٩}$$

= ٥

رتب الطرفين.

بما أنّ المسافة بين النقطتين أ وب تساوي ٥.

$$٥ = \sqrt{(٢ - س)^2 + (٣ - ١)^2}$$

$$٢٥ = (٢ - س)^2 + (٣ - ١)^2$$

وبحلّ هذه المعادلة، س = ١، ٧

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في

حلّ السؤال ٢ ثم

ناقشوا الإجابة.

★ التحدي

إذا كانت المسافة بين

النقطتين (س، ٧) و

(٣، ١ - ٥) تساوي ١٣

وحدة طول، فأوجد قيمة (أو

قيم) س.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين.

(أ) (٤، ٣)، ب(١، ٢) (ب) $(٣ - \sqrt{١٠}, ١)$ ، ب(٠، ١) (ج) نقطة الأصل و أ(٢، -٤)

إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(١ - ٣، ٣) وب(س، ١) تساوي ٥، فأوجد قيمة س.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

أوجد المسافة بين النقطتين الآتيتين.

(أ) (١، ٢)، ب(١١، ٧) (ب) أ(٣، -١)، ب(١ - ٣، ٣) (ج) نقطة الأصل و أ(٣ - ٤، ٣)

إذا كانت المسافة بين أ(٣، -١) و (ب) (٢، س) تساوي ٥، فأوجد س.

(ب) (٢، -٢، ص) تساوي $\sqrt{١٣}$ ، فأوجد ص.

إذا كانت المسافة بين النقطتين أ(١ - ٣، ٣)،

ب(س، ٣) تساوي $\sqrt{٥}$ ، فأوجد قيمة س.

النقاط المتساوية البعد عن نقطتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٤-٤
الرياضيات

نواتج التعلم

تحديد موضع نقطة متساوية البعد عن نقطتين.

لاحظ!

❗ لإيجاد نقطة متساوية البعد عن نقطتين، عَيِّن متغيَّرات لإحداثيَّيها بناءً على الشروط المعطاة.

نقطة على المحور س $\Leftarrow$ النقطة المطلوبة هي $(٠, ع)$

نقطة على المحور ص $\Leftarrow$ النقطة المطلوبة هي $(ل, ٠)$

نقطة على المستقيم ص = أس + ب $\Leftarrow$ النقطة المطلوبة هي $(ع, أ + ب)$

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيَّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ $(١, ٢-)$ وب $(٤, ٣)$.

٢ أوجد إحداثيَّ النقطة ق على ص $٢س - ١$ المتساوية البعد عن النقطتين أ $(٤, ١)$ وب $(٣, ١)$.

طريقة الحلّ

١ ليكن إحداثيا النقطة ف هما $(٠, ع)$.

بما أنها متساوية البعد عن النقطتين أ $(١, ٢-)$ وب $(٤, ٣)$.

أف = ب ف

$$\sqrt{٢(٤-) + ٢(٣-ع)} = \sqrt{٢(١-) + ٢\{(٢-) - ع\}}$$

وبتبسيطها وحلّها نحصل على $٢ = ع$

إذن، الإحداثيان المطلوبان هما ف $(٠, ٢)$

٢ ليكن إحداثيا النقطة ق هما $(ع, ٢ - ع)$.

بما أنها متساوية البعد عن النقطتين أ $(٤, ١)$ وب $(٣, ١)$.

أق = ب ق

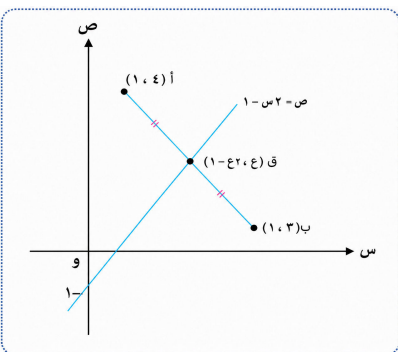
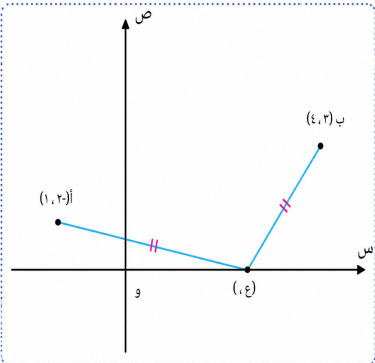
$$\sqrt{٢\{١ - (١ - ع٢)\} + ٢(٣ - ع)} = \sqrt{٢\{٤ - (١ - ع٢)\} + ٢(١ - ع)}$$

وبتبسيطها وحلّها نحصل على

$$\frac{١٣}{٨} = ع$$

وبما أنّ النقطة المطلوبة على ص $٢س - ١$ ، فإنّ

$$\underline{\underline{ق \left(\frac{٩}{٤}, \frac{١٣}{٨} \right)}}$$



حاول

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ قسم «حاول» ثم
ناقشوا الإجابة.

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيّ النقطة ف على المحور ص المتساوية البعد عن النقطتين أ(٤، ٢) وب(١، -١).

٢ أوجد إحداثيّ النقطة ق على ص = ٣س + ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(٤، -٥) و ب(٢، -٣).

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ(-١، ٢) وب(٤، ٣).

٢ أوجد إحداثيّ النقطة ف على المحور ص المتساوية البعد عن النقطتين أ(-٥، ٢) وب(٣، ٥).

٣ أوجد إحداثيّ النقطة ف على المحور س المتساوية البعد عن النقطتين أ(-١، ٢) وب(٣، ٨).

٤ أوجد إحداثيّ النقطة ق على ص = ٢س - ٣ المتساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٤) وب(٣، -٢).

٥ أوجد إحداثيّ النقطة ق على ص = س - ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(-١، ٥) وب(٧، -١).

٦ أوجد إحداثيّ النقطة ق على ص = -س + ١ المتساوية البعد عن النقطتين أ(١، ٢) وب(-٣، ٦).

★ التحدي

إذا كانت أ(٢، ١) وب(٤، ٥) وج(٣، ص) ود(س، ٠) بحيث ج أ = ج ب و د أ = د ب، فأوجد ج د.

نقاط القسمة الداخلية والخارجية على المستوى الإحداثي

٥-٤
الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحظ!

بالنسبة للقطعة المستقيمة أ ب التي تصل بين نقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ على المستوى الإحداثي:

(أ) إحداثيا النقطة ف التي تقسم القطعة أ ب داخلياً بالنسبة م : ن هما

$$\left(\frac{nx_2 + mx_1}{n+m}, \frac{ny_2 + my_1}{n+m} \right)$$

(ب) إحداثيا النقطة ق التي تقسم القطعة أ ب خارجياً بالنسبة م : ن هما

$$\left(\frac{nx_2 - mx_1}{n-m}, \frac{ny_2 - my_1}{n-m} \right)$$

(ج) بما أن نقطة المنتصف م تقسم القطعة أ ب داخلياً بالنسبة ١ : ١، فإن إحداثيها هما

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز أ ب ج الذي رؤوسه

$$Z \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \text{ هما: } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

نواتج التعلم

إيجاد إحداثي نقطة القسمة (الداخلية والخارجية) لقطعة مستقيمة على المستوى الإحداثي.

$$\frac{nx_2 + mx_1}{n+m}, \frac{ny_2 + my_1}{n+m}$$

انتبه إلى ترتيب الضرب.

استعدّ

أعطيت ثلاث نقاط أ $(-2, 3)$ وب $(3, 7)$ وج $(5, 2)$ ، أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) النقطة ف التي تقسم القطعة أ ب داخلياً بالنسبة ١ : ٢

(ب) النقطة ق التي تقسم القطعة ب ج خارجياً بالنسبة ١ : ٣

(ج) نقطة المنتصف م للقطعة ج أ

(د) إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أ ب ج

طريقة الحل

(أ)

$$\left(\frac{(3-2) \times 1 + 7 \times 2}{2+1}, \frac{(2-3) \times 1 + 3 \times 2}{2+1} \right)$$

إذن.

$$\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3} \right) \text{ ف}$$

(ب)

$$\left(\frac{(2 \times 1 + 7 \times 3) - (3 \times 3)}{3-1}, \frac{(5 \times 1 + 3 \times 3) - (2 \times 2)}{3-1} \right)$$

إذن.

$$\left(\frac{19}{2}, 2 \right) \text{ ق}$$

(ج)

$$\left(\frac{(3-2) + 2}{2}, \frac{(2-3) + 5}{2} \right)$$

إذن.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{ م}$$

(د)

$$\left(\frac{2+7+3}{3}, \frac{5+3+2}{3} \right)$$

إذن، $Z(2, 2)$

حاول

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ السؤالين ٣ و ٤
ثم ناقشوا الإجابة.

أعطيت ثلاث نقاط أ(٤، ٣-) وب(١، -٤) وج(-٣، ٤). أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

١ النقطة ف التي تقسم القطعة أ ب داخليًا بالنسبة ٣ : ١

٢ النقطة ق التي تقسم القطعة ب ج خارجيًا بالنسبة ٣ : ٢

٣ نقطة المنتصف م للقطعة أ ب

٤ إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أ ب ج.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أعطيت ثلاث نقاط أ(٣، ٢) وب(٢، -٣) وج(-٣، ٢). أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التي تقسم أ ب داخليًا بالنسبة ٤ : ١ · (ب) ق التي تقسم ب ج خارجيًا بالنسبة ٢ : ٣

(ج) نقطة المنتصف م للقطعة ج أ · (د) إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أ ب ج.

٢ أعطيت ثلاث نقاط أ(٢، -١) وب(٦، -٣) وج(١، ٧). أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التي تقسم ب ج داخليًا بالنسبة ٣ : ٢ · (ب) ق التي تقسم ج أ خارجيًا بالنسبة ٣ : ٢

(ج) نقطة المنتصف م للقطعة أ ب · (د) إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أ ب ج.

٣ أعطيت ثلاث نقاط أ(٤، -٥) وب(١، -٥) وج(٣، ٠). أوجد إحداثيات النقاط الآتية:

(أ) ف التي تقسم ب أ داخليًا بالنسبة ١ : ٢ · (ب) ق التي تقسم ب ج خارجيًا بالنسبة ١ : ٣

(ج) نقطة المنتصف م للقطعة ب ج · (د) إحداثي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ز للمثلث أ ب ج.

★ التحدي

إذا كانت أ(٢، ١) وب(٤، ٥) وج(٣، ص) ود(س، ٠) بحيث ج أ = ج ب و د أ = د ب، فأوجد ج د.

النقاط المتماثلة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٦-٤

الرياضيات

لاحظ!

النقطتان ب و ج متماثلتان بالنسبة للنقطة أ $\Leftrightarrow$ النقطة أ هي نقطة منتصف القطعة ب ج. وعند إيجاد النقاط المتماثلة، ارسم أولًا شكلًا لتفهم المواضع النسبية للنقاط. ثم افرض أن الإحداثيين المطلوبين هما (ع، ل) وعبر عن نقطة المنتصف بدلالة ع ول.

استعدّ

أوجد إحداثي النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ (-٣، ٢) بالنسبة للنقطة ف (٦، ٢).

طريقة الحل

ليكن إحداثيا النقطة ب هما (ع، ل).

يمكن التعبير عن إحداثي نقطة منتصف القطعة أب بالصورة

$$\left(\frac{ل + ٢}{٢}, \frac{ع + ٣ -}{٢} \right)$$

وبما أن هذه النقطة تنطبق على النقطة ف (٦، ٢).

$$\left. \begin{aligned} ٢ &= \frac{ع + ٣ -}{٢} \\ ٦ &= \frac{ل + ٢}{٢} \end{aligned} \right\}$$

وبحلّ هاتين المعادلتين نحصل على $٧ = ع$ و $١٠ = ل$

إذن، الإحداثيان المطلوبان هما ب (٧، ١٠)

حاول

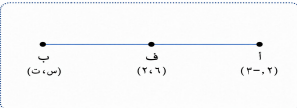
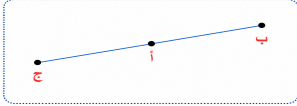
حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثي النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ (-١، ٢) بالنسبة للنقطة ف (٣، ٢).

٢ أوجد إحداثي النقطة ق المتماثلة مع النقطة ف (٢، ٣) بالنسبة للنقطة أ (-١، ٥).

نواتج التعلم

تحديد النقطة المتماثلة.



عبر عن نقطة المنتصف بدلالة ع و ل.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

- ١ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ $(-٣, ١)$ بالنسبة للنقطة ف $(٢, ٠)$.
- ٢ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ $(٧, ٤)$ بالنسبة للنقطة م $(٣, ٥)$.
- ٣ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ $(٤, -٨)$ بالنسبة للنقطة ف $(٣, -٢)$.
- ٤ أوجد إحداثيّ النقطة ق المتماثلة مع النقطة ف $(٠, -٤)$ بالنسبة للنقطة أ $(٤, -١)$.
- ٥ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ $(٤, -٢)$ بالنسبة للنقطة ف $(١, -٣)$.

★ التحدي

إذا كانت النقطتان ب $(٥, م)$ وج $(٤, ن)$ متماثلتين بالنسبة للنقطة أ $(١, -١)$ ، فأوجد م + ن.

📌 تأمل

إذا غيّرنا نسبة تقسيم قطعة مستقيمة، فكيف يتغيّر موضع النقطة على تلك القطعة؟ وكيف يساعدنا التفكير في النسب والمسافات المرجعية على فهم المواضيع في الرياضيات وفي الحياة اليومية؟

أنواع المثلثات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٧ - ٤
الرياضيات

المفهوم ٢٠ المثلثات والمستقيمات



فى الطب الحديث، تحديد هدف داخل جسم الإنسان تحديًا دقيقًا مسألة حياة أو موت. ففى أثناء الجراحة الإشعاعية التجسيمية، تُصوَّب حزم إشعاعية ضيقة متعددة من زوايا مختلفة لتتقاطع بدقة عند الورم.

وبنمذجة هذه الحزم الإشعاعية مستقيمات فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد، يحسب فيزيائيو الطب معادلاتها المضبوطة ليضمنوا تقاطعها عند نقطة واحدة (الورم) مع تقليل الضرر بالأنسجة السليمة المحيطة إلى أدنى حد. فإن لم تتقاطع المستقيمات تقاطعًا صحيحًا، أو كوّنت مثلثًا عارضًا حول الورم بدل أن تلتقى عند نقطة بعينها، أخفق العلاج.

السؤال الموجّه: كيف نستعمل المعادلات الجبرية للمستقيمات لنضمن تقاطع عدّة مسارات عند نقطة هدف واحدة مضبوطة، وكيف نحدّد الحدود الهندسية للمساحات التى تؤثر فيها؟

لاحظ!

! لتحديد نوع المثلث أ ب ج، احسب $\angle(أ ب)$ و $\angle(ب ج)$ و $\angle(ج أ)$.

! فى المثلث أ ب ج:

إذا كان $\angle(أ ب) = \angle(ب ج) = \angle(ج أ)$ ، فالمثلث أ ب ج **متطابق الأضلاع**.

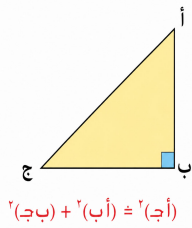
إذا كان $\angle(أ ب) = \angle(ب ج) \neq \angle(ج أ)$ ، فالمثلث أ ب ج **متطابق الساقين**.

إذا كان $\angle(أ ب) + \angle(ب ج) = \angle(ج أ)$ ، فالمثلث أ ب ج **قائم الزاوية**.

ملاحظة: إذا تحقّق الشرطان معًا، فهو **متطابق الساقين وقائم الزاوية**.

نواتج التعلّم

استعمال الإحداثيات لتحديد أنواع المثلثات (متطابق الساقين، قائم الزاوية، ... إلخ).



استعدّ

حدّد شكل المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(٤، ٤) وب(٠، ٦) وج(٣، ٢).

طريقة الحلّ

$${}^2(أب) = {}^2(٤ - ٠) + {}^2(٩ - ٦)$$

$$= ٢٥ (١)$$

$${}^2(بج) = {}^2(٠ - ٣) + {}^2(٦ - ٢)$$

$$= ٢٥ (٢)$$

$${}^2(جأ) = {}^2(٤ - ٣) + {}^2(٩ - ٢)$$

$$= ٥٠ (٣)$$

من (١) و(٢)، المثلث أ ب ج متطابق الساقين.

ومن (١) و(٢) و(٣)، بما أنّ ${}^2(جأ) = {}^2(أب) + {}^2(بج)$ ، فالمثلث أ ب ج قائم الزاوية.

إذن، المثلث أ ب ج **متطابق الساقين وقائم الزاوية** حيث $ب = ٩٠^\circ$.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(١، ٢) وب(١، ١) وج(٠، ٤).

٢ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(٣، ٢) وب(٠، ١) وج(١، ٣).

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ حدّد شكل المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(٠، ٢) وب(١، ٢) وج(١، ٤).

٢ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(٢، ٢) وب(٠، ٢) وج(٣، ٢).

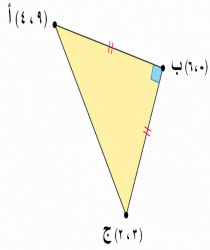
٣ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(١، ٢) وب(٨، ٥) وج(١، ٤).

٤ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(٣، ٤) وب(١، ٧) وج(٣، ٤).

٥ حدّد نوع المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(١، ١) وب(٢، ٤) وج(٤، ١).

★ التحدي

إذا كانت أ(١، ٢) وب(٢، ٤) ك(٥، ٥)، وكان المثلث أ ب ج متطابق الساقين وقائم الزاوية عند ب، فأوجد ك.



تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ السؤال ٢ ثم
ناقشوا الإجابة.

معادلة الخط المستقيم

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٨-٤
الرياضيات

لاحظ!

معادلة مستقيم موازٍ لأحد المحورين

- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١, ص_١)$ والموازي للمحور $س$ هي $ص = ص_١$
 - معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١, ص_١)$ والعمودي على المحور $س$ هي $س = س_١$
 - معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١, ص_١)$ والموازي للمحور $ص$ هي $س = س_١$
 - معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١, ص_١)$ و $(س_٢, ص_٢)$ هي $ص = ص_١$
 - معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١, ص_١)$ و $(س_٢, ص_٢)$ هي $س = س_١$
- إذا عُلم **الميل** ونقطة على المستقيم، أمكن تعيين معادلة المستقيم.
- معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(س_١, ص_١)$ وميله $أ$ هي $ص - ص_١ = أ(س - س_١)$
 - ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $(س_١, ص_١)$ و $(س_٢, ص_٢)$ حيث $س_١ \neq س_٢$ هو

$$أ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

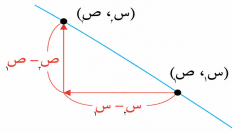
استعدّ

أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

- المستقيم المارّ بالنقطة $(٣, -٤)$ والموازي للمحور $س$
- المستقيم المارّ بالنقطة $(٣, -٨)$ والموازي للمحور $ص$
- المستقيم المارّ بالنقطتين $(٣, -١)$ و $(٣, -٢)$
- المستقيم المارّ بالنقطتين $(٣, -٢)$ و $(٣, -٥)$
- المستقيم المارّ بالنقطة $(٢, -١)$ وميله ٣
- المستقيم المارّ بالنقطتين $(١, -١)$ و $(٠, -٤)$

نواتج التعلّم

إيجاد معادلة الخط المستقيم بصورها المختلفة.

الإحداثيان $ص$ للنقطتين متساويان.الإحداثيان $س$ للنقطتين متساويان.

طريقة الحلّ

(أ) $ص = -٤$

(ب) $س = -٣$

(ج) بما أنّ الإحداثيين س للنقطتين متساويان.

$س = -٣$

(د) بما أنّ الإحداثيين ص للنقطتين متساويان.

$ص = ٣$

(هـ) $ص - (١-) = ٣(س - ٢)$

$ص = ٣س - ٧$

(و)

$ص - (١-) = \frac{(١-) - ٠}{١ - ٤} (س - ١)$

$ص = \frac{١}{٣}س - \frac{٤}{٣}$

عبر عن المعادلة بالصورة
 $ص = مس + ك$.

$$\frac{ص - ٣}{س - ٣} = \frac{١}{٣}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ السؤالين ٥ و ٦
ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

- ١ المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ٦) والموازي للمحور س
- ٢ المستقيم المارّ بالنقطة (٣، ٥) والعمودي على المحور س
- ٣ المستقيم المارّ بالنقطتين (٢، -٢) و (٢، -٢)
- ٤ المستقيم المارّ بالنقطتين (٢، -٤) و (٨، -٤)
- ٥ المستقيم المارّ بالنقطة (-٣، ٤) وميله ٢
- ٦ المستقيم المارّ بالنقطتين (-٢، ٦) و (-٤، ١)

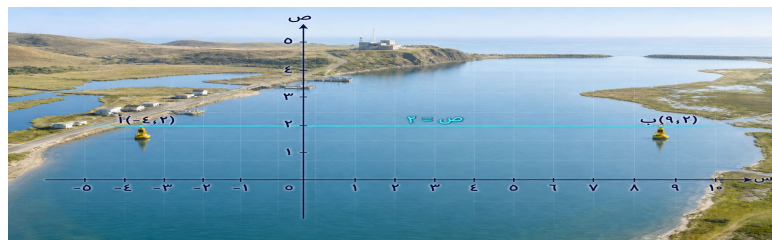
تدرب

حل المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات المستقيمات الآتية.

- (أ) المارّ بالنقطة $(-٤, ٥)$ والموازي للمحور س
 (ب) المارّ بالنقطة $(٢, ١)$ والموازي للمحور س
 (ج) المارّ بالنقطة $(-٤, ٧)$ والموازي للمحور س
 (د) المارّ بالنقطة $(١, ٢)$ والعمودي على المحور س
 (هـ) المارّ بالنقطة $(-٣, ٤)$ والعمودي على المحور س
 (و) المارّ بالنقطة $(٣, -٥)$ والعمودي على المحور س
 (ز) المارّ بالنقطة $(٢, -٧)$ والموازي للمحور ص
 (ح) المارّ بالنقطة $(٤, ٣)$ والموازي للمحور ص
 (ط) المارّ بالنقطة $(-٦, ٢)$ والموازي للمحور ص
 (ي) المارّ بالنقطتين $(٤, ٠)$ و $(٤, ٣)$
 (ك) المارّ بالنقطتين $(١, ٢)$ و $(١, -٦)$
 (ل) المارّ بالنقطتين $(-٥, ٣)$ و $(٥, ٢)$
 (م) المارّ بالنقطتين $(٢, ٣)$ و $(٣, ٣)$
 (ن) المارّ بالنقطتين $(٤, ٢)$ و $(١, ٢)$
 (س) المارّ بالنقطتين $(٣, ٦)$ و $(٢, ٦)$
 (ع) المارّ بالنقطة $(-١, ٥)$ وميله ١
 (ف) المارّ بالنقطة $(-٣, ٨)$ وميله ١
 (ص) المارّ بالنقطة $(٢, -١)$ وميله ٢
 (ق) المارّ بالنقطتين $(١, ٢)$ و $(٣, ١٠)$
 (ر) المارّ بالنقطتين $(-١, ٨)$ و $(٤, ٢)$

★ التحدي



يرصد فريق أبحاث بيئية تغيّرات منسوب البحر في مصبّ ساحليّ حسّاس. وقد أقاموا نظام شبكة يكون فيه:

المحور س يمثّل المسافة من محطة الأبحاث المركزية.

المحور ص يمثّل ارتفاع سطح البحر المحليّ.

وفي أثناء دراسة للمدّ والجزر، سجّلت المجسّات في محطّتي رصد مختلفتين ارتفاعين متطابقين ومستقرّين لسطح البحر:

المجسّ الغربي عند الإحداثيات $(-٢, ٤)$.

المجسّ الشرقي عند الإحداثيات $(٩, ٢)$.

ولرسم الحدّ المنتظم لمنسوب المياه هذا عبر المصبّ، يحتاج الفريق إلى إيجاد معادلة الحدّ المستقيم الواصل بين هذين المجسّين.

تطبيقات معادلة الخط المستقيم

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٩-٤
الرياضيات

نواتج التعلم

معادلة الخط المستقيم
بصورها المختلفة، وتطبيقها
في مواقف هندسية.

لاحظ!

المعادلة التي على الصورة أس + ب ص + ج = ٠ (حيث أ ≠ ٠ أو ب ≠ ٠ أو ج ≠ ٠) تمثل هي أيضًا خطًا مستقيمًا.

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا عُلم **الميل** ونقطة على المستقيم.
يمكن إيجاد ميل المستقيم باستخدام **نقطتين عليه**.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(٣، ٢) وب(٤، ١) وج(٤، ١ - ٢) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ج.

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س - ٣ص + ١ = ٠ و ٣س - ٢ص + ١ = ٠.

طريقة الحلّ

١ معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين أ(٣، ٢) وب(٤، ١ - ٢) هي:

$$\text{ص} - ٣ = \frac{٣ - ١}{٢ - ٤} (\text{س} - ٢)$$

وبتبسيطها نحصل على ص - ٢ = ٣س + ٧ (١)

وبما أنّ (١) تمرّ بالنقطة ج(٤، ١ - ٢) :

$$٧ + (١ - ٢)٢ = ٤ - ٢$$

وبحلّها نحصل على ٧ = ٤

٢ ٢س - ٣ص + ١ = ٠ (١)

٣س - ٢ص + ١ = ٠ (٢)

وبحلّ هذا النظام أنّيًا نحصل على س = ١ وص = ١

ومعادلة المستقيم المارّ بالنقطتين (١، ١) و(٣، ١ - ٢) هي:

$$\text{ص} - ١ = \frac{١ - ٣}{١ - ١} (\text{س} - ١)$$

أي ٢ - ص = ٠

أوجد معادلة المستقيم من
نقطتين معلومتين الإحداثيات.

عوّض بإحداثيّ النقطة ج في (١).

حلّ معادلتَي المستقيمين أنّيًا
لإيجاد نقطة التقاطع.

إحداثيّ نقطة تقاطع (١) و(٢) هما
(١، ١).

اكتب الإجابة بالصورة
أس + ب ص + ج = ٠ كما في
السؤال.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(٢، ٥) وب(٤، ٩) وج(-١، ٤) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص - ١٠ = ٠ و س + ٣ص - ٧ = ٠، والمارّ بالنقطة (٥، ٦).

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقاط الثلاث أ(١، -١) وب(-٢، ٣) وج(٤، ٤) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٢ إذا كانت النقاط الثلاث أ(١، ٢) وب(٣، ١) وج(٤، -١) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

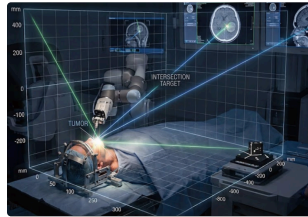
٣ إذا كانت النقاط الثلاث أ(-٣، ٩) وب(٥، ٧) وج(٤، ٣ - ٤) تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة الثابت ع.

٤ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٥ص - ١ = ٠ و س + ٨ص - ٦ = ٠، والمارّ بالنقطة (١، ٢).

٥ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص - ٤ = ٠ و س - ٣ص - ١ = ٠، والمارّ بالنقطة (-٣، ١).

★ التحدي

توجيه إبرة الخزعة الآلية



في الجراحة المُعانة آلياً، يوجّه نظام حاسوبي إبرة خزعة إلى ورم عميق. ويقع الورم الهدف عند نقطة التقاطع المضبوطة لمسارَي تصوير تشخيصي (مُنمذَجين مستقيمين على شبكة إحداثية، حيث الوحدة الواحدة = ملليمتر واحد):

• مسار المسح الليزري أ: $٦س + ٥ص + ٧ = ٠$

• مسار المسح الليزري ب: $٣س - ٢ص + ٥ = ٠$

التحديّ السريّ: ذراع الروبوت الجراحي مثبتة عند نقطة أصل النظام (٠، ٠) (نقطة المعايرة الأساسية). ولإجراء الخزعة، على الذراع أن تُدخل إبرة صلبة على مسارٍ مستقيم تمامًا من نقطة الأصل (٠، ٠) مباشرةً إلى الورم عند نقطة التقاطع.

وعلى مهندسي البرمجيات حساب المعادلة الخطية المضبوطة لمسار الإبرة هذا لبرمجة مسار ذراع الروبوت.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٠-٤

الرياضيات

نواتج التعلم

تطبيق شرطى توازى
المستقيمات وتعامدها لحل
مسائل هندسية.

لاحظ!

المعادلة التى على الصورة $أس + ب ص + ج = ٠$ (حيث $أ \neq ٠$ أو $ب \neq ٠$) تمثل هى أيضًا خطًا مستقيمًا.

المسائل المتعلقة بالمستقيمات المتوازية أو المتعامدة تستعمل **الميل**. فللمستقيمين

$$ص = م_١ س + ك_١ \text{ و } ص = م_٢ س + ك_٢:$$

المستقيمان متوازيان $\Leftrightarrow م_١ = م_٢$ أى أنّ الميلين متساويان.

المستقيمان متعامدان $\Leftrightarrow$

$$م_١ م_٢ = -١$$

، أى أنّ الميلين مقلوبان متعاكسان فى الإشارة.

حلّ المسائل المتعلقة بالمستقيمات المتوازية أو المتعامدة بتحويل المعادلة إلى الصورة

$$ص = م س + ك.$$

استعد

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أىّ المستقيمات الآتية متوازية وأيّها متعامدة.

$$(أ) ص = ٢ س + ٣ \quad (ب) ص = -٣ س + ٢ \quad (ج) ص = ٣ س - ١ + ١ = ٣ س$$

$$(د) ص = ٢ س - ١ = ٢ س - ١ \quad (هـ) ص = ٣ س + ٣ = ٣ س + ٣$$

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(٢, -٤)$ والموازى للمستقيم $ص = ٣ س - ٢ + ١ = ٣ س - ١$.

٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $(٢, -٥)$ والعمودى على المستقيم $ص = ٥ س + ١ + ١ = ٥ س + ٢$.

طريقة الحل

حوّل المعادلة إلى الصورة
ص = م س + ك.

١ أوجد ميل كل مستقيم.

(أ) ص = ٢س + ٣، الميل ٢

(ب) ص = ٣س - ٢، الميل -٣

(ج) ص = ٣س - ١، الميل ٣

$$ص = ٣س + \frac{1}{3}$$

الميل ،

$$\frac{1}{3}$$

(د) ص = ٢س - ١، الميل ٢

ص = ٢س - ١، الميل ٢

(هـ) ص = ٣س + ٣، الميل ٣

$$ص = -\frac{1}{3}س - ١$$

الميل ،

$$-\frac{1}{3}$$

اختر زوايا الميول المتساوية.

المستقيمان المتوازيان هما (أ) و(د).

اختر زوايا الميول المقلوبة
المتعاكسة في الإشارة.

والمستقيمان المتعامدان هما (ب) و(ج).

حوّل إلى الصورة ص = م س + ك
وأوجد الميل.

٢ ص = ٢س - ١ + ٣

$$ص = \frac{3}{2}س + \frac{1}{2}$$

الميل ،

$$\frac{3}{2}$$

إذن، المستقيم الموازي المطلوب يمرّ بالنقطة (٢، -٤) وميله

$$\frac{3}{2}$$

ميل المستقيم الموازي هو الميل
نفسه.

اجعل المعادلة على الصورة
الواردة في السؤال
(أس + ب ص + ج = ٠).

$$ص - (-٤) = \frac{3}{2}(س - ٢)$$

وبتبسيطها نحصل على ص = ٣س - ١٤

٣ ص = ٣س + ٥ + ١

$$ص = \frac{3}{5}س - \frac{1}{5}$$

الميل ،

$$\frac{3}{5}$$

إذن، المستقيم العمودي المطلوب يمرّ بالنقطة (٢، ٥) وميله

$$-\frac{5}{3}$$

ميل المستقيم العمودي هو
المقلوب المعاكس في الإشارة.

$$ص - ٥ = -\frac{5}{3}(س - ٢)$$

وبتبسيطها نحصل على ص = ٣س + ٢٥

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أيّ المستقيمات الآتية متوازية وأيها متعامدة.

$$\begin{array}{lll} \text{(أ)} \text{ ص } ٣ = ١ + \text{س} & \text{(ب)} \text{ ص } ٤ = ١ - \text{س} & \text{(ج)} \text{ ص } -٤ = \text{س} - ٧ \\ \text{(د)} \text{ ص } ٦ - ٢ = \text{ص} & \text{(هـ)} \text{ ص } ٨ + ٢ = \text{ص} - ٣ & \text{(و)} \text{ ص } ٤ + \text{س} = ٠ \end{array}$$

٢ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، ٣) والموازي للمستقيم $\text{ص} + ٦ = ٣ - \text{س}$.٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ١) والعمودي على المستقيم $\text{ص} + ٢ = ٣ + \text{س}$.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ عيّن أيّ المستقيمات الآتية متوازية وأيها متعامدة.

$$\begin{array}{lll} \text{(أ)} \text{ ص } ٣ = ١ - \text{س} & \text{(ب)} \text{ ص } -٣ = ٤ + \text{س} & \text{(ج)} \text{ ص } = ٣ - \text{س} \\ \text{(د)} \text{ ص } ٦ + ٢ = ٥ + \text{ص} & \text{(هـ)} \text{ ص } ٢ - ٢ = ١ - \text{ص} & \text{(و)} \text{ ص } ٢ - ٢ = ٠ + \text{س} \end{array}$$

٢ عيّن أيّ المستقيمات الآتية متوازية وأيها متعامدة.

$$\begin{array}{lll} \text{(أ)} \text{ ص } ٢ = ١ - \text{س} & \text{(ب)} \text{ ص } -٤ = \text{س} + ٤ & \text{(ج)} \\ \text{(د)} \text{ ص } + ٣ = ٣ + \text{ص} & \text{(هـ)} \text{ ص } ٢ + ٣ = ٨ + \text{ص} & \text{(و)} \text{ ص } ٦ - ١ = ٣ + \text{س} \end{array}$$

٣ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، ٢) والموازي للمستقيم $\text{ص} - ٢ = ٥ + \text{س}$.٤ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، ٢) والموازي للمستقيم $\text{ص} + ٢ = ٣ + \text{س}$.٥ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٣، ١) والموازي للمستقيم $\text{ص} + ٢ = ١ + \text{س}$.٦ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ٥) والعمودي على المستقيم $\text{ص} + ٢ = ١ - \text{س}$.٧ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (١، ٣) والعمودي على المستقيم $\text{ص} - ٢ = ٣ + \text{س}$.

٨ أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٢، ٥) والعمودي على المستقيم

$$\text{ص} - ٢ = ٧ - \text{س}$$

★ التحدي

للمستقيمات ل، م ول: $\text{ص} + ٢ = ١٠ - \text{س}$ ول: $\text{ص} + ٢ = ٥ + \text{س}$ ول: $\text{ص} + ٤ = ١ - \text{م}$ إذا كان ل، م ول، ل، ل، فأوجد
$$\frac{م}{ل}$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ السؤال ١ ثم
ناقشوا الإجابة.

محور القطعة المستقيمة والنقاط المتماثلة بالنسبة لمستقيم

٤-١١
الرياضيات

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

لاحظ!

- بما أن محور القطعة المستقيمة (أب) عمودى على المستقيم أب ويمرّ بنقطة منتصف القطعة (أب)، فإنه يُوجد باستعمال ميل المستقيم (أب) وإحداثيّ نقطة منتصف القطعة (أب).
- لإيجاد إحداثيّ النقطة ب(ع، ل) المتماثلة مع النقطة أ بالنسبة للمستقيم ل، نعبر عن الشرطين الآتيين بمعادلتين ونحلّهما آنياً: القطعة المستقيمة (أب) عمودية على ل، ونقطة منتصف (أب) تقع على المستقيم ل.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

- إذا كانت النقطتان أ(٥، ١١) وب(١، -١)، فأوجد معادلة محور القطعة المستقيمة (أب).
- أوجد إحداثيّ النقطة ب المتماثلة مع النقطة أ(-٤، ٣) بالنسبة للمستقيم $٣س - ص + ٥ = ٠$.

طريقة الحلّ

ميل المستقيم (أب) هو

$$٣ = \frac{١١ - (-١)}{٥ - ١}$$

، فميل المستقيم العمودى عليه هو

$$-\frac{١}{٣}$$

وكذلك، إحداثيّ نقطة منتصف القطعة (أب) هما

$$\left(\frac{١ + ١١}{٢}, \frac{١ + ٥}{٢} \right)$$

أى (٣، ٥).

إذن، محور القطعة (أب) مستقيم يمرّ بالنقطة (٣، ٥) وميله

$$-\frac{١}{٣}$$

، فيكون:

$$٣س - ص + ٥ = ٠ \quad (١)$$

وبتبسيطها نحصل على $٣س + ٥ = ١٨$.

ليكن إحداثيّ النقطة ب هما (ع، ل)، وليكن المستقيم $٣س - ص + ٥ = ٠$ هو ل.

ميل المستقيم (أب) هو

$$\frac{٣ - ل}{٤ + ع}$$

، وميل ل هو ٣

وبما أنّ (أب) $\perp$ ل، فإنّ

$$\frac{١}{٣} = \frac{٣ - ل}{٤ + ع}$$

وبتبسيطها نحصل على $٣ + ع - ٥ = ٠$ (١)

وكذلك، بما أنّ إحداثيّ نقطة منتصف القطعة (أب) وهما

$$\left(\frac{ل + ٣}{٢}, \frac{ع + ٤}{٢} \right)$$

يقعان على ل:

$$٠ = ٥ + \frac{ل + ٣}{٢} - \frac{ع + ٤}{٢} \times ٣$$

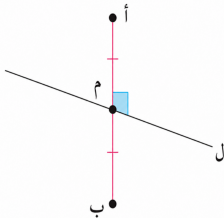
وبتبسيطها نحصل على $٣ - ل - ع = ٥$ (٢)

وبحلّ (١) و(٢) آنياً نحصل على $ع = ٢$ و $ل = ١$

إذن، إحداثيّ النقطة ب هما ب(٢، ١).

نواتج التعلّم

استنتاج معادلة محور القطعة المستقيمة وتعيين نقاط التماثل بالنسبة لمستقيم، وتطبيق هذين المفهومين فى سياقات هندسية.



ميل المستقيم العمودى هو المقلوب المعاكس فى الإشارة.

حوّل ل إلى $٣س - ص + ٥ = ٠$ لإيجاد الميل.

ميل المستقيم العمودى هو المقلوب المعاكس فى الإشارة.

عوض بـ

$$٣س = \frac{ع + ٤}{٢}$$

و

$$٣س = \frac{ل + ٣}{٢}$$

فى معادلة ل.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت النقطتان أ(١-، ٢) وب(٣، -٤)، فأوجد معادلة محور القطعة المستقيمة (أب).

٢ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتمثلة مع النقطة أ(٠، ٤) بالنسبة للمستقيم $٢س - ص - ١ = ٠$.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات محاور القطع المستقيمة أب الآتية.

(أ) أ(٢، -٣) ، ب(٢، ١) ، ب(٥، -٢) (ب) أ(١-، ٢) ، ب(٤، -٤) (ج) أ(٠، ٦) ، ب(٤، ٤)

٢ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتمثلة مع النقطة أ(١، ٢) بالنسبة للمستقيم $٢س + ص - ١٠ = ٠$.

٣ أوجد إحداثيّ النقطة ب المتمثلة مع النقطة أ(٤، -١) بالنسبة للمستقيم

$$٤س - ٢ص - ٣ = ٠$$

★ التحدي

فى نظام ليزر جراحى للعيون، يُنمذج خطّ ليزر التصوير بالمعادلة

١٧٨

$ص = ٢س$. وإذا وُضع مجسّ معايرة عند النقطة أ(٥، ٠)،

وضع مستقبل الإشارة عند النقطة ب، وهى الانعكاس

المضبوط للنقطة أ حول خطّ الليزر.

أوجد إحداثيّ النقطة الهدف ب لضمان دقّة معايرة النظام.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى

حلّ السؤال ٢ ثم

ناقشوا الإجابة.

المسافة بين نقطة ومستقيم

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٢-٤
الرياضيات

نواتج التعلم

حساب المسافة العمودية من نقطة إلى مستقيم، وتطبيق هذه المهارة في حل مسائل هندسية.

لاحظ!

المسافة د بين النقطة (س، ص) والمستقيم أس + ب ص + ج = ٠ هي:

$$د = \frac{|أس + ب ص + ج|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

لإيجاد طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم، يكفي إيجاد المسافة بين النقطة والمستقيم.

استعدّ

أوجد القيم الآتية.

المسافة د بين النقطة (١، ٢-) والمستقيم ٣س - ٢ص + ٥ = ٠

طول العمود وح المرسوم من نقطة الأصل و إلى المستقيم ٣س - ص = ٥

طريقة الحلّ

$$\begin{aligned} د &= \frac{|٥ + ١ \times (٢-) + (٢-) \times ٣|}{\sqrt{٣^2 + (-٢)^2}} \\ &= \frac{|٣ - ١|}{\sqrt{١٣}} \\ &= \frac{٣}{\sqrt{١٣}} \\ &= \frac{٣\sqrt{١٣}}{١٣} \end{aligned}$$

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستقيم هو المسافة بين النقطة والمستقيم.

وبتحويل ٣س - ص = ٥ نحصل على ٣س - ص - ٥ = ٠ فيمكن استعمال القانون.

$$\begin{aligned} و &= \frac{|٥ - ٠ \times (١-) + ٠ \times ٣|}{\sqrt{٣^2 + (-١)^2}} \\ &= \frac{١٠}{\sqrt{١٠}} \end{aligned}$$

حوّل إلى الصورة

أس + ب ص + ج = ٠

حاول

أوجد القيم الآتية.

١ المسافة بين النقطة (٣، ٢) والمستقيم $ص + ٢س - ٤ = ٠$

٢ طول العمود المرسوم من النقطة (١، ٥) إلى المستقيم $ص = ٣س - ٢$

تدرب

أوجد القيم الآتية.

١ المسافة بين النقطة (٣، ٢) والمستقيم $ص - ٢س + ٦ = ٠$

٢ المسافة بين النقطة (٣، ٧) والمستقيم $ص = ١٢س - ٥$

٣ المسافة بين النقطة (٨، ١) والمستقيم $ص = ٢س - ٣$

٤ المسافة بين نقطة الأصل والمستقيم $ص - ٤س - ٥ = ٠$

٥ طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٣) إلى المستقيم $ص + ٢س + ١ = ٠$

٦ طول العمود المرسوم من النقطة (٣، ٤) إلى المستقيم $ص + ٤س - ٥ = ٠$

٧ طول العمود المرسوم من النقطة (١، ٢) إلى المستقيم $ص = ٣س + ١$

★ التحدي

في الجراحة الإشعاعية التجسيمية، تُنمذج حزمة إشعاع ضيقة بالمستقيم

$$ص = \frac{١}{٣}س + ٢$$

. ويقع مركز عصب حرج (نُموذج نقطة) قريبًا منها عند ف(١، ٥).

ولمنع الضرر الإشعاعي، على فيزيائي الطب حساب أقصر مسافة (عمودية) من المركز العصبى إلى مسار حزمة الإشعاع. أوجد هذه المسافة للتأكد من استيفائها هامش الأمان المطلوب.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حل السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

مساحة المثلث

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٣-٤

الرياضيات

لاحظ!

! كيف نوجد مساحة المثلث أ ب ج على المستوى الإحداثي:

• للقاعدة: أوجد المسافة بين النقطتين أ وب.

• للارتفاع: أوجد المسافة بين النقطة ج والمستقيم (أ ب).

استعدّ

أوجد مساحة المثلث أ ب ج الذي رؤوسه أ(١، ١) وب(٣، ٧) وج(-٣، -١).

طريقة الحلّ

$$(أ ب) = \sqrt{2(1-7) + 2(1-3)} = \sqrt{10} \quad (١)$$

$$= 2\sqrt{10} \quad (١)$$

$$\bullet \text{ معادلة المستقيم (أ ب) هي ص - ١ = } \frac{1-7}{1-3} (\text{س} - ١)$$

• وتبسيطها نحصل على $٣\text{س} - \text{ص} - ٢ = ٠$

• والمسافة بين النقطة ج والمستقيم (أ ب) هي:

$$(٢) \quad 2\sqrt{10} = \frac{|2 - (1-7) \times (1-3) + (3-7) \times 3|}{\sqrt{2(1-7) + 2(1-3)}}$$

من (١) و(٢)، مساحة المثلث أ ب ج المطلوبة هي:

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 10$$

حاول

أوجد مساحات المثلثات أ ب ج المعطاة رؤوسها كما يلي.

$$(أ) \text{ أ(١، ٥) ، ب(٣، -٣) ، ج(٣، -٦)}$$

$$(ب) \text{ أ(٢، ١) ، ب(٢، -١) ، ج(٠، ٤)}$$

تدرّب

أوجد مساحات المثلثات أ ب ج المعطاة رؤوسها كما يلي.

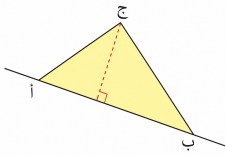
$$(أ) \text{ أ(٠، ٦) ، ب(٢، -٢) ، ج(٥، ١)}$$

$$(ب) \text{ أ(٢، ٤) ، ب(٣، -٥) ، ج(٥، -١)}$$

$$(ج) \text{ أ(٢، ٥) ، ب(٠، ١) ، ج(٤، ٢)}$$

نواتج التعلّم

تعيين مساحة المثلث باستخدام الإحداثيات.



أوجد القاعدة.

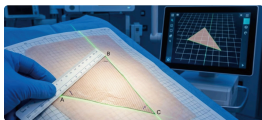
أوجد معادلة المستقيم أ ب، وهي لازمة لحساب الارتفاع.

أوجد الارتفاع.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

★ التحدي



في جراحة ترميم الحروق، يحتاج مريضٌ إلى ترقيع جلدٍ مثلث الشكل. ويرسم نظام تصوير جراحي حدود الجرح على شبكة إحداثية (الوحدة الواحدة = مليمتر واحد) برؤوس عند أ(٢، -١) وب(١، ٥) وج(-٣، -٢١). ولحصاد الكفاءة الصحيحة من النسيج المانح، على الفريق الجراحي حساب المساحة المضبوطة للجرح المثلث. أوجد مساحة أ ب ج.

المستقيم المارّ بنقطة ثابتة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٤ - ٤

الرياضيات

لاحظ!

خطوات حلّ المسائل التي فيها مستقيّات «تمرّ بنقطة ثابتة مهما كانت قيمة ك»:

- ١ رتّب معادلة المستقيم بالنسبة ل ك وعاملها متطابقة في ك.
- ٢ من المتطابقة في ك. وهي (أ س + ب ص + ج ك) + (أ س + ب ص + ج ك) = ٠. كوّن نظام معادلتين وحلّه.

استعدّ

المستقيم (ك - ٤) س + (٢ + ك) ص + ٥ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة مهما كانت قيمة ك. أوجد إحداثيّ تلك النقطة.

طريقة الحلّ

بترتيب (ك - ٤) س + (٢ + ك) ص + ٥ = ٠ بالنسبة ل ك نحصل على:

$$٠ = (٥ + ٢ص + ٤س) + (١ + ك)ص$$

وبما أنّ هذا يجب أن يتحقّق لكل قيم ك،

$$\left. \begin{aligned} ٥ + ٢ص + ٤س &= ٠ \\ ١ + ك + ص &= ٠ \end{aligned} \right\}$$

وبحلّ هذا النظام نحصل على

$$١/٢ = س$$

9

$$٣/٢ = ص$$

إذن، النقطة الثابتة التي يمرّ بها المستقيم هي

$$\left(\frac{١}{٢}, \frac{٣}{٢} \right)$$

حاول

المستقيم (٢ + ك) س - (٢ + ك) ص + ٨ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيّ هذه النقطة.

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ المستقيم (ك + ٢) س + ك ص - ٦ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيّ هذه النقطة.

٢ المستقيم (ك + ٣) س - (٢ + ك) ص + ٢ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيّ هذه النقطة.

٣ المستقيم (ك + ٣) س + (٢ + ك) ص + ٧ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيّ هذه النقطة.

★ التحديّ

المستقيم - (ك - ٢) س + (٣ - ك) ص - ٥ = ٠ يمرّ بنقطة ثابتة لكل قيم ك. أوجد إحداثيّ هذه النقطة.

ناتج التعلّم

تعيين المستقيم المارّ بنقطة ثابتة.

$$\left. \begin{aligned} ٠ &= ٥ + ٢ص + ٤س \\ ٠ &= ١ + ك + ص \end{aligned} \right\}$$

عاملها متطابقة في ك.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

شروط عدم تكوين مثلث

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٥-٤

الرياضيات

لاحظ!

هناك حالتان لشروط عدم تكوين ثلاثة مستقيمت لمثلث:

- ١ مستقيمان متوازيان $\Leftarrow$ ميل المستقيمين متساويان.
- ٢ ثلاثة مستقيمت تتقاطع في نقطة واحدة $\Leftarrow$ أوجد نقطة تقاطع مستقيمين، وتحقق من أن المستقيم الثالث يمر بتلك النقطة أيضًا.

استعدّ

إذا كانت المستقيمت الثلاثة $س - ص = ١$ و $٢س + ص = ٢$ و $٣س + ص = ٤$ لا تكون مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

طريقة الحلّ

أولًا، تحقق من الشرط الذي يكون فيه مستقيمان من المستقيمت الثلاثة المعطاة متوازيين.

بتحويل المستقيمت الثلاثة نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} (١) \quad & س + ص = ١ \dots\dots (١) \\ (٢) \quad & ٢س - ص = ٢ \dots\dots (٢) \\ (٣) \quad & ٣س - ك + ص = ٤ \dots\dots (٣) \end{aligned} \right\}$$

وبما أنّ (١) و (٢) غير متوازيين، نتحقق من حالتى: (١) و (٣) متوازيان، و (٢) و (٣) متوازيان.

• (١) و (٣) متوازيان عندما: $١ - ك = ٣$ ، أى $ك = ٣ - ١ = ٢$

• (٢) و (٣) متوازيان عندما: $٢ - ك = ٦$ ، أى $ك = ٦ - ٢ = ٤$

ثانيًا، تحقق من الشرط الذى تتقاطع فيه المستقيمت الثلاثة فى نقطة واحدة.

• بحلّ (١) و (٢) آنياً، تكون نقطة التقاطع $(١، -٠)$

وبما أنّ (٣) تمرّ بالنقطة $(١، -٠)$ ، فإنّ $٠ = ٣ - ك + ٣$ ، أى $ك = ٤ - ٣ = ١$

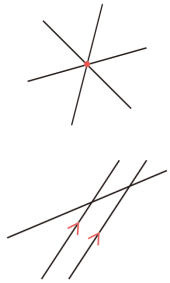
إذن، ك = ٤، ٣، ١

حاول

إذا كانت المستقيمت الثلاثة $س - ص = ٨$ و $٢س + ص = ١$ و $٣س + ص = ٥$ لا تكون مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت ك.

نواتج التعلّم

اشتقاق شروط عدم تكوين المثلث وتفسيرها (وقوع النقاط على استقامة واحدة).



حوّل إلى صيغة $ص = مس + ك$ لمعرفة الميل.

ميل المستقيمين متساويان.

أوجد نقطة تقاطع المستقيمين اللذين لا يحويان الثابت ك.

المستقيم الباقي يمرّ بهذه النقطة.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت المستقيمات الثلاثة $s - 2v + 1 = 0$ و $3s + 2v = 6$ و $s - 3v + 2 = 0$ لا تكون مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت k .

٢ إذا كانت المستقيمات الثلاثة $s - v = 1$ و $3s + 2v = 12$ و $s - k = 1$ لا تكون مثلثًا، فأوجد قيمة الثابت k .

★ التحدي

إذا كانت المستقيمات الثلاثة $s - 2v + 1 = 0$ و $3s + 2v = 6$ و $s - 3v + 2 = 0$ لا تكون مثلثًا، فأوجد مجموع قيم m الممكنة جميعها.

🔍 تأمل

كيف يمكن الاستفادة من تقاطع المستقيمات ومن المثلثات في حلّ مسائل عملية (كالملاحة أو البناء أو التصميم)؟

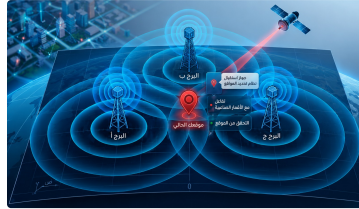
معادلة الدائرة (١)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٦-٤
الرياضيات

نواتج التعلم

اشتقاق صور معادلة الدائرة
المختلفة واستخدامها. سواء
أعطى المركز ونصف القطر أم
أعطيت نقاط محددة.



المفهوم ٣ - الدوائر

تعتمد أنظمة تحديد المواقع العالمية (GPS) والشبكات الخلوية المحلية اعتمادًا تآماً على الهندسة الإحداثية للدوائر في تحديد موقعك بدقة. فحين يبحث هاتفك عن إشارة، يتصل بعدة أبراج خلوية ثابتة، ويقيس كل برج قوة إشارة جهازك ويحسب نصف قطر دقيقاً للمسافة، فيرسم خطاً دائرياً للموضع الذي يمكن أن تكون فيه.

والبرج الواحد يترك موقعك مبهمًا، لكن حين يرسم برجٌ ثانٍ وثالثٌ إشارتيهما الدائرية المتداخلة، تحدد الهندسة الإحداثية موضعك بالضبط. وتُعرّف هذه العملية الرياضية في صناعة التقنية باسم **التثليث المسافى**. وخطاً رياضياً يسير في حساب هذه الحدود الدائرية يُربك كل شيء، من تطبيقات مشاركة الركوب الآلية إلى أنظمة تتبع الاستجابة للطوارئ.

السؤال الموجّه: كيف نستعمل الهندسة الإحداثية للدوائر في نمذجة الحدود، وحساب المناطق المتداخلة، وتعيين نقاط التقاطع المضبوطة لإشارات الاتصال اللاسلكي في أنظمة الاتصالات الحديثة؟

لاحظ!

❗ معادلة الدائرة ذات المركز (أ، ب) ونصف القطر هي $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (الصورة

المعيارية). وبصفة خاصة عندما يكون المركز هو نقطة الأصل: $x^2 + y^2 = r^2$.

• يمكن أيضاً التعبير عن معادلة الدائرة على الصورة $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(الصورة العامة).

❗ عندما يكون مركز الدائرة ونصف قطرها معلومين، استخدم $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

❗ عندما تُحوّل $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ إلى الصورة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ،

فإذا كان $r < 0$ ، فهي تمثل دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها $\sqrt{-r}$.

الصورة الموسّعة للصورة
المعيارية.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

❶ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، -٢) ونصف قطرها ٥

❷ حدّد نوع الشكل الذي تمثّله المعادلة $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

طريقة الحل

١ بما أنَّ المركز ونصف القطر معلومان، استخدم (س - أ) + (ص - ب) = نقي.

$$(س - ٣) + (ص + ٢) = ٥$$

$$(س - ٣) + (ص + ٢) = ٥$$

إذا كان ك < ٠ فهي دائرة مركزها (أ، ب) ونصف قطرها $\sqrt{ك}$.

٢ حوّل إلى الصورة (س - أ) + (ص - ب) = ك.

$$س + ٢ + ص - ٦ = ٥$$

$$(س - ٣) + (ص + ١) = ٦$$

$$٢٢ = (س - ٣) + (ص + ١)$$

أكمل المربع لكل من س وص.

عند تعيين دائرة، اذكر دائمًا مركزها ونصف قطرها.

إذن، الشكل المطلوب **دائرة مركزها (٣، ١) ونصف قطرها ٢**

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات الدوائر الآتية.

(أ) المركز (٣، ١) ونصف القطر ٢ (ب) المركز نقطة الأصل ونصف القطر ٤

٢ حدّد نوع الشكل الذي تمثّله المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٦ص + ٤ = ٠$

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلات الدوائر الآتية.

(أ) المركز (٣، ٤) ونصف القطر ٦ (ب) المركز (٢، ٦) ونصف

و نصف القطر ٥ (ج) المركز نقطة الأصل

القطر ٢

٢ حدّد نوع الأشكال التي تمثّلها المعادلات الآتية.

$$(أ) س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٨ص + ٤ = ٠$$

$$(ب) س^٢ + ص^٢ - ٤س - ٤ = ٠$$

$$(ج) س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص - ٢٠ = ٠$$

$$(د) س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٦ص = ٠$$

★ التحدي

أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين أ(٢، ٥) وب(٨، ١) بحيث يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته $س + ص = ٨$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

معادلة الدائرة (٢)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٧-٤
الرياضيات

لاحظ!

- عندما يكون مركز الدائرة ونصف قطرها معلومين، استخدم (س - أ) + (ص - ب) = ٢نق
- يمكن إيجاد نصف قطر الدائرة من المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.
- مركز الدائرة المعلوم إحداثيًا طرفي قطرها هو منتصف ذلك القطر.
- عندما تكون ثلاث نقاط على الدائرة معلومة، استخدم س + ص + ل = ٢ن

استعدّ

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

١ دائرة مركزها (٣، ٢) وتمرّ بالنقطة (٦، ٤)

٢ دائرة النقطتان أ(٣، ١) وب(٥، -٣) طرفا قطريّ فيها

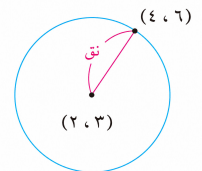
٣ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (١، ١) و(١، -٢) و(٢، ٣)

طريقة الحلّ

١ بما أنّ مركز الدائرة معلوم، استخدم (س - أ) + (ص - ب) = ٢نق

أوجد نصف قطر هذه الدائرة.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(6-3)^2 + (4-2)^2}$$

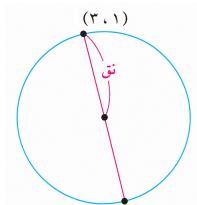


إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي (س - ٣) + (ص - ٢) = ١٣

٢ بما أنّ مركز الدائرة التي النقطتان أ(٣، ١) وب(٥، -٣) طرفا قطريّ فيها هو

منتصف أ ب.

$$(1, -2) = \left(\frac{(5-)+3}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$$



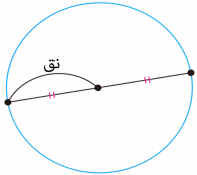
وبما أنّ هذه الدائرة تمرّ بالنقطة أ، فإنّ نصف قطرها:

$$\sqrt{17} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2}$$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي (س - ١) + (ص + ٢) = ١٧

نواتج التعلّم

اشتقاق صور معادلة الدائرة المختلفة واستخدامها، سواء أُعطى المركز ونصف القطر أم أُعطيت نقاط محدّدة.



نصف قطر الدائرة هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

المركز هو منتصف القطر.

نصف قطر الدائرة هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

عوّض بالنقاط الثلاث الواقعة على الدائرة لتكوين نظام معادلات.

ما لم تُحدّد صورة بعينها، يمكنك تركها على هذه الصورة.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٣ ثم ناقشوا الإجابة.

- ٣ بما أنّ ثلاث نقاط على الدائرة معلومة، استخدم $S^2 + L^2 + M^2 + N = 0$ بما أنّها تمرّ بالنقطة (١، ١): $1^2 + 1^2 + L^2 + M^2 + N = 0$ وبتبسيطها نحصل على $L + M + N + 2 = 0$ (١)
- وبما أنّها تمرّ بالنقطة (٢، ١): $2^2 + 1^2 + L^2 + M^2 + N = 0$ وبتبسيطها نحصل على $L + M + N + 5 = 0$ (٢)
- وبما أنّها تمرّ بالنقطة (٣، ٢): $3^2 + 2^2 + L^2 + M^2 + N = 0$ وبتبسيطها نحصل على $L + M + N + 13 = 0$ (٣)
- وبحلّ (١) و (٢) و (٣) آتياً نحصل على $L = -5$ و $M = -1$ و $N = 4$
- إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي $S^2 + L^2 + M^2 + N = 0$

حاول

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

- ١ دائرة مركزها (١، ٣-) وتمرّ بالنقطة (٤، ٢-)
- ٢ دائرة النقطتان (٤، ٣) و (٥، ٢-) طرفا قطريّ فيها
- ٣ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (١، ٠) و (٢، ١-) و (٣، ١)

تدرب

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

- ١ دائرة مركزها (١، ٣-) وتمرّ بالنقطة (٠، ٣-)
- ٢ دائرة مركزها (١، ٤-) وتمرّ بالنقطة (٢، ٣-)
- ٣ دائرة مركزها (١، ٢-) وتمرّ بنقطة الأصل
- ٤ دائرة مركزها نقطة الأصل وتمرّ بالنقطة (٤، ٣-)
- ٥ دائرة النقطتان (٧، ٤) و (١، ٢-) طرفا قطريّ فيها
- ٦ دائرة النقطتان (٢، ٤) و (٢، ٦-) طرفا قطريّ فيها
- ٧ دائرة النقطتان (٠، ٣-) و (٢، ١-) طرفا قطريّ فيها
- ٨ دائرة النقطتان (٦، ٣-) و (٢، ٣-) طرفا قطريّ فيها
- ٩ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (٠، ٠) و (١، ١-) و (٤، ٢)
- ١٠ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (٦، ٤-) و (٨، ٠) و (١، ٣-)
- ١١ دائرة تمرّ بالنقاط الثلاث (١، ١) و (١، ٥-) و (٧، ٣-)

★ التحدي

أثناء دراسة الفسيولوجيا الكهربائية للقلب، يرسم أطباء القلب خريطةً للنشاط الكهربى للأذين المريض لتحديد نقطة منشأ اضطراب النظم القلبي. وتنتشر جبهة الموجة للشذوذ الكهربى إلى الخارج فى دائرة تامة.

ويرصد قِطْطاً رسم الخرائط مرور الموجة الكهربائية عبر ثلاثة إحداثيات مجسّات محدّدة على شبكة تشخيصية:

المجس ١: (٢، ٠) المجس ٢: (٠، ٢) المجس ٣: (٤، ٦)

أوجد المعادلة الرياضية للدائرة التى تكوّنّها هذه الموجة الكهربائية لتعيين مركزها (بؤرة اضطراب النظم) ونصف قطرها.

معادلة الدائرة (٣)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٨-٤
الرياضيات

لاحظ!

- عند إيجاد معادلة دائرة تَمَسُّ أحد المحورين، ارسم دائمتًا شكلًا توضيحيًا للتصوّر.
- يمكن إيجاد نصف قطر الدائرة التي تَمَسُّ محور س أو محور ص من **المسافة بين المركز ونقطة التماس**.

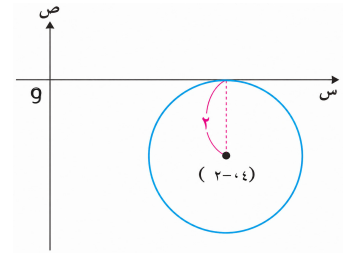
استعدّ

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

- ١ دائرة مركزها (٤، -٢) وتَمَسُّ محور س
- ٢ دائرة تَمُرُّ بالنقطة (-٢، ١) وتَمَسُّ محور ص
- ٣ دائرة يقع مركزها على المستقيم $S = -S$ وتَمُرُّ بالنقطتين (٥، ٢) و (-٢، ٣)

طريقة الحلّ

- ١ بما أنّ مركز الدائرة معلوم، استخدم (س - أ) + (ص - ب) = ر^٢ أوجد نصف قطر هذه الدائرة برسم شكل توضيحي.



المسافة بين المركز ونقطة التماس.

من الشكل المقابل، نصف قطر هذه الدائرة يساوي ٢

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي $(S - 4)^2 + (V + 2)^2 = 2^2$

- ٢ ارسم شكلًا يَحَقِّق الشروط المعطاة.

ليكن نصف قطر الدائرة المطلوبة ر حيث $R < 0$. من الشكل المقابل، إحداثيا المركز هما (-٢، ١).

ثم لإيجاد نصف القطر، كوّن معادلةً في نصف القطر.

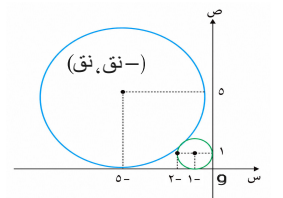
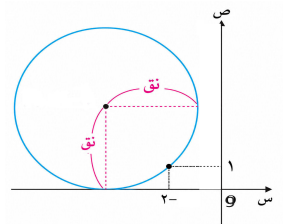
وبما أنّ هذه الدائرة تَمُرُّ بالنقطة (-٢، ١) :

$$(-2 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 = R^2$$

$$0 = R^2$$

وبتبسيطها نحصل على $R^2 = 0$ وبحلّها نحصل على $R = 0$ وبملاحظة أنّ $R < 0$ ، تكون معادلتا الدائرتين المطلوبتين:

$$(S - 4)^2 + (V + 2)^2 = 2^2 \quad , \quad (S + 2)^2 + (V - 1)^2 = 0$$

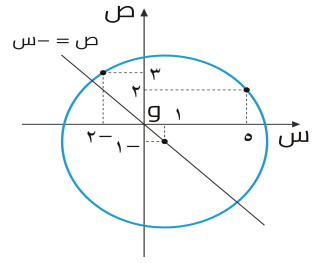


نصف القطر هو المسافة بين المركز ونقطة تقع على الدائرة.

رَبْع الطرفين.

نواتج التعلّم

اشتقاق صور معادلة الدائرة المختلفة واستخدامها، سواء أُعطي المركز ونصف القطر أم أُعطيت نقاط محدّدة.



٣ بما أنّ المركز يقع على المستقيم $ص = -س$. يمكن وضع إحداثيّ مركز الدائرة المطلوبة على الصورة $(أ، -أ)$.

ولیکن نصف القطر $ق < ٠$. وبما أنّ هذه الدائرة تمرّ بالنقطة $(٢، ٥)$:

$$\sqrt{(أ+٢)^2 + (أ-٥)^2} = ر$$

$$(أ+٢)^2 + (أ-٥)^2 = ر^2 \quad (١)$$

وبما أنّها تمرّ أيضًا بالنقطة $(٣، -٢)$:

$$\sqrt{(أ+٣)^2 + (أ-٢-)^2} = ر$$

$$(أ+٣)^2 + (أ-٢-)^2 = ر^2 \quad (٢)$$

وبحلّ (١) و (٢) أنّيًا نحصل على $أ = ١$ ونقّ $٢٥ = ر^2$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي $٢٥ = ر^2 = (١+ص)^2 + (١-س)^2$

كُون معادلةً في نصف القطر.

بما أنّنا نوجد معادلة دائرة،
يكفيّنا إيجاد نقّ٢.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ
السؤال ٣ ثم ناقشوا
الإجابة.

★ التحدّي

يدور حاملُ جهاز العلاج
الإشعاعي القوسى فى مسار
دائرى، ومركز دورانه مقيّد
بالحركة على محور س. ويجب
أن يقطع المسار نقطتي
معايرة مكانيّتين هما
ن_١(٢، -٢) و ن_٢(١، ١). أوجد
معادلة الدائرة على الصورة
المعيارية، ومركز دورانها،
ونصف قطر الحزمة بالضبط.

حاول

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

- ١ دائرة مركزها $(٣، -٢)$ وتمسّ محور ص
- ٢ دائرة تمرّ بالنقطة $(٢، ١)$ وتمسّ محورى س و ص معًا
- ٣ دائرة يقع مركزها على المستقيم $ص = س + ٥$ وتمرّ بنقطة الأصل وبالنقطة $(٢، ١)$

تدرّب

أوجد معادلات الدوائر الآتية.

- ١ دائرة مركزها $(١، -٤)$ وتمسّ محور س
- ٢ دائرة مركزها $(٣، -٤)$ وتمسّ محور س
- ٣ دائرة مركزها $(٥، -٤)$ وتمسّ محور س
- ٤ دائرة مركزها $(١، ٦)$ وتمسّ محور ص
- ٥ دائرة مركزها $(٢، -٥)$ وتمسّ محور ص
- ٦ دائرة مركزها $(٣، -٤)$ وتمسّ محور ص
- ٧ دائرة تمرّ بالنقطة $(١، -٢)$ وتمسّ محورى س و ص معًا
- ٨ دائرة تمرّ بالنقطة $(٢، -١)$ وتمسّ محورى س و ص معًا
- ٩ دائرة تمرّ بالنقطة $(٨، -١)$ وتمسّ محورى س و ص معًا
- ١٠ دائرة يقع مركزها على المستقيم $ص = س + ١$ وتمرّ بالنقطتين $(٣، ٤)$ و $(١، ٤)$
- ١١ دائرة يقع مركزها على المستقيم $ص = س - ٦$ وتمرّ بالنقطتين $(٣، ٧)$ و $(١، -٣)$

شروط تكوين الدائرة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

١٩-٤

الرياضيات

لاحظ!

عندما نُحوّل المعادلة $س^٢ + ص^٢ + ل + س + م + ن = ٠$ إلى الصورة $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = (ثابت)$ ، فإذا كان **(الثابت) < ٠** فإنّ هذه المعادلة تمثّل دائرة.

استعدّ

أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة $س^٢ + ص^٢ - ٢كس + ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$ دائرة.

طريقة الحلّ

حوّل إلى الصورة
 $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = (ثابت)$

بتحويل $س^٢ + ص^٢ - ٢كس + ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$ نحصل على:

$$(س - ك)^٢ - ٢(ك - ص) + ٢ك - ٤ك + ٦ = ٠$$

وبتبسيطها نحصل على:

$$(س - ك)^٢ + (ص + ك)^٢ = ٢ك - ٤ك + ٦$$

وتمثّل هذه المعادلة دائرة عندما $٢ك - ٤ك + ٦ < ٠$

وبحلّها نحصل على $ك > ١$ أو $ك < ٣$

حاول

أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة $س^٢ + ص^٢ + ٢كس - ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$ دائرة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة $س^٢ + ص^٢ + ٢كس - ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$ دائرة.

٢ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة

$$س^٢ + ص^٢ + ٢كس - ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$$

٣ أوجد مجموعة قيم الثابت ك بحيث تمثّل المعادلة

$$س^٢ + ص^٢ + ٢كس - ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$$

نواتج التعلّم

تحديد الشروط اللازمة لتكوين معادلة الدائرة.

★ التحديّ



يولّد لخاص فوق-صوتيّ آلّ حدًا للإجهاد الصوتيّ تمثّله المعادلة:

$$س^٢ + ص^٢ + ٢كس - ٢كص + ٤ك + ٦ = ٠$$

ولوجود حدّ دائريّ حقيقيّ مستقرّ للأمان حول الآلة، يجب أن يكون نصف قطر هذه المعادلة عددًا حقيقيًا موجبًا. أوجد بالضبط مجموعة قيم ثابت ضبط القدرة ك التي تضمن أن تمثّل هذه المعادلة دائرة حقيقية.

نقاط تقاطع الدائرة والمستقيم (١)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

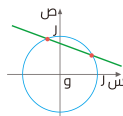
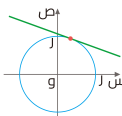
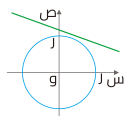
٢٠٠٤
الرياضيات

لاحظ!

عند إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع بين دائرة ومستقيم أو عديدها، حلّ معادلتَي الدائرة والمستقيم آنياً.

• عند إيجاد الإحداثيات، أوجد حلول المعادلتين الآتيتين.

• عند إيجاد عدد النقاط، كوّن معادلةً تربيعية وتحقق من إشارة المميّز F .

إشارة F	$F < 0$	$F = 0$	$F > 0$
عدد نقاط التقاطع	نقطتان	نقطة واحدة	لا توجد نقاط
العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم			
	يتقاطعان في نقطتين مختلفتين	يتماسان	لا توجد نقاط تقاطع

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيّ نقطتي تقاطع الدائرة $(س + ٢)^٢ + ص^٢ = ١٠$ والمستقيم $ص = ٢س + ١$

٢ أوجد عدد نقاط تقاطع الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢$ والمستقيم $س - ص + ٣ = ٠$

نواتج التعلّم

حساب نقاط التقاطع بين الدائرة والمستقيم.

طريقة الحل

١ حلّ معادلتى الدائرة والمستقيم آنياً.

$$\left. \begin{array}{l} (١) \quad (س + ٢)^2 + ص^2 = ١٠ \dots\dots (١) \\ (٢) \quad ص = ٢ - س + ١ \dots\dots (٢) \end{array} \right\}$$

وبالتعويض بـ (٢) فى (١) وتبسيطها نحصل على:

$$٥س - ٥ = ٠$$

عوّض فى المعادلة الخطية.

وبحلّها نحصل على $س = ١ \pm ٠$

ومن (٢): عندما $س = ١$ يكون $ص = ١ -$ ، وعندما $س = ١ -$ يكون $ص = ٣$

إذن، إحداثيا النقطتين المطلوبتين هما $(١ - , ١)$ ، $(٣ , ١ -)$

٢ حلّ معادلتى الدائرة والمستقيم آنياً.

$$\left. \begin{array}{l} (١) \quad س^2 + ص^2 = ٢ \dots\dots (١) \\ (٢) \quad ص - س = ٣ + ٠ \dots\dots (٢) \end{array} \right\}$$

من (٢): $ص = س + ٣ + ٠ \dots\dots (٢')$

وبالتعويض بـ (٢') فى (١) وتبسيطها نحصل على:

$$٢س^2 + ٦س + ٧ + ٠ = ٠$$

وليكن مميّز هذه المعادلة ف:

$$ف = ٦ - ٤ \times ٢ \times ٧ = ٢٠ - ٠ > ٠$$

إذن، عدد نقاط التقاطع **صفر**

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيّ نقطتى تقاطع الدائرة $س^2 + ص^2 = ٤$ والمستقيم $ص + س = ٢$

٢ أوجد عدد نقاط تقاطع الدائرة $س^2 + ص^2 = ١٠$ والمستقيم $ص = ٢س - ٥$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد إحداثيات نقاط التقاطع للدوائر والمستقيمات الآتية.

$$(أ) \quad س^2 + ص^2 = ١٠ , ص = ٣س - ١٠$$

$$(ب) \quad س^2 + ص^2 = ٥ , ٢س - ص = ٥ + ٠$$

$$(ج) \quad (س - ١)^2 + ص^2 = ١٠ , س + ٣ص = ١ - ٠$$

٢ أوجد عدد نقاط التقاطع للدوائر والمستقيمات الآتية.

$$(أ) \quad س^2 + ص^2 = ٥ , ص + س = ٢$$

$$(ب) \quad س^2 + ص^2 = ٢ , ٢س + ٣ص = ٦ - ٠$$

$$(ج) \quad (س + ١)^2 + (ص - ٢)^2 = ٥ , س + ٢ص + ٢ = ٠$$

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك فى

حلّ السؤال ٢ ثم

ناقشوا الإجابة.

نقاط تقاطع الدائرة والمستقيم (٢)

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

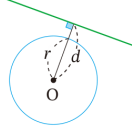
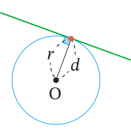
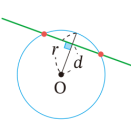
٢١-٤
الرياضيات

لاحظ!

❗ كيف تُحلّ المسائل التي تكون فيها العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم شرطًا:

• إذا كانت **معادلة المستقيم مجهولة**، استخدم المميّز بناءً على العلاقة الموضعية:
يتقاطعان في نقطتين مختلفتين $\Leftrightarrow \Delta < 0$ ، يتماسّان $\Leftrightarrow \Delta = 0$ ، لا توجد نقاط تقاطع $\Leftrightarrow \Delta > 0$

• إذا كان **نصف قطر الدائرة مجهولاً**، استخدم علاقة المقارنة بين (نصف القطر نق) و(المسافة د بين مركز الدائرة والمستقيم) بناءً على العلاقة الموضعية.

العلاقة الموضعية بين الدائرة والمستقيم			
	يتماسّان	يتقاطعان في نقطتين مختلفتين	
	<u>نق = د</u>	<u>نق < د</u>	<u>نق > د</u>
علاقة المقارنة بين ر ود			

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

❶ إذا كانت الدائرة $S^2 + ص^2 = ٥$ والمستقيم $٢س - ك$ يتقاطعان في نقطتين مختلفتين، فأوجد مجموعة قيم الثابت ك.

❷ إذا كانت الدائرة $S^2 + ص^2 = ٢$ والمستقيم $٢س + ص - ٥ = ٠$ يتماسّان، فأوجد قيمة نصف قطر الدائرة نق.

طريقة الحلّ

❶ بما أنّ معادلة المستقيم مجهولة، حلّ معادلتى الدائرة والمستقيم آلياً واستخدم المميّز.

$$٥س^2 - ٤كس + ٥ - ٢ = ٠$$

وليكن مميّز هذه المعادلة Δ ،

$$\Delta = (-٤ك)^2 - ٤ \times ٥ \times (٥ - ٢)$$

$$= -٤ك + ١٠٠ > ٠$$

وبحلّها نحصل على $٥ - ك > ٠$

نواتج التعلّم

حساب نقاط التقاطع بين الدائرة والمستقيم.

عندما يتقاطعان في نقطتين مختلفتين يكون $\Delta < ٠$.

٢ بما أنّ نصف قطر الدائرة مجهول، أوجد المسافة د بين مركز الدائرة (٠، ٠) والمستقيم.

$$d = \frac{|0 - 0 \times 1 + 0 \times 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$

إذن، $d = 0$

عندما يتماثلان يكون $d = 0$.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حل السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 4$ والمستقيم $S + V = 4$ يتماثلان، فأوجد قيمة الثابت م.

٢ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 4$ والمستقيم $S - V = 10$ ليس بينهما نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم نصف قطر الدائرة N .

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 8$ والمستقيم $S + V = 8$ يتماثلان، فأوجد قيمة الثابت م.

٢ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 10$ والمستقيم $S + V = 3$ ليس بينهما نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم الثابت ن.

٣ إذا كان للدائرة $S^2 + V^2 = 5$ والمستقيم $S + V = 2$ نقاط تقاطع، فأوجد مجموعة قيم الثابت م.

٤ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 4$ والمستقيم $S + V = 2$ يتماثلان، فأوجد قيمة نصف قطر الدائرة N .

٥ إذا كانت الدائرة $S^2 + V^2 = 4$ والمستقيم $S - V = 17$ يتقاطعان في نقطتين مختلفتين، فأوجد مجموعة قيم نصف قطر الدائرة N .

★ التحدي

ترسم محطة رادار ساحلية نطاق تغطيتها منطقة دائرية مركزها نقطة الأصل: $S^2 + V^2 = 4$ ويسير ممرٌ ملاحٍ دوليٌ مستقيم وفق المعادلة الخطية: $S + V = 10$ ولمراعاة قوانين الخصوصية البحرية، يجب أن تبقى إشارة الرادار بعيدةً تمامًا عن الممر الملاحى، فلا توجد بينهما نقاط تقاطع. وبما أنّ نصف القطر مسافةً فيزيائية موجبة ($N > 0$)، أوجد بالضبط مجموعة قيم نصف القطر N التي تحقق هذا الفصل.

طول الوتر

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢٢-٤
الرياضيات

لاحظ!

❗ في المسائل التي تتطلب إيجاد طول الوتر، ارسم أولًا شكلًا توضيحيًا واستخدم **نظرية فيثاغورس**. لتكون نصف قطر الدائرة، ود طول العمود المرسوم من مركز الدائرة على الوتر. ل نصف طول الوتر. وبما أن العمود المرسوم من مركز الدائرة على الوتر ينصفه، يكون $ل^2 = د^2 + ٢$.

استعد

حل المسائل الآتية.

❶ أوجد طول الوتر الذي تقطعه الدائرة س $٢ + ص = ٤$ على المستقيم س + ص = ١ = ٠

❷ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة س $٢ + ص = ٣$ والمستقيم س - ص + ك = ٠ يساوي ٢

طريقة الحل

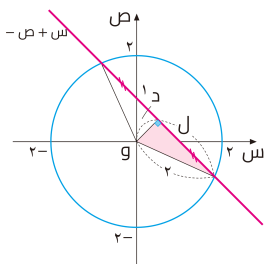
❶ بما أنها مسألة إيجاد طول وتر، ارسم أولًا شكلًا توضيحيًا للتصور.

ليكن د طول العمود المرسوم من مركز الدائرة (٠، ٠) على المستقيم س + ص = ١ = ٠:

$$د = \frac{|١ - ٠ \times ١ + ٠ \times ١|}{\sqrt{١ + ١}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

وليكن ل نصف طول الوتر المطلوب. وبما أن نصف قطر الدائرة ٢، فمن نظرية فيثاغورس:

$$ل^2 = ٢ - د^2$$

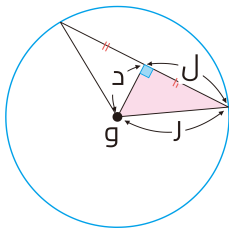


$$ل^2 = ٢ - \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^2$$

ل $\frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٢$ ومن $٠ < ل$ يكون ل $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$. إذن، طول الوتر المطلوب هو ل $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

نواتج التعلم

حساب طول الوتر المشترك الناتج من تقاطع الدائرة والمستقيم.



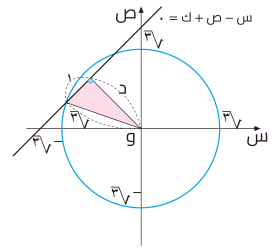
طول العمود هو المسافة بين النقطة والمستقيم.

٢ بما أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة $ص^2 + ٢ = ٣$ والمستقيم $س - ص + ك = ٠$ تكون وترًا، ارسم شكلًا توضيحيًا للتصوّر.

ليكن $د$ طول العمود المرسوم من مركز الدائرة $(٠, ٠)$ على المستقيم $س - ص + ك = ٠$.

$$\frac{|٠ \times (١ -) + ٠ \times ١|}{\sqrt{(١ -)^2 + ٢^2}} = د$$

$$د = \frac{|ك|}{\sqrt{٣}} \quad (١) \dots$$



وأيضًا، بما أنّ نصف طول الوتر ١ ونصف قطر الدائرة $\sqrt{٣}$ ، فمن نظرية فيثاغورس:

$$٢_١ - \left(\sqrt{٣}\right)^2 = د^2$$

$٢ = د^2$ ، ومن $د < ٠$ يكون $د = -\sqrt{٢}$ (٢)

من (١) و(٢): $\sqrt{٣} = \frac{|ك|}{\sqrt{٣}}$

$$٢ = |ك|$$

إذن، $ك = \pm ٢$

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد طول الوتر الذي تقطعه الدائرة $(س - ٢) + (ص + ١) = ٩$ على المستقيم

$س + ٢ص - ٥ = ٠$

٢ أوجد قيمة الثابت $ك$ بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة

$س^2 + ٢ص + ١٦ = ٠$ والمستقيم $س + ك$ يساوي $\sqrt{٢}$

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد طول الوتر الذي تقطعه الدائرة $س^2 + ٢ص + ١٠ = ٠$ على المستقيم $س - ٢ص - ٥ = ٠$

٢ أوجد طول الوتر الذي تقطعه الدائرة $(س - ٢) + (ص - ١) = ٥$ على المستقيم

$س + ٤ص = ٤$

٣ أوجد طول الوتر الذي تقطعه الدائرة $س^2 + ٢ص + ٣ = ٠$ على المستقيم $س - ٢ص = ٢$

٤ أوجد قيمة الثابت $ك$ بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة

$س^2 + ٢ص + ١٠ = ٠$ والمستقيم $س + ك$ يساوي $\sqrt{٢}$

٥ أوجد قيمة الثابت $ك$ بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة

$(س - ١) + ٢ص + ٥ = ٠$ والمستقيم $س + ك$ يساوي $\sqrt{٣}$

★ التحدي

أوجد قيمة الثابت $ك$ بحيث يكون طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع الدائرة

$س^2 + ٢ص + ٤ - س - ٢ص - ٧ = ٠$ والمستقيم $س + ك$ يساوي ٤

عند إزالة علامة القيمة المطلقة، أضف $\pm$.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

المماسّ للدائرة

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢٣-٤
الرياضيات

لاحظ!

معادلة المماسّ للدائرة $S^2 + V^2 = ٢٥$ عند النقطة (أ، ب) الواقعة عليها هي:

أس + ب ص = ٢٥

لإيجاد معادلة المماسّ المرسوم من نقطة لا تقع على الدائرة، اعتبر إحداثيّ **نقطة التماسّ** (أ، ب).

استعدّ

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة $S^2 + V^2 = ٢٥$ عند النقطة (٣، ٤)

٢ المماسّ المرسوم من النقطة ف(٣، ١) إلى الدائرة $S^2 + V^2 = ٥$

طريقة الحلّ

١ بما أنّ نقطة التماسّ هي (٣، ٤).

٢٥ = ص ٣ + أس

٢ ليكن إحداثيّات نقطة التماسّ (أ، ب)

معادلة المماسّ هي $أس + ب ص = ٥$

وبما أنّه يمرّ بالنقطة ف(٣، ١)، فإنّ $٥ = ٣ب + أ$ (١)

وأيضًا، بما أنّ نقطة التماسّ تقع على $S^2 + V^2 = ٥$ ، فإنّ $٥ = ٢ب + أ^٢$ (٢)

حلّ (١) و (٢) آتياً.

من (١): $أ = ٥ - ٣ب$ (١')

وبالتعويض بـ (١') في (٢) نحصل على $٥ = ٢ب + (٥ - ٣ب)^٢$

وبحلّها نحصل على $ب = ١, ٢$

وبالتعويض في (١'): عندما $ب = ١$ يكون $أ = ٢$ ، وعندما $ب = ٢$ يكون $أ = -١$

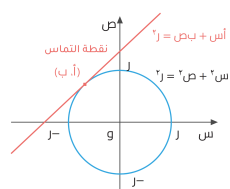
إذن، بما أنّ نقطة التماسّ هي (١، ٢) أو (٢، -١)، تكون معادلتا المماسّين المطلوبتين $٢ص + س = ٥$ و

$-س + ٢ص = ٥$

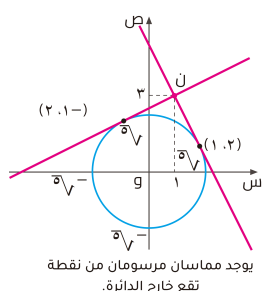
نواتج التعلّم

اشتقاق معادلة المماسّ للدائرة.

عندما تنصّ المسألة على «عند».



عندما تنصّ المسألة على «عند نقطة معطاة».



يوجد مماسّان مرسومان من نقطة تقع خارج الدائرة.

حاول

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة س^٢ + ص^٢ = ٣٤ عند النقطة (٥، ٣)

٢ المماسّ المرسوم من النقطة (٤، ٢-) إلى الدائرة س^٢ + ص^٢ = ١٠

تدرب

أوجد معادلات المماسّات الآتية.

١ المماسّ للدائرة س^٢ + ص^٢ = ١٠ عند النقطة (٣، -١)

٢ المماسّ للدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٩ عند النقطة (٥، -٢)

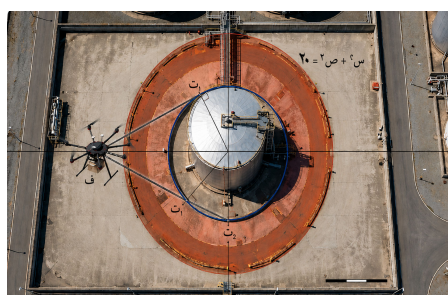
٣ المماسّ للدائرة س^٢ + ص^٢ = ٥ عند النقطة (٢، ١)

٤ المماسّ المرسوم من النقطة (٣، -١) إلى الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٥

٥ المماسّ المرسوم من النقطة (٢، ١) إلى الدائرة س^٢ + ص^٢ = ١

٦ المماسّ المرسوم من النقطة (٢، ٦) إلى الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٠

★ التحدي



طائرة مسيّرة ذاتية القيادة للتوصيل تنتقل في ساحة صناعية. وفي الساحة خزان دائريّ للجهود العالي مركزه نقطة الأصل، ومنطقة الخطر حوله تمثلها المعادلة: س^٢ + ص^٢ = ٢٠

وتحوم الطائرة الآن عند نقطة تمرکز إحدائها ف(٢، ٦). ولتفحص المحيط بأمان دون دخول منطقة الخطر، عليها أن توجّه مستشعراتها

البصرية على مساري مماسّ للدائرة تمامًا من موضعها الحالي.

أوجد معادلتَي خطّي النظر المماسّين المتاحين للطائرة، وحدّد بالضبط إحداثيّتي النقطتين اللتين يلامسان عندهما حدّ منطقة الخطر.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في

حلّ السؤال ٢ ثم

ناقشوا الإجابة.

العلاقة الوضعية بين دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢٤-٤

الرياضيات

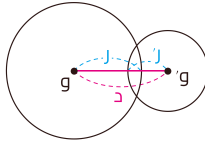
لاحظ!

! العلاقة الوضعية بين دائرتين (مراجعة الرياضيات أ)

لتكن $ق$ نصف قطر الدائرة $م$ ، و $نق$ نصف قطر الدائرة $د$ حيث $نق < ق$ ،
المسافة بين مركزيهما. العلاقة الوضعية بين الدائرتين والعلاقة بين $نق$ و $ق$
ود هي كالتالي:

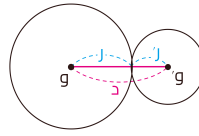
تتقاطعان عند نقطتين

$$نق - ق < د < نق + ق$$



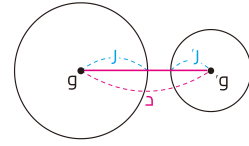
تتماشيان خارجيًا

$$نق + ق = د$$



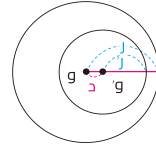
خارجيتان عن بعضهما

$$نق + ق > د$$



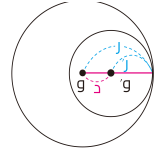
إحداهما داخل الأخرى

$$نق - ق < د$$



تتماشيان داخليًا

$$نق - ق = د$$



استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

١ اذكر العلاقة الوضعية بين الدائرة $س$ $ص^2 + ٢ = ٤$ والدائرة $(س - ٤) + ٢ = ٩$

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(١, ٣)$ وتمسّ الدائرة $(س - ١) + ٢ = ٣$ داخليًا.

نواتج التعلّم

تحديد العلاقة الوضعية بين
دائرتين: منفصلتين، أو
متماشتين، أو متقاطعتين.

طريقة الحل

١ بما أن مركزي الدائرتين هما $(٠, ٤)$ و $(٠, ٠)$.

$$د = \sqrt{(٠ - ٠)^2 + (٠ - ٤)^2} = ٤$$

وبما أن نصفَي قطري الدائرتين ٢ و ٣ على الترتيب،

$$٢ + ٣ > ٤ > ٢ - ٣$$

$$نق - نق' > د > نق + نق'$$

إذن، الدائرتان **تتقاطعان عند نقطتين**

٢ بما أن مركز الدائرة (س) $(١ - ٣) + ٢(٣ + ص) = ٥$ هو $(١, ٣ - ٥)$.

$$د = \sqrt{(١ - ٣)^2 + (٣ - ٥)^2} = ٢\sqrt{٥}$$

وبما أن الدائرتين تتماستان داخلياً، فإن $نق - نق' = د$.

$$ونصف قطر الدائرة (س) $(١ - ٣) + ٢(٣ + ص) = ٥$ هو $\sqrt{٥}$.$$

$$\text{وبما أن } د > \sqrt{٥} \text{ يكون } نق' = \sqrt{٥}$$

$$\text{إذن، } نق - \sqrt{٥} = \sqrt{٥}$$

$$\text{نق} = \sqrt{٥} \times ٢$$

إذن، معادلة الدائرة المطلوبة هي **$(س - ٣) + ٢(٣ - ص) = ٤٥$**

حاول

حل المسائل الآتية.

١ اختر العلاقة الوضعية للدائرتين الآتيتين من أ إلى هـ وأجب بالحرف.

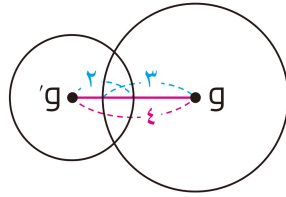
$$(أ) \text{ الدائرة س } ٢ + ص = ٩ \text{ والدائرة (س) } ٢(٣ - ص) + ٢(٤ - ص) = ٤$$

$$(ب) \text{ الدائرة (س) } ٢(١ - ص) + ٢(١ - ص) = ٥٢ \text{ والدائرة س } ٢ + ص = ٣$$

أ. متباعدتان ب. تتماستان خارجياً ج. تتماستان داخلياً

د. إحداهما داخل الأخرى هـ. تتقاطعان عند نقطتين

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(٣ - ٩)$ وتمسّ الدائرة $(س + ٦) + ٢(٥ + ص) = ١$ خارجياً.



تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حل السؤال ٢ ثم ناقشوا الإجابة.

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ اختر العلاقة الوضعية للدائرتين الآتيتين من أ إلى هـ، وأجب بالحرف.

(أ) الدائرة $S^2 + 2 = 2$ والدائرة $(S - 1)^2 + 2 = 1$

(ب) الدائرة $S^2 + 2 = 2$ والدائرة $(S + 2)^2 + 2 = 2$

(ج) الدائرة $(S + 3)^2 + 2 = 2$ والدائرة $S^2 + 2 = 2$ و $8 - S - 8 = 0$

(د) الدائرة $S^2 + 2 = 2$ والدائرة $(S - 3)^2 + 2 = 5$ و $3 = 2 - S - 2$

أ. متباعدتان ب. تتماسّان خارجياً ج. تتماسّان داخلياً

د. إحداهما داخل الأخرى هـ. تتقاطعان عند نقطتين

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، -٩) وتمسّ الدائرة $(S - 3)^2 + 2 = 2$ و $9 = 2$ داخلياً.

★ التحدي

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١، -٢) وتمسّ الدائرة $S^2 + 2 = 2$ و $4 - S - 4 = 0$ خارجياً.

نقاط تقاطع دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢٥-٤
الرياضيات

لاحظ!

❗ لإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع دائرتين، أو معادلة المستقيم المارّ بنقاط التقاطع، أنشئ معادلات آنية وحلّها.

استعدّ

حلّ المسائل الآتية.

❶ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتي تقاطع الدائرتين $S^2 + 2S - 4 = 0$ ، $S^2 + 2S - 9 = 0$

❷ أوجد إحداثيتي نقطتي تقاطع الدائرتين $S^2 + 2S - 10 = 0$ ، $S^2 + 2S - 5 = 0$

طريقة الحلّ

❶ بحلّ معادلتَي الدائرتين آنيًا:

$$\left. \begin{array}{l} S^2 + 2S - 4 = 0 \dots (1) \\ S^2 + 2S - 9 = 0 \dots (2) \end{array} \right\}$$

بطرح (٢) من (١) نحصل على:

$$-5 = 0$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$

إذن، المعادلة المطلوبة هي:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$

❷ بحلّ معادلتَي الدائرتين آنيًا:

$$\left. \begin{array}{l} S^2 + 2S - 10 = 0 \dots (1) \\ S^2 + 2S - 5 = 0 \dots (2) \end{array} \right\}$$

بطرح (٢) من (١) نحصل على:

$$-5 = 0$$

$$S = 5 + 2S$$

وبالتعويض بـ (٣) في (١) نحصل على:

$$10 = 2(5 + 2S) + 2S$$

$$0 = 10 + 2S + 2S$$

$$0 = 3 + 2S$$

$$S = -3, -1$$

وبالتعويض بهاتين القيمتين في (٣):

$$\text{عندما } S = -3 \text{ يكون } S = -1$$

$$\text{عندما } S = -1 \text{ يكون } S = 3$$

إذن، إحداثيتي نقطتي التقاطع هما

$$(-3, 1), (-1, 3)$$

نواتج التعلّم

إيجاد إحداثيات نقاط تقاطع دائرتين.

حاول

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتي تقاطع الدائرتين $س^2 + ص^2 = ٦$ ، $س^2 + ص^2 + ٣س + ٣ص = ٩$

٢ أوجد إحداثيّ نقطتي تقاطع الدائرتين $س^2 + ص^2 = ٤$ ، $س^2 + ص^2 + ٢(س - ص) = ١٦$

تدرب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة المستقيم المارّ بنقطتي تقاطع الدائرتين الآتيتين.

(أ) الدائرتان $س^2 + ص^2 = ١٠$ ، $س^2 + ص^2 - ١٢س + ٦ص = ٣$

(ب) الدائرتان $س^2 + ص^2 = ٤$ ، $س^2 + ص^2 + ٢(١ - س) = ٤$

٢ أوجد إحداثيّ نقطتي تقاطع الدائرتين $س^2 + ص^2 = ٥$ ، $س^2 + ص^2 + ٢(س - ص) = ١$

★ التحدي

تتعبّ محطات رادار متعدّدة الاتجاهات طائرة بدون طيار.

تغطّي محطة «ألفا» النطاق $س^2 + ص^2 = ٢٥$

وتغطّي محطة «بيتا» النطاق $س^2 + ص^2 + ٥(س + ص) = ٦٥$

ولتحديد المواضع التي تنتقل عندها الطائرة بين نطاقَي الرادارين بالضبط، أوجد نقاط تقاطع حدود إشارتيهما.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في
حلّ السؤال ٢ ثم
ناقشوا الإجابة.

دائرة تمرّ بنقاط تقاطع دائرتين

الفصل الرابع الهندسة والمعادلات

٢٦-٤

الرياضيات

لاحظ!

! منحني يمرّ بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ + فس + قص + ر + و = ٠$ و $س٢ + ص٢ + لس + مص + ن = ٠$ يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$ك(س٢ + ص٢ + فس + قص + ر) + (س٢ + ص٢ + لس + مص + ن) = ٠$$

! عند كتابة المعادلة النهائية للدائرة، تأكد من أنّ معاملتي $س٢$ ، $ص٢$ يساويان ١

استعدّ

أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٥ = ٠$ و $س٢ + ص٢ = ٥$ وبالنقطة $(٣, ٠)$.

طريقة الحلّ

الشكل المارّ بنقطتي تقاطع هاتين الدائرتين يمكن التعبير عنه بـ

$$ك(س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٥) + (س٢ + ص٢ - ٥) = ٠ \dots (١)$$

وبما أنّ الدائرة تمرّ بالنقطة $(٣, ٠)$:

$$ك(٣ + ٠ - ٦ - ٠ + ٥) + (٩ + ٠ - ٥) = ٠$$

$$٨ك + ٤ = ٠$$

$$ك = -\frac{١}{٢}$$

وبالتعويض بها في (١) وإجراء الحساب نحصل على:

$$\frac{١}{٢}س٢ + \frac{١}{٢}ص٢ + س + ٣ - \frac{١}{٢} = ٠$$

$$س٢ + ص٢ + ٢س + ٦ - ١ = ٠$$

حاول

أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٨ = ٠$ و $س٢ + ص٢ = ٤$ وبالنقطة الأصل.

تدرّب

حلّ المسائل الآتية.

١ أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٣ = ٠$ و $س٢ + ص٢ = ٤$ وبالنقطة $(٣, ٠)$.٢ أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٨ = ٠$ و $س٢ + ص٢ = ١$ وبالنقطة $(٣, ٢)$.٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين $س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٢ = ٠$ و $س٢ + ص٢ = ١٢$ وبالنقطة $(٤, ٠)$.

نواتج التعلّم

إيجاد معادلة الدائرة المارة بنقاط تقاطع دائرتين أخريين.

اضرب إحدى المعادلتين في ك وأضفها إلى المعادلة الأخرى.

اجعل معاملتي $س٢$ و $ص٢$ يساويان ١.

تعاون مع زميلك

تعاون مع مجموعتك في حلّ قسم «حاول» ثم ناقشوا لإيجاد إجابة.

★ التحديّ

أوجد معادلة الدائرة المارة بنقطتي تقاطع الدائرتين

$$س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ٦ = ٠$$

$$س٢ + ص٢ - ٢س - ٢ص + ١١ = ٠$$

وبالنقطة $(٢, ٢)$.

فريق الإعداد والاعتماد

قائد المشروع والمدير التحريري

Maki Komizo

المحررون والمؤلفون

Tomoaki Tsunoyama

Yukihiro Kawakubo

Yosihito Kosaka

Ritsu Igarashi

المصممون

Sayaka Higuchi

المراجعون

أ.د. جلال محروس معتمد

أ.د. احمد عبد القادر

أ.د. محمد محمد علي

أ.د. طه محمد مرسى

أ. منال عباس احمد

د. محمد محي الدين

أ. عثمان مصطفى عثمان

أ. سامح عبد الباسط السيد

الإدارة المركزية لتطوير المناهج

الإشراف العام

د. جبريل أنور حميدة

رئيس الإدارة المركزية لتطوير المناهج

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم والتعليم الفني - 2026 / 2027

لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا الكتاب أو تخزينه في نظام لاسترجاع المعلومات أو نقله بأي صورة أو وسيلة، إلكترونية أو بالتصوير أو التسجيل أو غير ذلك، من دون إذن كتابي مسبق من وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني.

EDUCATION SPRINGS NEW LIFE



class

name